C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 989–992

Combinatoire/*Combinatorics*

L'indice d'un tour du cavalier

Alain Grigis

Université Paris 13, Département de mathématiques, CNRS–UMR 7539, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 4 septembre 2002 ; accepté après révision le 23 octobre 2002

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé Nous définissons un indice topologique pour un tour du cavalier sur un échiquier. A cet effet nous montrons que le graphe du cavalier se plonge naturellement dans le produit d'un carré par un tore de dimension deux. D'autre part nous exhibons d'autres symétries du graphe du cavalier sur un échiquier 10×10 torique. ***Pour citer cet article : A. Grigis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 989–992.***

The index for the knight's tour

Abstract We define a topological index for the knight's tour on a chessboard. In fact we show that the knight's graph can be immerged in the product of a square by a two-dimensional torus. We also point out new extra symmetries of the knight's graph on a 10×10 toric chessboard. ***To cite this article: A. Grigis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 989–992.***

1. Introduction

Le problème du tour de cavalier consiste à faire parcourir à un cavalier les 64 cases de l'échiquier sans repasser deux fois à la même place. Un tour est dit réentrant s'il est possible de ressauter en un coup de la soixante-quatrième case à la première. En termes de théorie des graphes le problème s'interprète ainsi. Nous appellerons graphe du cavalier le graphe dont les sommets sont les 64 cases de l'échiquier et dont deux sommets sont joints par une arête si le cavalier peut passer d'une case à l'autre en un coup. Le problème du tour de cavalier réentrant consiste à trouver un circuit hamiltonien pour ce graphe. On peut généraliser ce problème en considérant des échiquiers carrés ou même rectangulaires de diverses tailles. Pour qu'il existe un tour réentrant sur un échiquier $n \times m$ il est nécessaire que n et m ne soient pas tous les deux impairs. On peut aussi considérer des échiquiers cylindriques ou toriques en identifiant des côtés opposés de l'échiquier. Le graphe du cavalier sur l'échiquier est un sous-graphe du graphe de l'échiquier cylindrique ou de l'échiquier torique. Il est donc plus facile de trouver un tour du cavalier sur l'échiquier cylindrique ou torique. Par exemple il n'existe pas de tour réentrant sur les échiquiers 4×4 et 5×5 mais il en existe un sur l'échiquier torique 4×4 et un sur l'échiquier cylindrique 5×5.

Le problème du tour du cavalier est connu depuis au moins 2000 ans en Inde. Il a aussi été considéré par les mathématiciens arabes. Euler [1] lui a consacré un mémoire célèbre. Vandermonde [4] a aussi donné une construction d'un tour. Pour connaître l'état de la question, le lecteur pourra consulter [3] ou le site internet de G. Jelliss (http://www.ktn.freeuk.com). Pour un échiquier 6×6 la liste des solutions est connue, pour un échiquier 8×8, il y a plusieurs trillions de solutions.

Adresse e-mail : grigis@math.univ-paris13.fr (A. Grigis).

S1631-073X(02)02618-3/FLA

Dans cette Note, nous donnons une description géométrique du graphe du cavalier et nous le plongeons dans une variété de dimension quatre. Un tour de cavalier réentrant est donc un lacet sur cette variété. Ceci nous permet de définir l'indice d'un tour de cavalier. Cet indice, élémentaire à calculer, permet de classifier les tours de cavalier. Nous étudions aussi les symétries du graphe ; en général il y a seulement les symétries ordinaires de l'échiquier carré ou rectangulaire. Mais nous montrons que pour le graphe du cavalier sur l'échiquier 10×10 torique il y a d'autres symétries.

L'idée de projeter des objets de dimension quatre sur l'échiquier apparaît déjà dans [2].

2. La géométrie du graphe du cavalier

Soit le réseau $\mathbb{Z}^2$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sa base canonique. Les cases d'un échiquier rectangulaire $n \times m$ s'identifient aux points de $I \times J = [0, n[\times[0, m[$. Celles d'un échiquier cylindrique s'identifient aux points de $I \times \mathbb{T} = [0, n[\times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$ et celles d'un échiquier torique aux points de $\mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}}$.

Soit (a, b) une case d'un échiquier. Par un saut de cavalier on peut atteindre celles des 8 cases suivantes qui sont dans l'échiquier $(a, b) \pm f_j$, $1 \leqslant j \leqslant 4$, où

$$f_1 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad f_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad f_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \quad f_4 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2. \tag{2.1}$$

Toutes les arêtes du graphe du cavalier ont donc pour longueur $\sqrt{5}$ et sont parallèles à l'un des vecteurs f_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$.

Si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est la base canonique de $\mathbb{Z}^4$ considérons le sous-réseau Γ de $\mathbb{Z}^4$ engendré par les vecteurs :

$$e_1 = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4, \tag{2.2}$$

$$e_2 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4, \tag{2.3}$$

$$e_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_4, \tag{2.4}$$

$$e_4 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_4. \tag{2.5}$$

On remarque que les vecteurs e_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$, sont tous de longueur $\sqrt{10}$ et qu'ils forment une base orthogonale. D'autre part e_j se projette sur f_j par la projection orthogonale π_1 de $\mathbb{R}^4$ sur l'espace $\mathbb{R}^2_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$.

Soit G le graphe dont les sommets sont les points de Γ et tel que deux sommets distants de $\sqrt{10}$ soient joints par une arête. Autrement dit on considère le pavage de $\mathbb{R}^4$ par des hypercubes de sommets sur Γ et le graphe constitué par les arêtes de ces hypercubes.

La projection $\pi_1(G)$ sur $\mathbb{R}^2$ est le graphe du cavalier sur l'échiquier infini $\mathbb{Z}^2$. En effet π_1 envoie Γ sur $\mathbb{Z}^2$ et $\pi_1(e_j) = f_j$. Par exemple l'hypercube de base se projette sur une belle figure appelée hypercube des cavaliers.

Le noyau de la projection π_1 de Γ sur $\mathbb{Z}^2$ est le réseau bidimensionnel Λ engendré par

$$10\varepsilon_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4, \tag{2.6}$$

$$10\varepsilon_4 = e_1 + e_2 - 2e_3 + 2e_4. \tag{2.7}$$

Les translations de Λ agissent sur le graphe G, et on peut donc considérer le graphe G/Λ qui est plongé dans la variété $\mathbb{R}^4/\Lambda$. On a obtenu la

PROPOSITION 2.1. – *Le graphe G/Λ est isomorphe au graphe du cavalier sur l'échiquier infini $\mathbb{Z}^2$. Si Λ' est un réseau de $\mathbb{Z}^2$ le graphe du cavalier sur l'échiquier torique $\mathbb{Z}^2/\Lambda'$ est isomorphe au graphe $G/(\Lambda' \times \Lambda)$ qui se plonge dans le tore de dimension* 4 : $\mathbb{R}^4/(\Lambda' \times \Lambda)$. *Le graphe du cavalier sur l'échiquier $I \times J$ est isomorphe à la partie du graphe G/Λ contenue dans $\pi_1^{-1}(I \times J)$. C'est bien sûr un sous-graphe du graphe du cavalier sur l'échiquier torique. Il se plonge dans le produit d'un rectangle par un tore bidimensionnel :* $I \times J \times (\mathbb{R}^2/\Lambda)$.

Pour citer cet article : A. Grigis, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 989–992

3. L'indice d'un tour du cavalier

Considérons maintenant un tour du cavalier réentrant. Il s'identifie à un circuit hamiltonien sur le graphe et à un lacet sur la variété V de dimension 4 où ce graphe est plongé. Ce lacet est dans une classe d'homotopie de la variété V, ce qui nous permet de définir un indice. En effet, le tour se relève en un chemin sur G d'origine M et d'extrémité $M+\lambda$, $\lambda \in \Lambda$.

DÉFINITION 3.1. – L'indice d'un tour du cavalier réentrant sur un échiquier est l'élément de Λ qui s'identifie à la classe d'homotopie du lacet de V qui se projette sur le tour.

Pour fixer les idées, plaçons nous sur l'échiquier 8×8. On peut décrire un tour du cavalier réentrant partant de la case (a,b) par une somme $\pm f_{i_1} \pm f_{i_2} \pm \cdots \pm f_{i_{64}}$.On considère la somme des e_{j_k} correspondants. Le résultat de cette somme est un élément du réseau Λ c'est-à-dire de la forme $n_3 10\varepsilon_3 + n_4 10\varepsilon_4 = n_3(2e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4) + n_4(e_1 + e_2 - 2e_3 + 2e_4)$ avec n_3 et n_4 dans $\mathbb{Z}$.

Il est naturel de choisir comme base de Λ les vecteurs non nuls de longueur minimale. Si on fait agir le groupe des symétries de l'échiquier carré, on voit que les 8 choix de base sont équivalents. Par contre, pour un échiquier rectangulaire, les deux lacets de base ne sont plus interchangeables par une symétrie. Cela justifie la définition du type du tour de cavalier sur un échiquier rectangulaire comme le couple d'entiers $(|n_3|, |n_4|)$ et sur un échiquier carré comme le couple $(\max(|n_3|, |n_4|), \min(|n_3|, |n_4|))$.

Pour les échiquiers toriques le graphe est isomorphe à $G/(\Lambda' \times \Lambda)$ qui est plongé dans V, qui est alors un tore de dimension 4. On donnera donc la

DÉFINITION 3.2. – L'indice d'un tour du cavalier réentrant sur un échiquier torique $\mathbb{Z}^2/\Lambda'$ est l'élément de $\Lambda' \times \Lambda$ qui s'identifie à la classe d'homotopie du lacet de V qui se projette sur le tour.

Si on choisit une base de $\Lambda' \times \Lambda$ cet indice sera noté par un quadruplet d'entiers relatifs.

On peut remarquer que l'indice est défini aussi pour un lacet, c'est-à-dire une trajectoire fermée du cavalier qui ne passe pas forcément une fois et une seule sur chaque case de l'échiquier. En pratique, il est très facile de calculer le type d'un tour de cavalier réentrant. Par exemple le tour de Vandermonde est de type $(0,0)$ et le frontispice de dalla Volpe est de type (1,1). On peut classer les tours de cavalier par type. Une question intéressante est de savoir quels sont les types possibles pour les tours du cavalier réentrants sur un échiquier donné. Il est clair qu'il existe une borne. Mais est-ce que cette borne tend vers l'infini quand on fait grandir la taille de l'échiquier ?

4. Les symétries du graphe du cavalier

Considérons le réseau $\Gamma \subset \mathbb{Z}^4$. Le sous-groupe de O(4) qui préserve $\mathbb{Z}^4$ est le groupe H_0 de l'hypercube, il a 384 éléments. Celui qui préserve Γ est un conjugué de H_0 dans $\mathrm{O}(4)$. Soit H le sous-groupe de O(4) qui préserve à la fois $\mathbb{Z}^4$ et Γ. Nous allons décrire H qui se calcule de manière élémentaire. Soient les deux plans $P_1 = \mathbb{R}^2_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$ et $P_2 = \mathbb{R}^2_{(\varepsilon_3,\varepsilon_4)}$.

PROPOSITION 4.2. – *Le groupe H a* 16 *éléments. Il contient un sous-groupe H' de symétries qui préservent les deux plans P_1 et P_2. H' a* 8 *éléments, c'est le groupe du carré. Les* 8 *autres éléments de H échangent ces deux plans.*

Un élément type qui échange P_1 et P_2 est la symétrie notée sous forme de permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ \varepsilon_3 & -\varepsilon_4 & \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & -e_2 & e_3 & -e_4 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Si π_1 et π_2 sont les projections orthogonales respectives de $\mathbb{R}^4$ sur P_1 et P_2, on constate que le graphe G se projette par π_1 et π_2 sur le graphe du cavalier de $\mathbb{Z}^2$.

Considérons maintenant le graphe du cavalier de l'échiquier 10×10 torique c'est-à-dire de $\mathbb{Z}^2/\Lambda$. Il est isomorphe au graphe $G/\Lambda \times \Lambda$. Le groupe des symétries de ce graphe laissant un sommet fixe est le groupe H à 16 éléments. Il est donc deux fois plus gros que le groupe H' des symétries de l'échiquier.

Pour les autres échiquiers carrés le groupe de symétries est le groupe H'. Pour les échiquiers rectangulaires, c'est le groupe du rectangle à 4 éléments.

La transformation σ est très intéressante. Elle envoie un tour du cavalier sur l'échiquier 10×10 torique ou non, sur un tour de l'échiquier 10×10 torique. Si ce tour est d'indice nul, le tour transformé est aussi d'indice nul. En fait, ces deux tours sont alors les projections sur P_1 et P_2 d'un lacet trivial du tore V de dimension 4.

Références bibliographiques

[1] L. Euler, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Année 1759, Vol.15, Berlin, 1766, pp. 310–337.
[2] A. Grigis, Triangulation du tore de dimension 4, Geom. Dedicata 69 (1998) 121–139.
[3] W.W. Rouse Ball, H.S.M. Coxeter, Mathematical Recreations and Essays, Thirteenth edition, Dover, New York, 1987.
[4] A.-T. Vandermonde, Mémoires de l'Académie des Sciences, Année 1774, Paris.