



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 277–282



Analyse numérique

Sur le traitement des conditions aux limites à l'infini pour quelques problèmes extérieurs par la méthode de Schwarz alternée

On handling the boundary conditions at infinity for some exterior problems by the alternating Schwarz method

F. Ben Belgacem^{a,b,*}, M. Fournié^a, N. Gmati^c, F. Jelassi^c

^a UMR CNRS 5640, laboratoire de mathématiques pour l'industrie et la physique, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

^b En délégation à l'UMR CNRS 7598, laboratoire Jacques-Louis Lions, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex, France

^c LAMSIN, École nationale d'ingénieurs de Tunis, BP 37, le Belvédère, 1002 Tunis, Tunisie

Reçu le 6 décembre 2002 ; accepté le 9 décembre 2002

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous proposons un algorithme itératif de résolution des problèmes de Helmholtz et de Poisson extérieurs. Son interprétation comme une méthode de Schwarz alternée nous permet d'établir sa convergence géométrique dans le cas elliptique. *Pour citer cet article : F. Ben Belgacem et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

We propose an iterative algorithm to solve the exterior Helmholtz and Poisson problems. It can be written as an alternating Schwarz method which allows us to state a geometrical convergence result in the elliptic case. *To cite this article: F. Ben Belgacem et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).*

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Abridged English version

Partial differential equations modeling physical phenomena occurring in unbounded domains have given rise to much work either for their mathematical analysis or for their numerical approximation. To make them accessible to scientific computing, it is necessary to write them in an appropriate way on truncated domains. Integral equations are affordable tools for the simulation of these problems, although, very often, the associated algebraic system turns

* Corresponding author.

Adresse e-mail : belgacem@mip.ups-tlse.fr (F. Ben Belgacem).

out to be heavy to solve. An alternative is to resort to the coupled approach of volumic finite elements/integral representation, which combines the advantages of truncating the domain through the integral formulae while avoiding the singularities, and of having a sparse matrix to invert coming from classical finite elements (see [7,6]). We propose in this Note an iterative algorithm to solve the coupled problem in a competitive way. This algorithm may be viewed as an alternating Schwarz method which allows us, for some elliptic exterior problems, to state a geometrical convergence rate.

Helmholtz equation. Let Ω_i be a bounded obstacle in \mathbb{R}^3 with a regular boundary Γ and Ω_e be its unbounded complementary. The Helmholtz problem is used for modeling a scattered acoustic or electromagnetic wave propagating through Ω_e ; it consists in finding a scalar field $u \in H_{loc}^1(\Omega_e, \mathbb{C})$ solution of (1) and satisfying the Sommerfeld condition at infinity. Another formulation is to introduce a fictitious boundary Σ located in Ω_e and to write down, through the integral formula, a non-standard outgoing condition on it given in (2), so that the original problem (1) is equivalent to the Helmholtz equation set on the truncated annular domain Ω_c (delimited by Γ and Σ) and subject to the condition (2). In order to solve it we use an iterative algorithm where the coupling integral term is isolated by expliciting it in (2). In the iterative process, the sequence $(u_m)_m$ defined by (3) is computed by only solving, at each step, a standard Helmholtz–Robin problem which brings out a higher facility in the numerical treatment. The very enjoyable feature of this technique is that it can be interpreted as an alternating Schwarz method, which consists in solving alternatively the problem (4), (5) set on $\Omega_i \cup \Omega_e$ and the problem (6), (7) set on the truncated domain Ω_c . The sequence $(v_{2m})_m$ provided by the solution of the last problem coincides with $(u_m)_m$ obtained by our algorithm.

Poisson’s equation. A potential flow around a bounded obstacle in \mathbb{R}^3 is governed by the Poisson’s equation with an appropriate decreasing condition at infinity (8). Following the methodology described for the Helmholtz problem, the domain is truncated by a fictitious boundary Σ , and a non-local ‘Dirichlet’ condition is imposed on Σ . To solve the reduced equation, we use the fixed point iterating algorithm written down in (9), which also turn out to be equivalent to the alternating Schwarz procedure consisting in solving alternatively Eqs. (10)–(11) and Eq. (12). Using the variational tools developed in [9] we are able to establish the expected geometrical convergence (see [1] for the proof).

Theorem 0.1. *The sequence $(u_m)_m$ computed by the iterative algorithm (9) converges towards the exact solution u of the exterior Poisson–Neumann problem (8) with a geometrical rate: there exists $\tau \in]0, 1[$ and a constant C independent of m such that $\|u - u_m\|_{H^1(\Omega_c)} \leq C\tau^m$.*

1. Introduction

Les équations aux dérivées partielles, posées sur des domaines non-bornés, interviennent dans de nombreux secteurs de la physique, et pour leurs simulations numériques, la prise en compte du comportement de la solution à l’infini à travers des conditions absorbantes ou de rayonnement demeure une source de difficultés majeures. Plusieurs outils de calcul mis au point pendant les dernières décennies, permettent de surmonter certaines de ces difficultés avec plus ou moins d’efficacité. Le recours, par exemple, aux équations intégrales conduit à des problèmes posés sur un domaine borné (qui est en général la surface d’un obstacle en dehors duquel les phénomènes qu’on désire approcher ont lieu), ce qui les rend accessibles au calcul scientifique (cf. [10]). Leur discrétisation par une méthode d’éléments finis s’avère parfois lourde, en particulier lorsqu’on prétend capter des phénomènes de courte longueur d’onde. Les difficultés proviennent des singularités contenues dans l’expression des potentiels de simple et de double couche. Dans la mesure où nous voulons réduire leur impact, et profiter des avantages des méthodes des éléments finis de volume (matrice creuse, existence de bons préconditionneurs, etc.), il est possible d’adopter une formulation couplée (cf. [6,7]). Elle consiste à introduire une surface fictive définissant un domaine

borné et nous considérons le problème aux limites sur ce dernier domaine en imposant une condition non-locale sur le bord artificiel qui s'exprime au moyen d'une représentation intégrale. Pour peu que le bord effectif du domaine extérieur et le bord fictif ne s'intersectent pas, aucune singularité ne vient « polluer » les calculs à effectuer.

L'objectif de ce travail est de présenter un solveur itératif du système issu de l'approximation des problèmes de Helmholtz et de Poisson extérieurs par une méthode couplée d'éléments finis de volume et de représentation intégrale. L'idée repose sur la décomposition de la matrice de rigidité en une matrice creuse et une matrice de perturbation dense au voisinage du bord fictif, qui traduit l'aspect non-local de la condition artificielle. Son effet sur la structure de la matrice globale est indésirable. A chaque itération, le système à inverser est déterminé par la première matrice et s'avère facile à résoudre. Une interprétation de l'algorithme comme une méthode de Schwarz alternée permet d'établir sa convergence dans le cas elliptique.

2. Condition de rayonnement à l'infini pour un problème de diffraction d'onde

Notons Ω_i un obstacle (de \mathbb{R}^3) et Ω_e son complémentaire qui constitue le domaine extérieur. La frontière de Ω_i est désignée par Γ et est supposée assez régulière. Le problème de Helmholtz, modélisant la diffraction d'une onde acoustique par l'obstacle Ω_i , est posé sur Ω_e et consiste à chercher u tel que

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_e, \quad \partial_n u = f \quad \text{sur } \Gamma, \quad \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla - i\kappa \right) u = e^{i\kappa|x|} O\left(\frac{1}{|x|^2} \right), \quad x \in V_\infty, \quad (1)$$

où κ est le nombre d'onde, V_∞ un voisinage de l'infini. La dernière condition est celle de radiation de Sommerfeld. La donnée f provient de l'onde incidente qui est souvent une onde plane ; dès que celle-ci appartient à $H^{-1/2}(\Gamma, \mathbb{C})$ ce problème admet une solution unique dans $H^1_{\text{loc}}(\Omega_e, \mathbb{C})$ (cf. [5]).

Afin de rendre l'approximation du problème aux limites (1) accessible au calcul sur ordinateurs, nous pouvons avoir recours à la méthode des équations intégrales, (on dit aussi la méthode des singularités) dont l'analyse a été détaillée dans une bibliographie abondante (cf., e.g., [5,10]). Une alternative consiste à utiliser une méthode couplée qui combine les formulations variationnelles (volumiques) standards et diverses représentations intégrales (cf. [6,7]). Cette approche allie les avantages des deux techniques à savoir la possibilité de tronquer le domaine de calcul – en évitant les éléments finis frontières – et les propriétés attrayantes des approximations par éléments finis des formulations variationnelles classiques.

L'idée revient à introduire une surface régulière Σ entourant l'obstacle. Le domaine limité par Γ et Σ est noté Ω_c et le problème de Helmholtz est posé sur le domaine tronqué Ω_c . Le bord Γ est alors assujéti à la condition naturelle de Neumann tandis que sur Σ est imposée une condition non-standard basée sur la représentation intégrale de la solution u qui se met sous la forme

$$(\partial_n - i\kappa)u(x) = T_K(u)(x) = \int_{\Gamma} (u(y)\partial_n K(x-y) - f(y)K(x-y)) dy \quad \forall x \in \Sigma. \quad (2)$$

Dans (2), le noyau K est donné par $K(x) = \left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla - i\kappa \right) G_\kappa(x)$, G_κ étant la fonction de Green définie par $G_\kappa(x) = -\frac{1}{4\pi} (e^{i\kappa|x|}/|x|)$. Notons que la représentation intégrale est utilisée seulement sur Σ évitant ainsi toute apparition de singularité. L'équivalent variationnel du problème écrit sur le domaine tronqué avec la condition (2) est étudié dans [6], où l'existence et l'unicité de la solution dans $H^1(\Omega_c, \mathbb{C})$ a été établie. Le couplage (non-local) forcé par le terme intégral génère quelques difficultés dans son traitement numérique car il dénature sensiblement la structure creuse de la matrice de rigidité que nous souhaitons préserver.

L'algorithme itératif que nous présentons s'applique au problème tronqué et est basé sur une idée de point fixe de Cauchy. Il s'agit de construire une suite d'itérés $(u_m)_m$ dont deux éléments successifs sont reliés par la relation de récurrence

$$\Delta u_{m+1} + \kappa^2 u_{m+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad \partial_n u_{m+1} = f \quad \text{sur } \Gamma, \quad (\partial_n - i\kappa)u_{m+1} = T_K(u_m) \quad \text{sur } \Sigma. \quad (3)$$

L'intérêt est que, à chaque étape du processus itératif, la matrice de rigidité est celle du problème de Helmholtz avec des conditions aux limites locales. En effet, le fait d'explicitier le terme de couplage à l'intérieur des itérations restore son caractère creux à cette matrice et le calcul de la solution discrète présente moins de difficultés. A nos yeux, le mérite de l'algorithme proposé ici réside dans la possibilité de l'interpréter comme une méthode de décomposition de domaine puisqu'il existe une connection directe avec les méthodes de Schwarz mutiplicatives. A cet effet, nous construisons une suite $(v_m)_m$ où v_{2m+1} vérifie

$$\Delta v_{2m+1} + \kappa^2 v_{2m+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \cup \Omega_e, \quad [\partial_n v_{2m+1}] = f, \quad [v_{2m+1}] = v_{2m} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (4)$$

$$\left(\frac{x}{|x|} \cdot \nabla - i\kappa \right) v_{2m+1} = e^{i\kappa|x|} O\left(\frac{1}{|x|^2} \right), \quad x \in V_\infty, \quad (5)$$

alors que v_{2m+2} est solution du problème aux limites posé sur le domaine tronqué Ω_c

$$\Delta v_{2m+2} + \kappa^2 v_{2m+2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad \partial_n v_{2m+2} = f \quad \text{sur } \Gamma, \quad (6)$$

$$(\partial_n - i\kappa)v_{2m+2} = (\partial_n - i\kappa)v_{2m+1} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (7)$$

Le crochet désigne le saut à travers la surface Γ . Il est à noter que $u_m = v_{2m}$, il suffit pour s'en apercevoir de déterminer la solution v_{2m+1} du problème aux limites (4), (5) au moyen de la représentation intégrale puis de l'insérer dans (7). Ainsi, l'algorithme apparaît comme une technique de type Schwarz alternée où la zone de recouvrement coïncide avec le domaine Ω_c . Pour le problème de Helmholtz posé dans un domaine borné, des variantes de la méthode de Schwarz ont été analysées et des résultats de convergence faible ont été établis (cf. [2,4,3]). Pour les problèmes harmoniques de diffraction posés dans des domaines non-bornés, qui constituent un axe de recherche d'importance, nous souhaitons démontrer des résultats comparables. Cette question est en cours d'étude et constitue, avec une investigation numérique systématique, la première partie du sujet de thèse de Jelassi (cf. [8]).

3. Condition de sortie pour un écoulement potentiel autour d'un obstacle

Une deuxième application où notre approche peut être utilisée avec succès provient de la mécanique des fluides et des écoulements non-confinés. La vitesse d'un fluide parfait incompressible qui s'écoule autour d'un obstacle dérive d'un potentiel et est solution d'un problème de Poisson–Neumann, avec des conditions de décroissance appropriées à l'infini. La condition de Neumann au bord de l'obstacle exprime une condition de non-pénétration du fluide dans celui-ci

$$\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega_e, \quad \partial_n u = f \quad \text{sur } \Gamma, \quad \nabla u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2} \right), \quad x \in V_\infty. \quad (8)$$

Lorsque $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$, ce problème est bien posé et admet une solution unique dans l'espace de Beppo–Lévi $W^1(\Omega_e)$, le complété de $D(\overline{\Omega_e})$ par rapport à la norme $\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega_e)^3}$ (cf. [5]). Suivant l'approche développée dans la section précédente, ce problème aux limites se ramène à une équation posée sur le domaine tronqué et le potentiel u est assujéti à une condition artificielle de «Dirichlet» non-locale dite condition de sortie dans la terminologie de la mécanique des fluides. Elle est déterminée à partir de la représentation intégrale donnée par

$$u(x) = T_{G_0}(u)(x) = \int_{\Gamma} u(y) \partial_n G_0(x-y) - f(y) G_0(x-y) dy \quad \forall x \in \Sigma.$$

Pour ce problème de Poisson, l'algorithme itératif s'écrit

$$\Delta u_{m+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad \partial_n u_{m+1} = f \quad \text{sur } \Gamma, \quad u_{m+1}(x) = T_{G_0}(u_m)(x) \quad \text{sur } \Sigma. \quad (9)$$

Cette procédure est encore plus avantageuse dans le cas du problème de Poisson car la matrice de rigidité du problème approché par éléments finis devient symétrique définie positive. L’algorithme s’interprète de nouveau comme un algorithme de Schwarz alterné. La suite (v_m) est déterminée par la résolution de deux problèmes aux limites, v_{2m+1} vérifie

$$\Delta v_{2m+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \cup \Omega_e, \quad [\partial_n v_{2m+1}] = f, \quad [v_{2m+1}] = v_{2m} \quad \text{sur } \Gamma, \tag{10}$$

$$\nabla v_{2m+1} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad x \in V_\infty, \tag{11}$$

alors que v_{2m+2} est solution de

$$\Delta v_{2m+2} = 0 \quad \text{dans } \Omega_c, \quad \partial_n v_{2m+2} = f \quad \text{sur } \Gamma, \quad v_{2m+2} = v_{2m+1} \quad \text{sur } \Sigma. \tag{12}$$

L’itéré u_m est restitué par la méthode de Schwarz grâce à l’identité $u_m = v_{2m}$. Établir une connection entre notre algorithme itératif et les techniques de Schwarz alternées permet d’exhiber un taux de convergence géométrique. La preuve est inspirée de celle proposée par Lions dans [9], et s’appuie sur les outils variationnels propres à l’analyse des problèmes extérieurs elliptiques, grâce auxquels il peut être démontré que l’opérateur linéaire qui détermine la récurrence entre $v_{2m+1} - \tilde{u}$ et $v_{2m-1} - \tilde{u}$, \tilde{u} étant le prolongement de u à Ω_i par zéro, est une contraction stricte dans l’espace $H^1(\Omega_i) \times W^1(\Omega_e)$. Le module de continuité de cet opérateur donne le taux de convergence de l’algorithme de Schwarz. Comme corollaire, la sous-suite $(v_{2m})_m$, et donc $(u_m)_m$, converge vers u dans l’espace $H^1(\Omega_c)$ (cf. [8,1]).

Théorème 3.1. *La suite $(u_m)_m$ construite par l’algorithme (9) converge vers la solution u du problème de Poisson–Neumann extérieur (8) avec un taux géométrique : il existe un réel $\tau \in]0, 1[$ et une constante C fonction de u_0 mais indépendante de m tels que $\|u - u_m\|_{H^1(\Omega_c)} \leq C\tau^m$.*

Remarque 1. Le résultat du théorème concerne la convergence de la suite $(u_m)_m$ vers u sur le domaine tronqué. Or, si u_m est prolongé au delà de la frontière fictive au moyen de la représentation intégrale, ce qui donne en fait la fonction v_{2m+1} , alors nous avons une convergence géométrique vers u dans l’espace de Beppo–Lévi ($W^1(\Omega_e)$) défini sur le domaine extérieur Ω_e .

Test numérique. Afin de vérifier le comportement de l’algorithme de Schwarz et sa capacité à prendre en compte de manière exacte les conditions de décroissance à l’infini, nous avons effectué des tests numériques en deux dimensions. Il s’agit d’approcher le problème de Poisson–Neumann posé dans le complémentaire du disque unité centré à l’origine et dont la solution est $u(x) = r^{-2} \sin(2\theta)$ où (r, θ) sont les coordonnées polaires. La frontière fictive Σ est le cercle de centre l’origine et de rayon $1 + e$, e étant l’épaisseur du domaine Ω_c . La surface représentative de la solution u est donnée dans la Fig. 1 de gauche pour $e = 1$. L’objectif est de constater la convergence de notre algorithme et de mettre en évidence la dépendance de sa vitesse de convergence par rapport à l’épaisseur e du domaine tronqué. Les calculs sont réalisés avec un code d’éléments finis affines où, à chaque itération, le système discret est résolu par une descente-remontée, une factorisation de Choleski de la matrice de Laplace étant accomplie en pré-traitement. Pour tous les tests la taille maximale des mailles est sensiblement égale à 0.15. La Fig. 1 de droite représente sur une échelle semi-logarithmique l’évolution du maximum du résidu entre deux itérés successifs en fonction des itérations, et ce pour quatre troncutures correspondantes aux valeurs de $e = 0.3, 0.5, 1$ et 3 . Nous observons que le résidu décroît exponentiellement en fonction du nombre d’itérations et que la convergence est d’autant plus rapide que le rayon du cercle extérieur est grand. Notons que le test d’arrêt n’a nullement besoin d’être très fin pour calculer la solution discrète du problème avec une précision satisfaisante, le choix des tests d’arrêt appropriés sera examiné en profondeur dans [8].

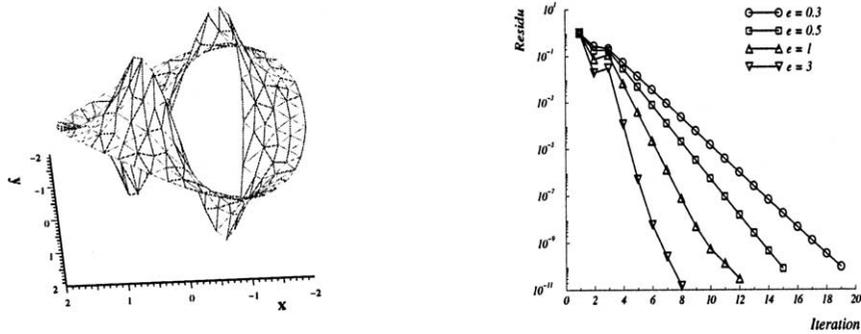


Fig. 1. Allure de la solution (à gauche) et courbes de convergence de l'algorithme itératif (à droite).

Fig. 1. Idea of the solution (left), and convergence curves of the iterative algorithm (right).

4. Extensions

De nombreuses extensions de la méthode itérative de Schwarz alternée, présentée dans cette Note, sont possibles pour traiter les conditions aux limites à l'infini. Les conditions aux limites transmises sur la surface fictive au cours des itérations peuvent être diverses, et elles peuvent avoir une incidence sur la dépendance du nombre d'itérations par rapport à la taille du domaine tronqué. Elles peuvent servir à prendre en compte exactement les conditions de sortie pour des écoulements fluides de type Navier–Stokes non-confinés (le domaine de l'écoulement étant non-borné au moins dans une direction). Il est, en outre, possible de l'utiliser dans le cadre de la méthode des éléments finis localisés (cf. [6]). Ces extensions seront analysées dans le cadre du travail de thèse de Jelassi [8], du point de vue théorique ou à défaut une investigation numérique sera menée pour quantifier les performances de cet algorithme.

Remerciements

Les travaux de recherche des membres du LAMSIN sont financés par le Secretariat d'État de la Recherche Scientifique et de la Technologie (SERST). Ce travail a été partiellement financé sur l'action intégrée 00F1309 du Comité Mixte de Coopération Universitaire Franco-Tunisienne (CMCU).

Références

- [1] F. Ben Belgacem, M. Fournié, N. Gmati, F. Jelassi, On solving the exterior elliptic problems by the alternating Schwarz method, en préparation.
- [2] J.-D. Benamou, B. Desprès, A domain decomposition method for the Helmholtz equation and related optimal control problems, *J. Comput. Phys.* 136 (1997) 68–82.
- [3] X.C. Cai, M.A. Casarin, F.W. Elliott, O.B. Widlund, Overlapping Schwarz algorithms for solving Helmholtz's equation, *Contemp. Math.* 218 (1998) 391–399.
- [4] F. Collino, S. Ghanemi, P. Joly, Domain decomposition method for harmonic wave propagation: a general presentation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 184 (2000) 171–211.
- [5] R. Dautray, J.-L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Vol. 6, Masson, 1988.
- [6] C. Hazard, M. Lenoir, *Modélisation et résolution des problèmes de diffraction*, cours de L'ENSTA et de DEA de Mécanique, Paris VI, ENSTA SMP, centre de l'Yvette, Palaiseau, 1995.
- [7] A. Jami, M. Lenoir, A new numerical method for solving exterior linear elliptic problems, in: *Lecture Notes in Phys.*, Vol. 90, Springer, 1979, pp. 292–298.
- [8] F. Jelassi, Thèse de l'EniTunis et de l'Université Toulouse 3, en préparation.
- [9] P.-L. Lions, On the alternating Schwarz method I, in: R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, J. Périaux (Eds.), *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for PDEs*, SIAM, Philadelphia, 1988, pp. 1–42.
- [10] J.-C. Nédélec, *Acoustic and Electromagnetic Equations, Integral Representations for Harmonic Problems*, in: *Appl. Math. Sci.*, Vol. 144, Springer-Verlag, New York, 2001.