



## Géométrie

# Théorie des hérissons et polytopes

## Hedgehog theory and polytopes

Yves Martinez-Maure

1, rue Auguste Perret, 92500 Rueil-Malmaison, France

Reçu le 22 novembre 2002 ; accepté le 9 décembre 2002

Présenté par Marcel Berger

---

### Résumé

Nous montrons comment donner à la théorie des hérissons (c'est-à-dire, des différences géométriques de corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) un caractère général. Nous montrons en particulier comment étendre la théorie aux polytopes pour lesquels nous étudions une notion d'hyperbolicité faible (resp. forte) dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour finir, nous considérons le problème de Minkowski généralisé. **Pour citer cet article :** Y. Martinez-Maure, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

We show how it is possible to give a general character to the theory of hedgehogs (i.e., of geometric differences of convex bodies of  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). In particular, we show how it is possible to extend the theory to polytopes for which we study notions of weak and strong hyperbolicity in  $\mathbb{R}^3$ . Finally, we consider the extension of the Minkowski Problem. **To cite this article :** Y. Martinez-Maure, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).

© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

---

### 1. Introduction

L'ensemble  $\mathcal{K}^{n+1}$  des corps convexes de l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^{n+1}$  peut être muni de l'addition de Minkowski et de la multiplication par les nombres réels  $\geq 0$ . Comme ces lois n'en font pas un espace vectoriel faute de soustraction, il est naturel d'envisager  $\mathcal{K}^{n+1}$  comme un cône convexe de son symétrisé pour l'addition, c'est-à-dire de l'espace vectoriel  $\mathcal{H}^{n+1}$  des différences formelles de corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . La théorie des hérissons consiste à : (1) considérer toute différence formelle de corps convexes comme une hypersurface ; (2) étendre le volume mixte  $V : (\mathcal{K}^{n+1})^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  en une forme  $(n+1)$ -linéaire symétrique sur  $\mathcal{H}^{n+1}$  ; (3) envisager la théorie de Brunn–Minkowski dans  $\mathcal{H}^{n+1}$ . L'intérêt de cette théorie peut être illustré par deux principes : (1) étudier les corps convexes en les décomposant en une somme de hérissons pour mettre leur structure en évidence ; (2) géométriser des problèmes d'analyse en considérant des fonctions réelles sur la sphère unité  $S^n$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  comme des fonctions

---

Adresse e-mail : [yves.martinez@esiea.fr](mailto:yves.martinez@esiea.fr) (Y. Martinez-Maure).

support de hérissos (ou d'hypersurfaces plus générales). Le premier de ces principes a par exemple permis d'infirmier une vieille caractérisation conjecturée de la sphère [5] et le second de donner une preuve géométrique du théorème de Sturm–Hurwitz [7]. Le lecteur trouvera d'autres applications de la théorie des hérissos dans [6].

Geppert avait proposé dès 1937 d'étendre la théorie de Brunn–Minkowski aux différences géométriques de corps convexes de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  [2] mais l'intérêt de cette extension ne semble pas avoir été perçu. En 1985, Langevin, Levitt et Rosenberg ont considéré une généralisation naturelle des corps convexes de classe  $C_+^2$  (i.e. de bord  $C^2$  et à courbure de Gauss  $> 0$ ) dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  [3]. Le bord d'un tel corps est déterminé par sa fonction support  $h \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$  comme enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation  $\langle x, u \rangle = h(u)$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire standard. Or, cette enveloppe est bien définie comme une hypersurface (éventuellement singulière) pour toute fonction  $h \in C^2(\mathbb{S}^n; \mathbb{R})$  (qu'elle soit la fonction support d'un corps convexe ou pas). Langevin, Levitt et Rosenberg appelèrent hérissos de telles enveloppes et ils observèrent que la théorie de Brunn–Minkowski pouvait être étendue à ces hérissos (de fonction support  $C^2$ ) [3]. L'auteur travaille depuis à cette extension [6]. Les hérissos (de fonction support  $C^2$ ) s'identifient aux différences formelles de corps convexes de classe  $C_+^2$ . Nous verrons comment donner un caractère général à la théorie en considérant des différences géométriques de corps convexes quelconques. Dans la Section 3, nous considérerons le cas des polytopes. Nous étudierons en particulier une notion de polytope hérisson faiblement (resp. fortement) hyperbolique dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans la Section 4, nous considérerons l'extension du problème de Minkowski.

## 2. Les hérissos

Les hérissos généraux de  $\mathbb{R}^{n+1}$  peuvent être définis par récurrence sur  $n$ . Pour le comprendre, rappelons que : (1) Tout corps convexe  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est déterminé par sa fonction support  $h_{\mathcal{K}}(u) = \sup\{\langle x, u \rangle \mid x \in \mathcal{K}\}$ ; (2) Pour tout  $u \in \mathbb{S}^n$ , l'ensemble support de  $\mathcal{K}$  de vecteur normal  $u$  est défini par  $\mathcal{K}_h^u = \{x \in \mathcal{K} \mid \langle x, u \rangle = h_{\mathcal{K}}(u)\}$  et peut s'écrire  $\{h_{\mathcal{K}}(u)u\} + K_h^u$ , où  $K_h^u$  est le convexe de  $u^\perp$  de fonction support  $h'_h(u; v) = \lim_{t \downarrow 0} [h_{\mathcal{K}}(u + tv) - h_{\mathcal{K}}(u)]/t$ ; (3) Le bord de  $\mathcal{K}$  est constitué de ses ensembles support  $\mathcal{K}_h^u$ ; (4) Additionner des corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  revient à additionner leurs ensembles support (resp. leurs fonctions support). Notre définition des hérissos va consister pour l'essentiel à remplacer les « ensembles support » par des « hérissos support ».

Notons  $\mathcal{H}^{n+1}$  le sous-espace vectoriel engendré par l'ensemble  $\mathcal{K}^{n+1}$  des fonctions support de corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dans l'espace des fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}^{n+1}$ . À toute fonction de  $\mathcal{H}^{n+1}$  (qui s'identifie à l'espace vectoriel des différences formelles de corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), nous associons une réalisation géométrique convenable en procédant par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  :

**Définitions.** Pour tout  $h \in \mathcal{H}^1$ , notons  $\mathcal{H}_h$  et appelons hérisson de fonction support  $h$ , le segment orienté  $[h(-1), h(1)]$ . Étant donné  $n \geq 1$ , supposons que la notion de hérisson de fonction support  $h \in \mathcal{H}^k$  a été définie pour  $k = n$ . Pour tout  $h \in \mathcal{H}^{n+1}$ , associons alors à chaque  $u \in \mathbb{S}^n$ , le hérisson  $H_h^u$  de  $u^\perp$  de fonction support  $h'(u; v) = \lim_{t \downarrow 0} [h(u + tv) - h(u)]/t$ . Notons  $\mathcal{H}_h$  et appelons hérisson de fonction support  $h$ , la donnée de l'ensemble des « hérissos support »  $\mathcal{H}_h^u = \{h(u)u\} + H_h^u$ , où  $u \in \mathbb{S}^n$ .

**Remarque 2.1.** Lorsque la restriction  $h_S$  de  $h$  à  $\mathbb{S}^n$  est  $C^1$ ,  $\mathcal{H}_h$  peut se voir comme l'enveloppe de la famille d'hyperplans d'équation  $\langle x, u \rangle = h_S(u)$ . L'application  $x_h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $u \mapsto (\nabla h)(u)$  en est alors une paramétrisation naturelle. Si  $h_S$  est  $C^2$ , elle s'interprète comme la réciproque de l'application de Gauss en ce sens qu'en tout point régulier  $x_h(u)$ , le vecteur  $u$  est normal à  $\mathcal{H}_h$ .

**Remarque 2.2.** Pour tout  $h \in \mathcal{H}^2$ ,  $\mathcal{H}_h$  définit une courbe rectifiable orientée de  $\mathbb{R}^2$  dont la longueur et l'aire algébriques sont respectivement définies par  $l(h) = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta$  et  $a(h) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (h(\theta)^2 - h'(\theta)^2) d\theta$ , où  $h(\theta) = h(\cos \theta, \sin \theta)$ . Notons que  $a(h)$  est aussi l'intégrale sur  $\mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$  de l'indice  $i_h(x)$  d'un point  $x \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{H}_h$  par rapport à la courbe orientée  $\mathcal{H}_h$ ; cela peut se vérifier en considérant  $a(h)$  comme une différence de deux aires.

On peut vérifier que  $i_h(x) = 1 - \frac{1}{2}n_h(x)$ , où  $n_h(x)$  est le nombre de droites support orientées de  $\mathcal{H}_h$  passant par  $x$ , i.e. le nombre de zéros de la fonction  $h_x : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto h(u) - \langle x, u \rangle$ . Naturellement,  $l(h)$  et  $a(h)$  sont la longueur et l'aire de  $\mathcal{H}_h$  si  $h \in \mathcal{K}^2$ .

### 3. Les polytopes hériçons

On appelle polyèdre (resp. polytope) convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$  toute intersection finie de demi-espaces fermés de  $\mathbb{R}^{n+1}$  (resp. tout polyèdre convexe borné de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ). Les polytopes convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  sont les corps convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dont la fonction support est linéaire par morceaux (relativement à une subdivision de  $\mathbb{R}^{n+1}$  en cônes polyédraux dont l'origine est le sommet). Nous appellerons polytope hériçon de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tout hériçon pouvant s'écrire comme une différence de deux polytopes convexes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , c'est-à-dire tout hériçon dont la fonction support est linéaire par morceaux. Dans cette Note, nous nous intéressons plus particulièrement aux polytopes hériçons de  $\mathbb{R}^3$  :

**Définitions.** Soit  $\mathcal{H}_h$  un polytope hériçon de  $\mathbb{R}^3$ . Pour tout  $u \in \mathbb{S}^2$ , l'union du hériçon support  $\mathcal{H}_h^u = \{h(u)u\} + H_h^u$  et de son intérieur  $\mathcal{I}_h^u = \{h(u)u\} + \{x \in u^\perp - H_h^u \mid i_{h'(u;\cdot)}(x) \neq 0\}$  est notée  $\mathcal{F}_h^u$  et appelée face de  $\mathcal{H}_h$  associée à  $u$  si  $\mathcal{I}_h^u \neq \emptyset$ . L'aire algébrique de  $\mathcal{H}_h$  est définie comme la somme des aires algébriques de ses faces, soit par  $a(h) = \sum_{u \in \mathcal{N}(h)} a_u(h)$ , où  $a_u(h) = a[h'(u;\cdot)]$  et  $\mathcal{N}(h) = \{u \in \mathbb{S}^2 \mid \mathcal{I}_h^u \neq \emptyset\}$ . Étant donné  $u \in \mathcal{N}(h)$ , tout  $h(u)u + x \in \mathcal{I}_h^u$  sera considéré comme un point de multiplicité  $|i_{h'(u;\cdot)}(x)|$  de  $\mathcal{F}_h^u$  où la normale à  $\mathcal{H}_h$  est dirigée par  $\text{sgn}[i_{h'(u;\cdot)}(x)]u$ , où  $\text{sgn}[t] = t/|t|$ . Cela permet de considérer  $\mathcal{H}_h$  comme une surface transalement orientée de  $\mathbb{R}^3$  dont le volume algébrique est défini par  $v(h) = \int_{\mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h} i_h(x) d\lambda(x)$ , où  $i_h(x)$  est le nombre algébrique d'intersection de presque toute demi-droite orientée d'origine  $x$  avec  $\mathcal{H}_h$  et  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque 3.1.** Le volume d'un polytope hériçon  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$  est donné par  $v(h) = \frac{1}{3} \sum_{u \in \mathcal{N}(h)} h(u)a_u(h)$ , comme pour tout polytope convexe de  $\mathbb{R}^3$ .

**Remarque 3.2.** Pour tout hériçon de fonction support  $C^2$  sur  $\mathbb{S}^2$  et tout polytope hériçon  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$ , nous avons  $i_h(x) = r_h^+(x) - r_h^-(x)$ , où  $r_h^-(x)$  (resp.  $r_h^+(x)$ ) est le nombre de régions maximales de  $\mathbb{S}^2$  où  $h_x : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto h(u) - \langle x, u \rangle$  est  $<0$  (resp.  $>0$ ). Notons que  $c_h(x) = r_h^-(x) + r_h^+(x) - 1$  est le nombre de courbes fermées simples formant  $h_x^{-1}(\{0\})$  sur  $\mathbb{S}^2$ . L'intérieur et l'intérieur apparent d'un polytope hériçon (resp. d'un hériçon de fonction support  $C^2$  sur  $\mathbb{S}^2$ )  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$  peuvent être définis par respectivement  $\mathcal{I}_h = \{x \in \mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h \mid i_h(x) \neq 0\}$  et  $\mathcal{J}_h = \{x \in \mathbb{R}^3 - \mathcal{H}_h \mid j_h(x) \neq 0\}$ , où  $j_h(x) = 1 - c_h(x)$ . Nous avons  $\mathcal{I}_h \subset \mathcal{J}_h$  et cette inclusion peut être stricte : considérer le hériçon de fonction support  $h(x, y, z) = z^3$ , où  $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

### 4. Polytopes faiblement (resp. fortement) hyperboliques

**Définition 4.1.** Soit  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$  un polytope hériçon et  $\mathcal{S}_h$  sa représentation sphérique, i.e. le graphe constitué des points  $u \in \mathbb{S}^2$  tels que  $h$  n'est pas linéaire au voisinage de  $u$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Supposons que pour tout couple  $(u, v) \in \mathcal{N}(h)^2$  de sommets adjacents de  $\mathcal{S}_h$ , nous avons  $u + v \neq 0$ . Nous dirons alors que  $\mathcal{H}_h$  est faiblement hyperbolique si ses hériçons support sont tous d'indice  $\leq 0$ , c'est-à-dire si :  $\forall u \in \mathcal{N}(h), \forall y = h(u)u + x \in \mathcal{I}_h^u, i_{h'(u;\cdot)}(x) < 0$ .

Une manière de concevoir des polytopes hériçons faiblement hyperboliques est de discrétiser des hériçons de fonction support  $C^2$  sur  $\mathbb{S}^2$  en réduisant chaque région elliptique à une arête. Les arêtes issues d'une région elliptique ont alors la particularité d'être représentées par un arc de cercle de longueur  $> \pi$  sur  $\mathbb{S}^2$  ; nous les qualifions d'elliptiques. La Fig. 1(a) représente la discrétisation d'un hériçon de révolution (à une région hyperbolique et deux régions elliptiques) en un polytope hériçon faiblement hyperbolique (à 6 sommets, 8 faces et 12 arêtes dont 2, en gras, sont elliptiques) symétrique par rapport à 3 droites orthogonales (dont l'axe de révolution). La Fig. 1(b) donne sa représentation sur  $\mathbb{S}^2$ . Un exemple très simple est donné par le « tétraèdre hyperbolique » de G. Panina [8].

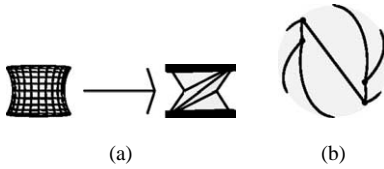


Fig. 1. Un exemple de polytope faiblement hyperbolique.

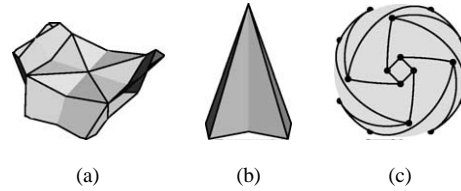


Fig. 2. Un exemple de polytope hérisson fortement hyperbolique.

**Définition 4.2.** Un polytope hérisson faiblement hyperbolique  $\mathcal{H}_h \subset \mathbb{R}^3$  est dit fortement hyperbolique s'il n'admet pas d'arête elliptique, i.e. si toutes ses arêtes sont représentées sur  $\mathbb{S}^2$  par un arc de grand-cercle de longueur  $< \pi$ .

**Théorème 4.3.** *Il existe un polytope hérisson de  $\mathbb{R}^3$  fortement hyperbolique.*

Un exemple de polytope hérisson fortement hyperbolique (à 14 sommets, 24 faces et 36 arêtes) peut en effet être obtenu par une discrétisation du contre-exemple construit dans [5]. Il est constitué d'une partie centrale (cf. Fig. 2(a)) et de 4 bonnets croisés (cf. Fig. 2(b)). Ce polytope est symétrique par rapport à deux plans orthogonaux (d'équation cartésienne  $x = 0$  et  $y = 0$ ) et deux droites orthogonales (d'équations  $x - y = z = 0$  et  $x + y = z = 0$ ). La Fig. 2(c) donne sa représentation sphérique vue d'un point de la droite d'équations  $x = y = 0$ .

## 5. Extension du problème de Minkowski

Le problème de Minkowski est la question de l'existence, de l'unicité et de la régularité d'une hypersurface convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de courbure de Gauss  $K$  (ou de mesure d'aire) prescrite sur  $\mathbb{S}^n$ . Le lecteur trouvera plus d'informations et un théorème d'existence, d'unicité et de régularité dans [1] et [9]. Ce problème peut être étendu aux hérissons de fonction support  $C^2$  sur  $\mathbb{S}^n$  car l'inverse de leur courbure de Gauss se prolonge par continuité à  $\mathbb{S}^n$ . Si  $K$  change de signe, il équivaut à la question des solutions d'une EDP de Monge–Ampère changeant de type sur  $\mathbb{S}^n$  (et non plus elliptique). La condition nécessaire  $\int_{\mathbb{S}^n} (1/K)(u)u \, du = 0$  n'assure plus l'existence d'une solution même si  $K$  change de signe « proprement » [4]. En outre, l'unicité de la solution éventuelle n'est plus assurée (considérer par exemple les hérissons  $f(u) = \exp(-1/z^2)$  et  $g(u) = \text{sgn}(z)f(u)$ , où  $u = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ). Le problème s'étend à des hérissons plus généraux en termes de mesure d'aire algébrique. Dans le cas des polytopes hérissons de  $\mathbb{R}^3$ , la condition nécessaire  $\sum_{u \in \mathcal{N}(h)} a_u(h)u = 0$  n'assure plus ni l'existence ni l'unicité de la solution. En revanche, le théorème d'existence et d'unicité peut être étendu aux hérissons plans les plus généraux en termes de mesure de longueur algébrique.

## Références

- [1] S.Y. Cheng, S.T. Yau, On the regularity of the  $n$ -Dimensional Minkowski Problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 29 (1976) 495–516.
- [2] H. Geppert, Über den Brunn–Minkowskischen Satz, *Math. Z.* 42 (1937) 238–254.
- [3] R. Langevin, G. Levitt, H. Rosenberg, Hérissons et multihérissons (enveloppes paramétrées par leur application de Gauss), in: *Singularities*, Warsaw, 1985, in: *Banach Center Publ.*, Vol. 20, PWN, Warsaw, 1988, pp. 245–253.
- [4] Y. Martinez-Maure, Hedgehogs and zonoids, *Adv. Math.* 158 (2001) 1–17.
- [5] Y. Martinez-Maure, Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* 332 (2001) 41–44.
- [6] Y. Martinez-Maure, La théorie des hérissons (différences géométriques de corps convexes) et ses applications, *Habilitation à Diriger des Recherches*, Univ. Paris 7, 2001.
- [7] Y. Martinez-Maure, Les multihérissons et le théorème de Sturm–Hurwitz, *Arch. Math.*, à paraître.
- [8] G. Panina, Virtual polytopes and some classical problems of geometry, *St. Petersburg Math. J.*, to appear.
- [9] A.V. Pogorelov, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, in: *Transl. Math. Monographs*, Vol. 35, American Mathematical Society, Providence, RI, 1969. Original russe.