Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 299–304
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Unitaires multiplicatifs commutatifs

Commutative multiplicative unitaries

Saad Baaj [a], Georges Skandalis [b]

[a] *Département de mathématiques, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière, France*
[b] *Université Denis Diderot (Paris VII), UFR de mathématiques, CP 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05, France*

Reçu le 15 décembre 2002 ; accepté le 14 janvier 2003

Présenté par Alain Connes

Résumé

Dans un article précédent, nous avions prouvé que tout unitaire multiplicatif commutatif est un multiple de l'unitaire multiplicatif associé à un groupe localement compact. Dans cette Note nous donnons une démonstration plus simple de ce résultat, qui constitue une généralisation d'un théorème de Weil. ***Pour citer cet article : S. Baaj, G. Skandalis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

In a previous article, we proved that every commutative multiplicative unitary is a multiple of the multiplicative unitary associated to a locally compact group. In the present Note we give a simpler proof of this generalization of a theorem of Weil. ***To cite this article: S. Baaj, G. Skandalis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abridged English version

In this Note we give a simpler proof of the following Weil-type theorem (cf. [3,2]):

Theorem 0.1 (cf. [1, Théorème 2.1]). *Let H be a separable Hilbert space and $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ a commutative multiplicative unitary. There exists a locally compact group G and a separable Hilbert space K such that V is isomorphic to $V_G \otimes 1_{K \otimes K}$.*

Let us recall some notation which appears in this theorem:

Adresses e-mail : baaj@math.univ-bpclermont.fr (S. Baaj), skandal@mathp7.jussieu.fr (G. Skandalis).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00034-7

– For $\xi \in H$, one defines $\theta_\xi \in \mathcal{L}(H, H \otimes H)$ by the formula $\theta_\xi(\eta) = \eta \otimes \xi$.
– For $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ and $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, one defines $(\omega \otimes \mathrm{id})(T) \in \mathcal{L}(H)$ by setting $\langle \eta, (\omega \otimes \mathrm{id})(T)\xi \rangle = \omega(\theta_\eta^* T \theta_\xi)$.

Define $T_{12}, T_{13}, T_{23} \in \mathcal{L}(H \otimes H \otimes H)$ by putting $T_{12} = T \otimes 1_H$, $T_{23} = 1_H \otimes T$ and $T_{13} = \Sigma_{23} T_{12} \Sigma_{23} = \Sigma_{12} T_{23} \Sigma_{12}$ where $\Sigma \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ is the flip: $(\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi)$.

– A unitary $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ is said to be *multiplicative* if it satisfies the pentagon relation

$$V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}. \tag{1}$$

– Let V be a multiplicative unitary. For $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, let $L(\omega) \in \mathcal{L}(H)$ denote the operator $(\omega \otimes \mathrm{id})(V)$. Define $A(V) \subset \mathcal{L}(H)$ to be the set $\{L(\omega);\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$. Let $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}(H)_*$ and define $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ to be the map $x \mapsto (\omega_1 \otimes \omega_2)(V^*(1 \otimes x)V)$. By (1), we have $L(\omega_1)L(\omega_2) = L(\omega)$, whence $A(V)$ is a sub-algebra of $\mathcal{L}(H)$. Let S_V be the sub-C^*-algebra of $\mathcal{L}(H)$ generated by $A(V)$.
– Let V be a multiplicative unitary. The following are equivalent:
  (i) the algebra $A(V)$ is commutative;
  (ii) the C^*-algebra S_V is commutative;
  (iii) we have $V_{23} V_{13} = V_{13} V_{23}$.

Indeed, (ii) $\Rightarrow$ (i) is clear. If (i) holds, then for all $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}(H)_*$ we have $(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id})(V_{13} V_{23}) = L(\omega_1)L(\omega_2) = L(\omega_2)L(\omega_1) = (\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id})(V_{23} V_{13})$ whence (iii). If (iii) holds, then $V_{23} V_{13} = V_{13} V_{23}$ and $V_{23}^* V_{13} = V_{13} V_{23}^*$. Applying $(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id})$ to these equalities, we deduce (ii).
When these conditions are satisfied, V is said to be *commutative.*

– Let $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ and $W \in \mathcal{L}(K \otimes K)$ be multiplicative unitaries. Define the multiplicative unitary $V \otimes W = V_{13} W_{24} \in \mathcal{L}((H \otimes K) \otimes (H \otimes K))$.

We say that V and W are *isomorphic* if there exists a unitary $u \in \mathcal{L}(H, K)$ such that $W(u \otimes u) = (u \otimes u)V$.

– Let G be a locally compact group; denote by m a right Haar measure on G. The operatorr $V_G \in \mathcal{L}(L^2(G, m) \otimes L^2(G, m))$ defined by $(V_G \xi)(x, y) = \xi(xy, y)$ (for $\xi \in L^2(G, m) \otimes L^2(G, m) = L^2(G \times G, m \otimes m),\ x, y \in G$) is a commutative multiplicative unitary.

Let us now begin the proof of Theorem 0.1.
Let H be a separable Hilbert space and $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ a commutative multiplicative unitary. Denote by G the spectrum of the commutative sub-C^*-algebra S_V of $\mathcal{L}(H)$ generated by $A(V)$. The space G is locally compact.
The inclusion $S_V \subset \mathcal{L}(H)$ is a faithful representation $\pi : C_0(G) \to \mathcal{L}(H)$. We thus find a map $\ell : \mathcal{L}(H)_* \to C_0(G)$ defined by $\pi \circ \ell = L$.
For $g \in G$, the map $\omega \mapsto \ell(\omega)(g)$ is an element of the dual of $\mathcal{L}(H)_*$. Therefore, there exists $\tau_g \in \mathcal{L}(H)$ such that $\ell(\omega)(g) = \omega(\tau_g)$. As $\|\ell(\omega)\|_\infty = \|L(\omega)\| \leqslant \|\omega\|$, we find $\|\tau_g\| \leqslant 1$.
Denote by $\widetilde{G} = G \cup \{\infty\}$ the one point compactification of G and set $\tau_\infty = 0$. As $\ell(\omega)$ is the map $g \mapsto \omega(\tau_g)$, the map $g \mapsto \tau_g$ is a homeomorphism from the compact space $\widetilde{G}$ onto its image $T \subset \mathcal{L}(H)$ endowed with the ultraweak topology $\sigma(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}(H)_*)$.
Since H is separable and $\pi : C_0(G) \to \mathcal{L}(H)$ is a nondegenerate representation, there exists a measure space (Y, ν), a measurable map $h : Y \to G$ and a unitary $u : L^2(Y, \nu) \to H$ such that, for $f \in C_0(G)$ and $\xi \in L^2(Y, \nu)$, we have $u^* \pi(f) u(\xi) = (f \circ h)\xi$.

Lemma 0.2. *Identify $H \otimes L^2(Y, \nu)$ with the space $L^2(Y, \nu, H)$ of (classes of) square integrable functions on Y with values in H. For all $\xi \in L^2(Y, \nu, H)$, we have (for almost all $y \in Y$) $((1 \otimes u^*)V(1 \otimes u)\xi)(y) = \tau_{h(y)}(\xi(y))$.*

Proof. We just have to prove this for $\xi = \alpha \otimes \eta$ with $\alpha \in H$ and $\eta \in L^2(Y, \nu)$. Let $\beta \in H$ and $\zeta \in L^2(Y, \nu)$. We have

$$\big\langle \beta \otimes \zeta, (1 \otimes u^*)V(1 \otimes u)(\alpha \otimes \eta)\big\rangle = \big\langle \zeta, \big(\ell(\omega_{\beta,\alpha}) \circ h\big)\eta\big\rangle.$$

But $\ell(\omega_{\beta,\alpha})$ is the function $g \mapsto \omega_{\beta,\alpha}(\tau_g)$, hence $\ell(\omega_{\beta,\alpha}) \circ h$ is the function $y \mapsto \omega_{\beta,\alpha}(\tau_{h(y)})$. Therefore

$$\big\langle \beta \otimes \zeta, (1 \otimes u^*)V(1 \otimes u)(\alpha \otimes \eta)\big\rangle = \int_Y \overline{\zeta(y)} \big\langle \beta, \tau_{h(y)}(\alpha)\big\rangle \eta(y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

and the lemma follows. □

Let μ denote a measure on G whose class is the image by h (of a finite measure in the class) of ν.

Since V is unitary, τ_g is μ-almost everywhere unitary (by Lemma 0.2). Denote by D the set of $g \in G$ such that τ_g is unitary. As H is separable, the unitary group is a Borel subset of $\mathcal{L}(H)$ (for the ultraweak topology). Therefore D is a Borel subset of G. Its complement has zero μ-measure and, as the representation π is faithful, D is dense in G.

Let $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}(H)_*$ and define $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ to be the map $x \mapsto (\omega_1 \otimes \omega_2)(V^*(1 \otimes x)V)$. We have $L(\omega_1)L(\omega_2) = L(\omega)$, whence $\ell(\omega_1)\ell(\omega_2) = \ell(\omega)$. In other words, for all $g \in G$,

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(\tau_g \otimes \tau_g) = \omega(\tau_g) = (\omega_1 \otimes \omega_2)\big(V^*(1 \otimes \tau_g)V\big),$$

therefore $\tau_g \otimes \tau_g = V^*(1 \otimes \tau_g)V$. Applying $\omega \otimes \mathrm{id}$ to the equality $V(\tau_g \otimes \tau_g) = (1 \otimes \tau_g)V$, we find

$$L(\tau_g\omega)\tau_g = \tau_g L(\omega). \tag{2}$$

If $g \in D$, it follows that $\tau_g S_V \tau_g^* = S_V$, thus there exists an automorphism α_g of $C_0(G)$ satisfying

$$\pi\big(\alpha_g(f)\big) = \tau_g \pi(f)\tau_g^* \tag{3}$$

for all $f \in C_0(G)$. For $f = \ell(\omega)$, we find $\alpha_g(\ell(\omega)) = \ell(\tau_g\omega)$. For $h \in G$, the map $f \mapsto \alpha_g^{-1}(f)(h)$ is a character, so that there exists $k \in G$ satisfying $\alpha_g^{-1}(f)(h) = f(k)$. For $f = \ell(\omega)$, we find $\ell(\tau_g^*\omega)(h) = \ell(\omega)(k)$, whence $\omega(\tau_h\tau_g^*) = \omega(\tau_k)$. It follows that $\{\tau_g;\ g \in D\}$ is a sub-group of the unitary group of H.

Let $x \in T$. We have proved that for $g \in D$, we have $x\tau_g \in T$. It follows that $xy \in T$ for all $x, y \in T$, since $\{\tau_g;\ g \in D\} \cup \{0\}$ is ultraweakly dense in T, the map $y \mapsto xy$ is ultraweakly continuous, and T is ultraweakly compact whence closed.

For $g, h \in \widetilde{G}$, let $gh \in \widetilde{G}$ be the element satisfying $\tau_{gh} = \tau_g\tau_h$.

Let $g \in G$. Denote by α_g the endomorphism of $C_0(G)$ given by

$$\big(\alpha_g(f)\big)(h) = f(hg). \tag{4}$$

We have $(\alpha_g(\ell(\omega)))(h) = \omega(\tau_h\tau_g) = (\ell(\tau_g\omega))(h)$, whence $\alpha_g(\ell(\omega)) = \ell(\tau_g\omega)$. By formula (2), $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_g & 0 \end{pmatrix}$ commutes with the normal operator $\begin{pmatrix} \pi(f) & 0 \\ 0 & \pi(\alpha_g(f)) \end{pmatrix}$ for $f = \ell(\omega) \in C_0(G)$. But every operator which commutes with a normal operator, commutes with its adjoint. Therefore $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_g & 0 \end{pmatrix}$ commutes with $\begin{pmatrix} \pi(f) & 0 \\ 0 & \pi(\alpha_g(f)) \end{pmatrix}$ for all $f \in C_0(G)$; in other words τ_g intertwines π and $\pi \circ \alpha_g$.

The spectral measure of π is μ, whereas the spectral measure of $\pi \circ \alpha_g$ is $\alpha_g(\mu)$. If $g \notin D$, the measure $\alpha_g(\mu)$ is carried by Dg which is disjoint from D, whence $\tau_g = 0$. It follows that $G = D$.

However, on the unitary group, the product is ultraweakly continuous, whence G is a locally compact group.

Finally by formulæ (3) and (4), the pair (π, τ) is a covariant representation for the action of G on $C_0(G)$ by right translations. Hence, it is a representation of $C_0(G) \rtimes G \simeq \mathcal{K}$. Therefore, there exist a Hilbert space K and a unitary $v \in \mathcal{L}(H, L^2(G, m) \otimes K)$ such that $v\pi(f)v^* = M_f \otimes 1$, where, for $f \in C_0(G)$, $M_f \in \mathcal{L}(L^2(G, m))$ is the operator of multiplication by f and $v\tau_g v^* = \rho_g \otimes 1$ where $\rho_g \in \mathcal{L}(L^2(G, m))$ is the operator of right translation by g. It follows that $(v \otimes v)V(v^* \otimes v^*)$ is the operator $(V_G)_{13}$ (acting on $L^2(G, m) \otimes K \otimes L^2(G, m) \otimes K$). □

1. Introduction

Dans cette Note nous donnons une démonstration plus simple de l'analogue suivant du théorème de Weil (cf. [3,2]) :

Théorème 1.1 (cf. [1, Théorème 2.1]). *Soient H un espace hilbertien séparable et $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ un unitaire multiplicatif commutatif. Il existe un groupe localement compact G et un espace hilbertien séparable K tels que V soit isomorphe à $V_G \otimes 1_{K \otimes K}$.*

Rappelons rapidement quelques notations qui interviennent dans ce théorème :

- Pour $\xi \in H$, on définit $\theta_\xi \in \mathcal{L}(H, H \otimes H)$ par la formule $\theta_\xi(\eta) = \eta \otimes \xi$.
- Pour $T \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ et $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on définit $(\omega \otimes \mathrm{id})(T) \in \mathcal{L}(H)$ en posant $\langle \eta, (\omega \otimes \mathrm{id})(T)\xi \rangle = \omega(\theta_\eta^* T \theta_\xi)$.

On définit $T_{12}, T_{13}, T_{23} \in \mathcal{L}(H \otimes H \otimes H)$ en posant $T_{12} = T \otimes 1_H$, $T_{23} = 1_H \otimes T$ et $T_{13} = \Sigma_{23} T_{12} \Sigma_{23} = \Sigma_{12} T_{23} \Sigma_{12}$ où $\Sigma \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est la volte ($\Sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$).

- Un unitaire $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ est dit *multiplicatif* s'il satisfait la relation pentagonale
$$V_{12} V_{13} V_{23} = V_{23} V_{12}. \tag{1}$$
- Soit V un unitaire multiplicatif. Pour $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$, on note $L(\omega) \in \mathcal{L}(H)$ l'opérateur $(\omega \otimes \mathrm{id})(V)$. Notons $A(V) \subset \mathcal{L}(H)$ l'ensemble $\{L(\omega);\ \omega \in \mathcal{L}(H)_*\}$. Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}(H)_*$ et notons $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ l'application $x \mapsto (\omega_1 \otimes \omega_2)(V^*(1 \otimes x)V)$. Par (1), on a $L(\omega_1)L(\omega_2) = L(\omega)$, donc $A(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$. On note S_V la sous-C^*-algèbre de $\mathcal{L}(H)$ engendrée par $A(V)$.
- Soit V un unitaire multiplicatif. Les conditions suivantes sont équivalentes :
  (i) l'algèbre $A(V)$ est commutative ;
  (ii) la C^*-algèbre S_V est commutative ;
  (iii) on a $V_{23} V_{13} = V_{13} V_{23}$.

En effet, (ii) $\Rightarrow$ (i) est clair. Si (i) est vrai, alors pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}(H)_*$ on a $(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id})(V_{13} V_{23}) = L(\omega_1)L(\omega_2) = L(\omega_2)L(\omega_1) = (\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id})(V_{23} V_{13})$, d'où (iii). Si (iii) est satisfait, alors $V_{23} V_{13} = V_{13} V_{23}$ et $V_{23}^* V_{13} = V_{13} V_{23}^*$. Appliquant $(\omega_1 \otimes \omega_2 \otimes \mathrm{id})$ à ces égalités, on en déduit (ii).
Si ces conditions sont satisfaites, on dit que V est *commutatif.*

- Soient $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ et $W \in \mathcal{L}(K \otimes K)$ des unitaires multiplicatifs. On définit l'unitaire multiplicatif $V \otimes W = V_{13} W_{24} \in \mathcal{L}((H \otimes K) \otimes (H \otimes K))$.

On dit que V et W sont *isomorphes* s'il existe un opérateur unitaire $u \in \mathcal{L}(H, K)$ tel que $W(u \otimes u) = (u \otimes u)V$.

- Soit G un groupe localement compact ; notons m une mesure de Haar à droite. L'opérateur $V_G \in \mathcal{L}(L^2(G, m) \otimes L^2(G, m))$ défini par $(V_G \xi)(x, y) = \xi(xy, y)$ (pour $\xi \in L^2(G, m) \otimes L^2(G, m) = L^2(G \times G, m \otimes m)$, $x, y \in G$) est un unitaire multiplicatif commutatif.

2. Preuve du théorème

Passons à présent à la démonstration du théorème.

Soient H un espace hilbertien séparable et $V \in \mathcal{L}(H \otimes H)$ un unitaire multiplicatif commutatif. Notons G le spectre de la sous-C^*-algèbre commutative S_V de $\mathcal{L}(H)$ engendrée par $A(V)$. C'est un espace localement compact.

L'inclusion $S_V \subset \mathcal{L}(H)$ est une représentation fidèle $\pi : C_0(G) \to \mathcal{L}(H)$. On a donc une application $\ell : \mathcal{L}(H)_* \to C_0(G)$ définie par $\pi \circ \ell = L$.

Pour $g \in G$, l'application $\omega \mapsto \ell(\omega)(g)$ est un élément du dual (topologique) de $\mathcal{L}(H)_*$. Il existe donc $\tau_g \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\ell(\omega)(g) = \omega(\tau_g)$. Comme $\|\ell(\omega)\|_\infty = \|L(\omega)\| \leqslant \|\omega\|$, on en déduit que $\|\tau_g\| \leqslant 1$.

Notons $\widetilde{G} = G \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de G et posons $\tau_\infty = 0$. Comme $\ell(\omega)$ est l'application $g \mapsto \omega(\tau_g)$, l'application $g \mapsto \tau_g$ est un homéomorphisme de l'espace compact $\widetilde{G}$ sur son image $T \subset \mathcal{L}(H)$ munie de la topologie ultrafaible $\sigma(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}(H)_*)$.

Comme H est séparable et $\pi : C_0(G) \to \mathcal{L}(H)$ est une représentation non dégénérée, il existe un espace mesuré (Y, ν), une application mesurable $h : Y \to G$ et un unitaire $u : L^2(Y, \nu) \to H$ tels que, pour $f \in C_0(G)$ et $\xi \in L^2(Y, \nu)$ on ait $u^*\pi(f)u(\xi) = (f \circ h)\xi$.

Lemme 2.1. *Identifions $H \otimes L^2(Y, \nu)$ avec l'espace $L^2(Y, \nu, H)$ des* (*classes de*) *fonctions de carré intégrable de Y dans H. Pour tout $\xi \in L^2(Y, \nu, H)$, on a $((1 \otimes u^*)V(1 \otimes u)\xi)(y) = \tau_{h(y)}(\xi(y))$* (*pour presque tout $y \in Y$*).

Démonstration. Il suffit de démontrer cela pour $\xi = \alpha \otimes \eta$ avec $\alpha \in H$ et $\eta \in L^2(Y, \nu)$. Soient $\beta \in H$ et $\zeta \in L^2(Y, \nu)$. On a

$$\bigl\langle \beta \otimes \zeta, (1 \otimes u^*)V(1 \otimes u)(\alpha \otimes \eta)\bigr\rangle = \bigl\langle \zeta, \bigl(\ell(\omega_{\beta,\alpha}) \circ h\bigr)\eta\bigr\rangle.$$

Or $\ell(\omega_{\beta,\alpha})$ est la fonction $g \mapsto \omega_{\beta,\alpha}(\tau_g)$, donc $\ell(\omega_{\beta,\alpha}) \circ h$ est la fonction $y \mapsto \omega_{\beta,\alpha}(\tau_{h(y)})$. Donc

$$\bigl\langle \beta \otimes \zeta, (1 \otimes u^*)V(1 \otimes u)(\alpha \otimes \eta)\bigr\rangle = \int_Y \overline{\zeta(y)}\bigl\langle \beta, \tau_{h(y)}(\alpha)\bigr\rangle \eta(y)\,\mathrm{d}\nu(y),$$

d'où le lemme. $\square$

Notons μ une mesure sur G dont la classe est celle de l'image par h (d'une mesure finie dans la classe) de ν.

Comme V est unitaire, τ_g est μ-presque partout unitaire d'après le Lemme 2.1. Notons D l'ensemble des $g \in G$ tels que τ_g soit unitaire. Comme H est séparable, le groupe unitaire est une partie borélienne de $\mathcal{L}(H)$ (pour la topologie ultrafaible). Il en résulte que D est une partie borélienne de G. Son complémentaire est μ-négligeable et, comme la représentation π est fidèle, D est dense dans G.

Soient $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{L}(H)_*$ et notons $\omega \in \mathcal{L}(H)_*$ l'application $x \mapsto (\omega_1 \otimes \omega_2)(V^*(1 \otimes x)V)$. On a $L(\omega_1)L(\omega_2) = L(\omega)$, donc $\ell(\omega_1)\ell(\omega_2) = \ell(\omega)$. Autrement dit, pour tout $g \in G$, on a

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)(\tau_g \otimes \tau_g) = \omega(\tau_g) = (\omega_1 \otimes \omega_2)\bigl(V^*(1 \otimes \tau_g)V\bigr),$$

d'où l'on déduit que $\tau_g \otimes \tau_g = V^*(1 \otimes \tau_g)V$. Appliquant $\omega \otimes \mathrm{id}$ à l'égalité $V(\tau_g \otimes \tau_g) = (1 \otimes \tau_g)V$, on trouve

$$L(\tau_g\omega)\tau_g = \tau_g L(\omega). \tag{2}$$

Si $g \in D$, on en déduit que $\tau_g S_V \tau_g^* = S_V$, donc il existe un automorphisme α_g de $C_0(G)$ tel que, pour $f \in C_0(G)$, on ait

$$\pi\bigl(\alpha_g(f)\bigr) = \tau_g \pi(f)\tau_g^*. \tag{3}$$

Pour $f = \ell(\omega)$, on trouve $\alpha_g(\ell(\omega)) = \ell(\tau_g\omega)$. Pour $h \in G$, l'application $f \mapsto \alpha_g^{-1}(f)(h)$ est un caractère, donc il existe $k \in G$ tel que $\alpha_g^{-1}(f)(h) = f(k)$. Pour $f = \ell(\omega)$, on trouve $\ell(\tau_g^*\omega)(h) = \ell(\omega)(k)$, soit $\omega(\tau_h\tau_g^*) = \omega(\tau_k)$. On en déduit immédiatement que $\{\tau_g;\ g \in D\}$ est un sous-groupe du groupe unitaire de H.

Soit $x \in T$. On a montré que, pour tout $g \in D$, on a $x\tau_g \in T$. On en déduit que pour tout $x, y \in T$ on a $xy \in T$, puisque $\{\tau_g;\ g \in D\} \cup \{0\}$ est ultrafaiblement dense dans T, l'application $y \mapsto xy$ est ultrafaiblement continue, et T est ultrafaiblement compact donc fermé.

Pour $g, h \in \widetilde{G}$, notons $gh \in \widetilde{G}$ l'élément tel que $\tau_{gh} = \tau_g \tau_h$.

Soit $g \in G$. Notons α_g l'endomorphisme de $C_0(G)$ donné par

$$\big(\alpha_g(f)\big)(h) = f(hg). \tag{4}$$

On a $(\alpha_g(\ell(\omega)))(h) = \omega(\tau_h \tau_g) = (\ell(\tau_g \omega))(h)$, donc $\alpha_g(\ell(\omega)) = \ell(\tau_g \omega)$. De la formule (2), on déduit que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_g & 0 \end{pmatrix}$ commute avec l'opérateur normal $\begin{pmatrix} \pi(f) & 0 \\ 0 & \pi(\alpha_g(f)) \end{pmatrix}$ pour $f = \ell(\omega) \in C_0(G)$. Or tout opérateur qui commute avec un opérateur normal, commute avec son adjoint. On en déduit que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau_g & 0 \end{pmatrix}$ commute avec l'opérateur normal $\begin{pmatrix} \pi(f) & 0 \\ 0 & \pi(\alpha_g(f)) \end{pmatrix}$ pour tout $f \in C_0(G)$, autrement dit τ_g entrelace π et $\pi \circ \alpha_g$.

La mesure spectrale de π est μ, celle de $\pi \circ \alpha_g$ est $\alpha_g(\mu)$. Si $g \notin D$, la mesure $\alpha_g(\mu)$ est portée par Dg qui est disjoint de D, donc $\tau_g = 0$. Il s'ensuit que $G = D$.

Sur le groupe unitaire, le produit est ultrafaiblement continu, donc G est un groupe localement compact.

Enfin par les formules (3) et (4), le couple (π, τ) est une représentation covariante pour l'action de G sur $C_0(G)$ par translation à droite. C'est donc une représentation de $C_0(G) \rtimes G \simeq \mathcal{K}$. Il existe donc un espace hilbertien K et un unitaire $v \in \mathcal{L}(H, L^2(G, m) \otimes K)$ tels que $v\pi(f)v^* = M_f \otimes 1$, où, pour $f \in C_0(G)$, $M_f \in \mathcal{L}(L^2(G, m))$ est l'opérateur de multiplication par f et $v\tau_g v^* = \rho_g \otimes 1$ où $\rho_g \in \mathcal{L}(L^2(G, m))$ est l'opérateur de translation à droite par g. On en déduit que $(v \otimes v)V(v^* \otimes v^*)$ est l'opérateur $(V_G)_{13}$ opérant dans $L^2(G, m) \otimes K \otimes L^2(G, m) \otimes K$. $\square$

Références

[1] S. Baaj, G. Skandalis, Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C^*-algèbres, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 26 (1993) 425–488.

[2] G.W. Mackey, Borel structures in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957) 134–165.

[3] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, in : Actualés Sci. Industr., Vol. 869, Hermann, Paris, 1940.