Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 107–110

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Logique

Tournois infinis et critiques

Critical and infinite tournaments

Imed Boudabbous

Département des méthodes quantitatives, Faculté des sciences économiques et de gestion de Sfax, BP 1088, Université de Sfax, 3018 Sfax, Tunisie

Reçu le 25 novembre 2002 ; accepté le 2 décembre 2002

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, une partie X de S est un intervalle de T lorsque pour tous $a, b \in X$ et $x \in S - X$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ $(x \in S)$ et S sont des intervalles de T, appelés intervalles triviaux. Un tournoi dont tous les intervalles sont triviaux est dit indécomposable ; sinon, il est décomposable. Un tournoi $T = (S, A)$ indécomposable est alors critique lorsque pour tout $x \in S$, $T(S - \{x\})$ est décomposable et lorsqu'il existe $x \neq y \in S$ tels que $T(S - \{x, y\})$ est indécomposable. Nous introduisons l'opération d'expansion qui nous permet de décrire un procédé de construction des tournois infinis et critiques. Il en découle que pour tout tournoi $T = (S, A)$ infini et critique, il existe $x \neq y \in S$ tels que T et $T(S - \{x, y\})$ sont isomorphes. ***Pour citer cet article : I. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***
© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Given a tournament $T = (V, A)$, a subset X of V is an interval of T provided that for every $a, b \in X$ and $x \in V - X$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$. For example, $\emptyset$, $\{x\}$ $(x \in V)$ and V are intervals of T, called trivial intervals. A tournament all the intervals of which are trivial is called indecomposable; otherwise, it is decomposable. An indecomposable tournament $T = (V, A)$ is then said to be critical if for each $x \in V$, $T(V - \{x\})$ is decomposable and if there are $x \neq y \in V$ such that $T(V - \{x, y\})$ is indecomposable. We introduce the operation of expansion which allows us to describe a process of construction of critical and infinite tournaments. It follows that, for every critical and infinite tournament $T = (V, A)$, there are $x \neq y \in V$ such that T and $T(V - \{x, y\})$ are isomorphic. ***To cite this article: I. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003).***
© 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

1. Introduction

1.1. Définitions

Un *graphe orienté* $G = (S, A)$ est constitué d'un ensemble S de *sommets* de G et d'un ensemble A de couples de sommets distincts, appelés *arêtes* de G. Si X est une partie de S, alors le graphe orienté $[X, A \cap (X \times X)]$ est

Adresse e-mail : Imed.Boudabbous@fsegs.rnu.tn (I. Boudabbous).

1631-073X/03/$ – see front matter © 2003 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/S1631-073X(03)00002-5

noté $G(X)$ et appelé *sous-graphe* de G *induit* par X. À chaque graphe orienté $G=(S,A)$ est associé son dual $G^\star=(S,A^\star)$ défini comme suit : pour tous $x\neq y\in S$, $(x,y)\in A^\star$ si $(y,x)\in A$. Un sommet x de $G=(S,A)$ est *absorbant* si pour tout $y\in S$, avec $y\neq x$, $(y,x)\in A$; il est *absorbé* si pour tout $y\in S$, avec $y\neq x$, $(x,y)\in A(G)$. Un graphe orienté $G=(S,A)$ est *complet* si pour tous $x\neq y\in S$, $(x,y)\in A$ ou $(y,x)\in A$. Un *tournoi* $T=(S,A)$ est un graphe orienté complet tel que pour tous $x\neq y\in S$, si $(x,y)\in A$, alors $(y,x)\notin A$.

Un *graphe non orienté* $H=(S,A)$ est constitué d'un ensemble S de *sommets* de H et d'un ensemble A de paires de sommets, appelés *arêtes* (non orientées) de H. Pour tout x de S, notons $V_H(x)$ l'ensemble des *voisins* de x dans H, c'est-à-dire, des sommets y de H tels que $\{x,y\}\in A$. Un sommet x est *isolé* s'il n'a aucun voisin et l'ensemble des sommets isolés de H est noté $I(H)$. Par ailleurs, définissons une relation d'équivalence R sur S comme suit : pour tous $x\neq y\in S$, xRy lorsqu'il existe une suite d'éléments $x_0=x,\dots,x_n=y$ de S telle que pour tout $i\in\{0,\dots,n-1\}$, $\{x_i,x_{i+1}\}\in A$. Les classes d'équivalence de R sont appelées *composantes connexes* de H.

À tout graphe orienté $G=(S,A)$ est associé un graphe non orienté $\mathrm{Sym}(G)=(S,B)$ défini par : pour tous $x\neq y\in S$, $\{x,y\}\in B$ si $(x,y)\in A$ et $(y,x)\in A$. Un graphe orienté G est *coupleur* lorsque $\mathrm{Sym}(G)$ admet au moins un sommet non isolé et lorsque les arêtes de Sym(G) sont mutuellement disjointes.

1.2. Graphes indécomposables

Étant donné un graphe orienté $G=(S,A)$, une partie X de S est un *intervalle* de G lorsque pour tous $a,b\in X$ et $x\in S-X$, $(a,x)\in A$ si et seulement si $(b,x)\in A$ et $(x,a)\in A$ si et seulement si $(x,b)\in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ ($x\in S$) et S sont des intervalles de G, appelés intervalles *triviaux*. Un graphe orienté dont tous les intervalles sont triviaux est dit *indécomposable* ; sinon, il est *décomposable*. Il découle de [1,5] que si $G=(S,A)$ est un graphe fini, orienté et indécomposable, alors il existe $x\in S$ tel que $G(S-\{x\})$ est indécomposable ou il existe $x\neq y\in S$ tels que $G(S-\{x,y\})$ est indécomposable. Un sommet x d'un graphe $G=(S,A)$ fini ou infini, orienté et indécomposable est alors *critique* si $G(S-\{x\})$ est décomposable. Revenons à un graphe $G=(S,A)$ fini, orienté et indécomposable. Afin de montrer qu'il existe toujours $x\neq y\in S$ tels que $G(S-\{x,y\})$ est indécomposable, Schmerl et Trotter [4] ont caractérisé les graphes finis, orientés et indécomposables dont tous les sommets sont critiques. Dans le cas particulier des tournois, ils ont obtenu les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} définis sur $\{0,\dots,2n\}$ comme suit. Pour tout $n>0$, $T_{2n+1}(\{0,\dots,n\})=U_{2n+1}(\{0,\dots,n\})=0<\dots<n$ et $T_{2n+1}(\{n+1,\dots,2n\})=(U_{2n+1})^\star(\{n+1,\dots,2n\})=n+1<\dots<2n$. De plus, pour tout $i\in\{0,\dots,n-1\}$, si $j\in\{i+1,\dots,n\}$ et si $k\in\{0,\dots,i\}$, alors $(j,i+n+1)$ et $(i+n+1,k)$ sont des arêtes de T_{2n+1} et de U_{2n+1}. Enfin, $V_{2n+1}(\{0,\dots,2n-1\})=0<\dots<2n-1$ et pour tout $i\in\{0,\dots,n-1\}$, $(2i+1,2n)$ et $(2n,2i)$ sont des arêtes de V_{2n+1}.

1.3. Graphes infinis et indécomposables

Seules les deux propositions suivantes traitent spécifiquement des graphes infinis, orientés et indécomposables.

Proposition 1 [2]. *Étant donné un graphe $G=(S,A)$ infini et orienté, G est indécomposable si et seulement si pour chaque partie finie X de S, il existe une partie finie Y de S contenant X et telle que $G(X)$ est indécomposable.*

Proposition 2 [3]. *Pour tout graphe $G=(S,A)$ infini, orienté et indécomposable, il existe une partie stricte X de S, équipotente à S et telle que $G(X)$ est indécomposable.*

Ce dernier résultat nous conduit à considérer les graphes infinis, orientés et indécomposables et, plus particulièrement, les tournois $T=(S,A)$ infinis et indécomposables qui admettent une partie finie non vide F de S telle que $T(S-F)$ est indécomposable, ou encore d'après [1], tels qu'il existe $x,y\in S$ avec $T(S-\{x,y\})$ est indécomposable. Nous prolongeons l'étude de Schmerl et Trotter [4] au cas infini en nous restreignant aux tournois T infinis et *critiques*, c'est-à-dire, aux tournois $T=(S,A)$ infinis, indécomposables, dont tous les sommets sont critiques et pour lesquels il existe $x\neq y\in S$ tels que $T(S-\{x,y\})$ est indécomposable.

1.4. Expansion

Considérons un graphe coupleur $G=(S,A)$. Associons à chaque sommet x de G un ensemble non vide S_x et supposons que $S_x=\{x\}$ si x est un sommet isolé de $\mathrm{Sym}(G)$ et que les S_x sont mutuellement disjoints. De plus, à chaque arête $\{x,y\}$ de $\mathrm{Sym}(G)$ est associé un graphe $G_{\{x,y\}}$ défini sur $S_x\cup S_y$. L'*expansion* de G par les $G_{\{x,y\}}$ est le graphe $\widetilde{G}$ défini sur la réunion des S_x de la façon suivante. Soient x et y des sommets distincts de G. Si $\{x,y\}$ est une arête de $\mathrm{Sym}(G)$, alors $\widetilde{G}(S_x\cup S_y)=G_{\{x,y\}}$. Sinon, pour tous $u\in S_x$ et $v\in S_y$, (u,v) est une arête de $\widetilde{G}$ si (x,y) est une arête de G.

Le but de cette note est de montrer qu'un tournoi infini et critique est une expansion d'un graphe coupleur G, qui est indécomposable et pour lequel les sommets isolés de $\mathrm{Sym}(G)$ sont critiques, par des tournois de type ω (l'ordre usuel sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels), $\omega^\star$, $\omega^\star+\omega$ (l'ordre usuel sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs), $T_{\mathbb{Z}}$, $U_{\mathbb{Z}}$, $U_{\mathbb{N}}$ ou $(U_{\mathbb{N}})^\star$. Les tournois $T_{\mathbb{Z}}$, $U_{\mathbb{Z}}$ et $U_{\mathbb{N}}$ sont les généralisations suivantes dans le cas infini de T_{2n+1} et U_{2n+1}. Les tournois $T_{\mathbb{Z}}$ et $U_{\mathbb{Z}}$ sont définis sur $\mathbb{Z}$ et $T_{\mathbb{Z}}(\{2n;n\in\mathbb{Z}\})=U_{\mathbb{Z}}(\{2n;n\in\mathbb{Z}\})$ (resp. $T_{\mathbb{Z}}(\{2n+1;n\in\mathbb{Z}\})=(U_{\mathbb{Z}})^\star(\{2n+1;n\in\mathbb{Z}\})$) est l'ordre usuel sur $\{2n;n\in\mathbb{Z}\}$ (resp. $\{2n+1;n\in\mathbb{Z}\}$). De plus, pour tous $i,j,k\in\mathbb{Z}$, si $i\leqslant k<j$, alors $(2k+1,2i)$ et $(2j,2k+1)$ sont des arêtes de $T_{\mathbb{Z}}$ et de $U_{\mathbb{Z}}$. Enfin, $U_{\mathbb{N}}$ est le sous-tournoi de $U_{\mathbb{Z}}$ induit par $\mathbb{N}$.

2. Préliminaires

De même que Schmerl et Trotter [4], associons à chaque tournoi $T=(S,A)$ infini et critique son graphe non orienté d'indécomposabilité $\mathcal{I}(T)$ défini sur S par : pour tous $x\neq y\in S$, $\{x,y\}$ est une arête de $\mathcal{I}(T)$ si $T(S-\{x,y\})$ est indécomposable. Rappelons, tout d'abord, les propriétés remarquables des voisinages des sommets de $\mathcal{I}(T)$.

Lemme 1 [4]. *Étant donné un tournoi $T=(S,A)$ infini et critique, pour tout sommet x de $\mathcal{I}(T)$, $|V_{\mathcal{I}(T)}(x)|\leqslant 2$. De plus, pour tous $x\neq y\in S$, si $V_{\mathcal{I}(T)}(x)=\{y\}$, alors $S-\{x,y\}$ est un intervalle de $T(S-\{x\})$, et si $V_{\mathcal{I}(T)}(x)=\{y,z\}$, alors $\{y,z\}$ est un intervalle de $T(S-\{x\})$.*

Il s'ensuit que pour toute composante connexe infinie D de $\mathcal{I}(T)$, $\mathcal{I}(T)(D)$ est un chemin infini de type $P_{\mathbb{N}}=(\mathbb{N},\{\{i,j\}\colon\ |i-j|=1\})$ ou $P_{\mathbb{Z}}=(\mathbb{Z},\{\{i,j\}\colon\ |i-j|=1\})$, et que pour toute composante connexe finie D de $\mathcal{I}(T)$, $\mathcal{I}(T)(D)$ est un chemin $P_{|D|}=(\{0,\dots,|D|-1\},\{\{i,i+1\};\ 0\leqslant i\leqslant |D|-2\})$ ou un cycle $C_{|D|}=(\{0,\dots,|D|-1\},\{\{i,i+1\};0\leqslant i\leqslant |D|-2\}\cup\{\{0,|D|-1\}\})$.

Proposition 3. *Étant donné un tournoi T infini et critique, considérons une composante connexe D de $\mathcal{I}(T)$. Si D est finie, alors $|D|=1$. Par ailleurs, si $\mathcal{I}(T)(D)$ est isomorphe à $P_{\mathbb{N}}$, alors $T(D)$ est isomorphe à ω, $\omega^\star$, $U_{\mathbb{N}}$ ou $(U_{\mathbb{N}})^\star$. Enfin, si $\mathcal{I}(T)(D)$ est isomorphe à $P_{\mathbb{Z}}$, alors $T(D)$ est isomorphe à $\omega^\star+\omega$, $T_{\mathbb{Z}}$ ou $U_{\mathbb{Z}}$.*

3. Caractérisation des tournois infinis et critiques

Associons à un tournoi $T=(S,A)$ infini et critique un graphe $\mathcal{C}(T)$ de la façon suivante. Remarquons, tout d'abord, que, par la Proposition 3, pour toute composante D de $\mathcal{I}(T)$, si $\mathcal{I}(T)(D)=(\{d_n;n\in\mathbb{N}\},\{\{d_i,d_j\}\colon |i-j|=1\})$, alors la fonction $f_D:\mathbb{N}\to D$, qui associe d_i à tout $i\in\mathbb{N}$, est un isomorphisme de ω, $\omega^\star$, $U_{\mathbb{N}}$ ou $(U_{\mathbb{N}})^\star$ sur $T(D)$. De même, si $\mathcal{I}(T)(D)=(\{d_n;n\in\mathbb{Z}\},\{\{d_i,d_j\}\colon\ |i-j|=1\})$, alors la fonction $f_D:\mathbb{Z}\to D$, qui associe d_i à tout $i\in\mathbb{Z}$, est un isomorphisme de $\omega^\star+\omega$, $T_{\mathbb{Z}}$ ou $U_{\mathbb{Z}}$ sur $T(D)$. Dans les deux cas précédents, définissons $D^+=\{d_{2n},n\in\mathbb{N}\text{ (ou }\mathbb{Z})\}$ et $D^-=\{d_{2n+1},n\in\mathbb{N}\text{ (ou }\mathbb{Z})\}$. Le graphe $\mathcal{C}(T)$ est alors défini comme suit sur la réunion de $I[\mathcal{I}(T)]$ et des $\{D^-,D^+\}$, où D est une composante connexe infinie de $\mathcal{I}(T)$.

Pour toute composante connexe infinie D de $\mathcal{I}(T)$, (D^-, D^+) et (D^+, D^-) sont des arêtes de $\mathcal{C}(T)$. De plus, $\mathcal{C}(T)(I[\mathcal{I}(T)]) = T(I[\mathcal{I}(T)])$. Par ailleurs, considérons un sommet isolé x de $\mathcal{I}(T)$ et une composante connexe infinie D de $\mathcal{I}(T)$. Pour $X = D^+$ ou D^-, comme X est un intervalle de $T(X \cup \{x\})$, ou bien pour tout $x' \in X$, $(x', x) \in A$ ou bien pour tout $x' \in X$, $(x, x') \in A$. Dans le premier cas, (X, x) est une arête de $\mathcal{C}(T)$ et, dans le second, (x, X) est une arête de $\mathcal{C}(T)$. Enfin, considérons des composantes infinies $D \neq E$ de $\mathcal{I}(T)$. Pour $X = D^-$ ou D^+ et $Y = E^-$ ou E^+, comme X et Y sont des intervalles de $T(X \cup Y)$, ou bien pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $(x, y) \in A$, ou bien pour tous $x \in X$ et $y \in Y$, $(y, x) \in A$. Dans le premier cas, (X, Y) est une arête de $\mathcal{C}(T)$ et, dans le second, (Y, X) est une arête de $\mathcal{C}(T)$. Le graphe $\mathcal{C}(T)$ ainsi défini est coupleur.

Afin d'énoncer le premier théorème, nous introduisons les deux généralisations suivantes $V_{\mathbb{N}}$ et $V_{\mathbb{Z}}$ de V_{2n+1} dans le cas infini, définies respectivement sur $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ par : $V_{\mathbb{N}}(\mathbb{N})$ (resp. $V_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$) est l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) ; pour tout $n \in \mathbb{N}$ (resp. $n \in \mathbb{Z}$), $(2n+1, \infty)$ et $(\infty, 2n)$ sont des arêtes de $V_{\mathbb{N}}$ (resp. $(2n+1, \infty)$ et $(\infty, 2n)$ sont des arêtes de $V_{\mathbb{Z}}$).

Théorème 1. *Étant donné un tournoi T infini et critique, $\mathcal{C}(T)$ est un graphe coupleur indécomposable et si T n'est pas isomorphe à $V_{\mathbb{N}}$, $(V_{\mathbb{N}})^\star$ ou $V_{\mathbb{Z}}$, alors tout sommet isolé de $\mathcal{I}(T)$ est un sommet critique de $\mathcal{C}(T)$. De plus, T est l'expansion de $\mathcal{C}(T)$ obtenue de la façon suivante : pour tout sommet isolé x de $\mathcal{I}(T)$, $S_x = \{x\}$; pour toute composante connexe infinie D de $\mathcal{I}(T)$ et pour $X = D^-$ ou D^+, $S_X = X$; pour toute composante connexe infinie D de $\mathcal{I}(T)$, $G_{\{D^-, D^+\}} = T(D)$. Enfin, pour toute composante connexe infinie D de $\mathcal{I}(T)$, si $T(D)$ est isomorphe à ω ou $(U_{\mathbb{N}})^\star$ (resp. $\omega^\star$ ou $U_{\mathbb{N}}$), alors D^- est un sommet absorbé (resp. absorbant) de $\mathcal{C}(T)$.*

Inversement, considérons un graphe $G = (S, A)$ coupleur et indécomposable. Associons à chaque arête $\{x, y\}$ de $\mathrm{Sym}(G)$ un tournoi $T_{\{x,y\}}$ tel qu'il existe un isomorphisme $f_{\{x,y\}}$ de $T_{\{x,y\}}$ sur ω, $\omega^\star$, $U_{\mathbb{N}}$, $(U_{\mathbb{N}})^\star$, $\omega^\star + \omega$, $T_{\mathbb{Z}}$ ou $U_{\mathbb{Z}}$, et posons $G_{\{x,y\}} = T_{\{x,y\}}$. Pour tout sommet isolé x de $\mathrm{Sym}(G)$, posons $S_x = \{x\}$ et pour toute arête $\{x, y\}$ de $\mathrm{Sym}(G)$, posons $S_x = f^{-1}_{\{x,y\}}(\{2n;\ n \in \mathbb{N} \text{ (ou } \mathbb{Z})\})$ et $S_y = f^{-1}_{\{x,y\}}(\{2n+1;\ n \in \mathbb{N} \text{ (ou } \mathbb{Z})\})$. Par ailleurs, supposons que tout sommet isolé de $\mathrm{Sym}(G)$ est un sommet critique de G. Enfin, pour toute arête $\{x, y\}$ de $\mathrm{Sym}(G)$, si $f_{\{x,y\}}$ est un isomorphisme de $T_{\{x,y\}}$ sur ω ou $(U_{\mathbb{N}})^\star$ (resp. $\omega^\star$ ou $U_{\mathbb{N}}$), alors supposons que y est un sommet absorbé (resp. absorbant) de G. Notons, alors, $\mathcal{T}(G)$ l'expansion de G par les $G_{\{x,y\}}$.

Théorème 2. *Le graphe orienté $\mathcal{T}(G)$ est un tournoi infini et critique.*

Ce théorème peut s'étendre lorsque $G = (\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, x), (x, z), (z, y)\})$. Pour que $\mathcal{T}(G)$ soit infini et critique, il faut et il suffit que $T_{\{x,y\}}$ soit isomorphe à ω, $\omega^\star$ ou $\omega^\star + \omega$. Le tournoi $\mathcal{T}(G)$ est alors isomorphe respectivement à $V_{\mathbb{N}}$, $(V_{\mathbb{N}})^\star$ ou $V_{\mathbb{Z}}$.

Dans le cas fini, pour tout $n > 0$ et pour $W = T, U$ ou V, on peut vérifier qu'il existe $x \neq y \in \{0, \ldots, 2n\}$ tels que $W_{2n+1}(\{0, \ldots, 2n\} - \{x, y\}] = W_{2n-1}$. Cette propriété s'étend aux tournois infinis en utilisant les deux théorèmes précédents.

Corollaire 1. *Étant donné un tournoi $T = (S, A)$ infini et critique, il existe des sommets x et y de T tels que $T(S - \{x, y\})$ est isomorphe à T. Par ailleurs, pour tous $x \neq y \in S$, $T(S - \{x, y\})$ est indécomposable si et seulement si $T(S - \{x, y\})$ est isomorphe à T.*

Références

[1] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is here ditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.
[2] P. Ille, Graphes indécomposables infinis, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 318 (1994) 499–503.
[3] L. Rigollet, S. Thomassé, Relations infinies indécomposables critiques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997) 249–252.
[4] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.
[5] D.P. Sumner, Graphs indecomposable with respect to the X-join, Discrete Math. 6 (1973) 281–298.