Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 191–193

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Statistique/Probabilités

Loi limite et vitesse de convergence pour des séries géométriques aléatoires pondérées

Limit law and rate of clustering for geometrically weighted random series

George Stoica

Department of Mathematics, University of New Brunswick, PO Box 5050, Saint John NB, E2L 4L5, Canada

Reçu le 5 septembre 2002 ; accepté après révision le 16 décembre 2002

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

On étend les lois du logarithme itéré de Bovier–Picco–Zhang pour les séries géométriques aléatoires pondérées, et précisons la vitesse de convergence vers l'ensemble limite. ***Pour citer cet article : G. Stoica, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Abstract

We extend the Bovier–Picco–Zhang laws of the iterated logarithm for geometrically weighted random series, and give the rate of convergence towards the limit set. ***To cite this article: G. Stoica, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***

Soit $\{X_n;\ n \geqslant 0\}$ une suite des variables aléatoires réelles, indépendantes et centrées. Pour $0 < \beta < 1$, on associe à $\{X_n;\ n \geqslant 0\}$ la série géométrique aléatoire pondérée $S(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n X_n$.

Il est bien-connu (voir [3]) que, si X_n sont identiquement distribuées avec $EX_n^2 = 1$, et on note

$$S_1(\beta) := \frac{(1-\beta^2)^{1/2} S(\beta)}{\{2 \log\log(1/(1-\beta^2))\}^{1/2}},$$

alors on a la loi suivante du log itérée :

$$\mathcal{C}\bigl(\bigl\{S_1(\beta)\bigr\}\bigr) = [-1, 1] \quad \text{et} \quad \lim_{\beta \to 1^-} d\bigl(S_1(\beta), [-1, 1]\bigr) = 0 \quad \text{p.s.}, \tag{1}$$

où $\mathcal{C}(\{\cdot\})$ est l'ensemble limite de $\{\cdot\}$ lorsque $\beta \to 1^-$, et $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$.

Adresse e-mail : stoica@unbsj.ca (G. Stoica).

1631-073X/03/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00016-5

Il est également connu (voir [6]) que, si X_n sont gaussiennes et les covariances satisfont à la condition de Kolmogorov :

$$\sum_{n=0}^{\infty} EX_n^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{2n} EX_k^2\right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{n} EX_k^2\right) < +\infty \tag{2}$$

alors, si on note

$$S_2(\beta) := \frac{S(\beta)}{\{2\,\mathrm{Var}\,S(\beta)\log\log \mathrm{Var}\,S(\beta)\}^{1/2}},$$

on a la loi suivante du log itéré :

$$\mathcal{C}\big(\{S_2(\beta)\}\big) = [-1,1] \quad \text{et} \quad \lim_{\beta\to 1^-} d\big(S_2(\beta),[-1,1]\big) = 0 \quad \text{p.s.} \tag{3}$$

Dans cette Note nous allons décrire une loi du logarithme itéré qui étend (1) et (3), et précisons la vitesse de convergence vers les points limites. L'idée est de changer le temps dans $S(\beta)$ et de normaliser, telle que la série obtenue admet des queues asymptotiquement indépendantes lorsque $\beta \to 1^-$ et, en même temps, converge faiblement dans un espace de fonctions approprié.

Ainsi, pour $0 < \beta < 1$ et $0 \leqslant t \leqslant 1$, nous considérons la suite généralisée des processus

$$S_3(\beta,t) = \frac{1-(1-(1-\beta^2)t)^{1/2}}{(1-\beta)\{2\,\mathrm{Var}\,S(\beta)\log\log \mathrm{Var}\,S(\beta)\}^{1/2}} S\Big(\big(1-\big(1-\beta^2\big)t\big)^{1/2}\Big), \tag{4}$$

et notons

$$K(t) = \begin{cases} t^2 \lim\limits_{\beta\to 1^-} \dfrac{1}{\mathrm{Var}\,S(\beta)} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \big(1-\big(1-\beta^2\big)t\big)^n EX_n^2 & \text{si } t \neq 0,\\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Proposition 1. *Sous l'hypothèse* (2) *et si* X_n *sont gaussiennes alors, pour tout* $0 < t_0 \leqslant 1$, *on a*

$$\mathcal{C}\big(\{S_3(\beta,t_0)\}\big) = \big[-K(t_0)^{1/2}, K(t_0)^{1/2}\big] \quad \textit{et} \quad \lim_{\beta\to 1^-} d\big(S_3(\beta,t_0),\big[-K(t_0)^{1/2},K(t_0)^{1/2}\big]\big) = 0 \quad \textit{p.s.}$$

Remarque. (i) L'hypothèse « X_n gaussiennes » n'est pas une réstriction : on peut toujours approximer $S(\beta)$ par une nouvelle série géométrique de même poids, équivalente p.s. à $S(\beta)$, et avec les coefficients X_n gaussiens (voir [6]).

(ii) Même si $S(\beta)$ est continue pour tout $0 < \beta < 1$ lorsque X_n sont des v.a. i.i.d. symétriques de Bernoulli (ceci est bien-connu depuis Hartmann–Wintner), dans le cas général ce fait n'est plus vrai (voir l'explication dans [4]). En particulier, on ne peut pas éspérer une loi fonctionnelle à la Strassen–Carmona–Kôno pour $S_3(\beta,\cdot)$ dans l'espace des fonctions continues sur [0, 1], ni même dans le cas gaussien.

Exemples. (i) Si $X_0 = X_1 = 0$, $EX_n^2 = n(n-1)$ pour $n \geqslant 2$, et si on note

$$S_4(\beta) := \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{\{4\beta^4\log\log(2\beta^4/(1-\beta^2)^3)\}^{1/2}} S\Big(\big(1-(1-\beta^2)t_0\big)^{1/2}\Big), \tag{5}$$

alors, pour tout $0 < t_0 \leqslant 1$ fixé, on a la loi du log itérée : $\mathcal{C}(\{S_4(\beta)\}) = [-2t_0^{1/2}, 2t_0^{1/2}]$ et $\lim_{\beta\to 1^-} d(S_4(\beta), [-2t_0^{1/2}, 2t_0^{1/2}]) = 0$ p.s.

(ii) L'ensemble limite de

$$\frac{(1-\beta^2)^{1/2} S((1-(1-\beta^2)t_0)^{1/2})}{\{2\log\log(1/(1-\beta^2))\}^{1/2}}$$

est l'intervalle $[-t_0^{1/2}, t_0^{1/2}]$ p.s. au sens de la formule (1) lorsque X_n sont identiquement distribuées avec $EX_n^2 = 1$.

Idée de démonstration. La proposition (1) en résulte d'une *loi fonctionnelle locale* du logarithme itéré pour une sous-suite à temps discret de $S_3(\beta, \cdot)$, plus précisément $S_3^n(t) := S_3((1-\theta^n)^{1/2}, t)$, avec $0 < \theta < 1$ fixé. Cette sous-suite est asymptotiquement équicontinue p.s., et converge faiblement dans $l^\infty[0,1]$ au sens de Hoffmann–Jorgensen (voir [1]). Egalement, on a un résultat d'approximation forte entre $S_3^n(\cdot)$ et $S_3(\beta, \cdot)$; on peut donc s'appuyer sur les résultats de [2], Théorème 4.1.

Le résultat suivant résout le problème de la vitesse de convergence de S_3 vers les points limites dans la Proposition 1.

Proposition 2. *Sous l'hypothèse* (2), *pour tout* $0 < t_0 \leqslant 1$ *fixé et* $0 < a < t_0^{-1/2} K(t_0)$, *on a*

$$\lim_{\beta \to 1^-} \frac{\log P\{|S_3(\beta, t_0)| > a\}}{(1-\beta)\operatorname{Var} S(\beta) \log\log \operatorname{Var} S(\beta)} = -\frac{a^2}{K(t_0)}.$$

Exemples. (i) Si $X_0 = X_1 = 0$, $EX_n^2 = n(n-1)$ pour $n \geqslant 2$, et si $S_4(\beta)$ est donné par la formule (5) alors, pour $0 < a < 2t_0^{1/2}$, on a

$$\lim_{\beta \to 1^-} \frac{(1-\beta)^2 \log P\{|S_4(\beta)| > a\}}{\log\log(2\beta^4/(1-\beta^2)^3)} = -\frac{a^2}{4}.$$

(ii) Sous l'hypothèse (2) et pour $0 < a < 1$, on obtient alors la vitesse de convergence dans la formule (3) :

$$\lim_{\beta \to 1^-} \frac{\log P\{|S_2(\beta)| > a\}}{(1-\beta)\operatorname{Var} S(\beta) \log\log \operatorname{Var} S(\beta)} = -a^2.$$

(iii) Lorsque X_n sont identiqument distribuées avec $EX_n^2 = 1$, et pour $0 < a < 1$, on obtient la vitesse de convergence dans la formule (1) :

$$\lim_{\beta \to 1^-} \frac{\log P\{|S_1(\beta)| > a\}}{\log\log(1/(1-\beta^2))} = -\frac{a^2}{2}.$$

Idée de démonstration. La Proposition 2 s'appuie sur le principe de contraction appliqué à une version du principe de Gärtner–Ellis. Ceci est possible, car le critère de « régularité C^2 » (voir [5], Théorème 1.2) est satisfait. C'est à dire que la suite des fonctions génératrices associée à $S_3(\beta, t)$ converge uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ lorsque $\beta \to 1^-$ vers une fonction finie autour de zéro, ainsi que ses dérivées de 2^e ordre.

Références

[1] M. Arcones, Weak convergence of the row sums of a triangular array of empirical processes, in: E. Eberlein, M. Hahn, M. Talagrand (Eds.), High Dimensional Probability, in: Progr. Probab., Vol. 43, Birkhäuser, 1998, pp. 1–25.

[2] M. Arcones, E. Giné, On the law of the iterated logarithm for canonical U-statistics and processes, Stochastic Process. Appl. 58 (1995) 217–245.

[3] A. Bovier, P. Picco, A law of the iterated logarithm for random geometric series, Ann. Probab. 21 (1993) 168–184.

[4] B. Heinkel, Laws of large numbers and continuity of processes, in: E. Eberlein, M. Hahn, M. Talagrand (Eds.), High Dimensional Probability, in: Progr. Probab., Vol. 43, Birkhäuser, 1998, pp. 145–149.

[5] L.M. Wu, Moderate deviations of dependent random variables related to CLT, Ann. Probab. 23 (1995) 420–445.

[6] L.X. Zhang, Strong approximation theorems for geometrically weighted series and their applications, Ann. Probab. 25 (1997) 1621–1635.