

# Schéma nonlinéaire pour l'approximation numérique d'un système hyperbolique non conservatif

Christophe Berthon

MAB, UMR 5466, Université Bordeaux I, 351, cours de la libération, 33400 Talence, France

Reçu le 4 juin 2002 ; accepté après révision le 25 octobre 2002

Note présentée par Olivier Pironneau.

---

## Résumé

Nous cherchons une approximation numérique des solutions discontinues de type onde de choc d'un système hyperbolique non conservatif. Le système considéré est issue d'une modélisation simplifiée d'un écoulement bifluide. Les ondes de choc sont définies par l'introduction d'un tenseur de diffusion. Sur la base d'équations supplémentaires satisfaites par les solutions du système, nous proposons un schéma de type volume fini consistant avec la définition des solutions discontinues *Pour citer cet article : C. Berthon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1069–1072.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Nonlinear scheme to approximate nonconservative hyperbolic system

## Abstract

We consider, for numerical approximations, a nonconservative hyperbolic system which arises when modeled a bifluid flow. We introduce a diffusion tensor to define the discontinuous shock wave solutions and we exhibit additional laws satisfied by the smooth solutions. Arguing the additional laws, we propose a numerical method shown to be consistent with the definition of discontinuous solutions. *To cite this article: C. Berthon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1069–1072.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## 1. Introduction

Nous nous intéressons à l'approximation numérique des solutions faibles du système non conservatif suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} + u \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + \partial_x \frac{v^2}{2} + v \partial_x u = 0, \end{cases} \quad (1)$$

où les états  $\mathbf{W} = {}^t(u, v)$  appartiennent à l'ouvert  $\Omega = \{\mathbf{W} \in \mathbb{R}^2; u + v > 0\}$ . Ce système peut être compris comme un modèle simplifié d'écoulement bifluide où  $u$  et  $v$  désignent la vitesse de chaque constituant. Le système (1) pourra par exemple être trouvé dans Castro et al. [2] où les auteurs s'intéressent à la simulation numérique d'écoulement bifluide en eau peu profonde.

---

Adresse e-mail : berthon@math.u-bordeaux.fr (C. Berthon).

Concernant l’algèbre relative à (1), nous avons :

LEMME 1.1. – *Le système (1) est hyperbolique sur  $\Omega$ . Il admet les valeurs propres 0 et  $u + v$ , respectivement associé à un champs linéairement dégénéré et vraiment non linéaire. Les vecteurs propres associés sont  ${}^t(1, -1)$  et  ${}^t(u, v)$ . De plus, les solutions régulières de (1) vérifient les loi de conservation suivantes :*

$$\partial_t f(u + v) + \partial_x \left( \int^{u+v} s f'(s) ds \right) = 0, \quad \partial_t g \left( \frac{v}{u + v} \right) = 0,$$

où  $f$  et  $g$  désignent des fonctions régulières de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . En conséquence, l’application  $(u, v) \rightarrow f(u + v)$ , si elle est convexe, est une entropie de (1). L’application  $(u, v) \rightarrow g(v/(u + v))$  ne peut jamais être convexe quelque soit  $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  non identiquement constante.

Nous renvoyons à Godlewski et Raviart [4] ou Serre [9] pour les définitions des champs linéairement dégénéré et vraiment non linéaire ainsi que pour les propriétés qui en résultent. Notons que l’application  $(u, v) \rightarrow f(u + v)$  ne peut jamais être strictement convexe.

L’objectif de ce travail est l’approximation numérique des solutions discontinues de type onde de choc. A la différence des systèmes conservatifs, les solutions choc font, ici, intervenir les produits  $u \partial_x v$  et  $v \partial_x u$  avec  $u$  et  $v$  discontinues. Ainsi, après Dal Maso, LeFloch et Murat [3], Raviart et Sainsaulieu [7] ou Sainsaulieu [8], la seule donnée du problème (1) est insuffisante pour définir les solutions onde de choc. Suivant [1] et [7], nous ajoutons au système des termes de diffusion du second ordre :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} + u \partial_x v = \varepsilon_1 \partial_{xx}^2 (u + v), & \varepsilon_1 > 0, \\ \partial_t v + \partial_x \frac{v^2}{2} + v \partial_x u = \varepsilon_2 \partial_{xx}^2 (u + v), & \varepsilon_2 > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Notons, dès à présent, que les solutions faibles définies ci-dessous dépendent du choix du tenseur de diffusion. Le choix, ici proposé, est *a priori* arbitraire. Cependant, par analogie avec les modèles multifluide présents dans la littérature (cf. [8] par exemple), nous avons volontairement imposé une propriété de dégénérescence pour la diffusion.

## 2. Solutions onde progressive et lois supplémentaires

Suivant [1] ou [7], les solutions onde progressives de (2) sont considérées. Ces solutions (régulières, bornées) sont de la forme  $\mathbf{W}(x, t) = \tilde{\mathbf{W}}(x - \sigma t)$  où  $\sigma$  est la vitesse de propagation. De plus,  $\tilde{\mathbf{W}}$  est assujettie à  $\tilde{\mathbf{W}}(\pm\infty) = \mathbf{W}_{\pm} \in \Omega$ . Il est immédiat que  $\mathbf{W}$  est solution de (2) si  $\tilde{\mathbf{W}}$  est solution de

$$\begin{cases} -\sigma d_{\xi} \tilde{u} + \tilde{u} d_{\xi} \tilde{u} + \tilde{u} d_{\xi} \tilde{v} = \varepsilon_1 d_{\xi\xi}^2 (\tilde{u} + \tilde{v}), \\ -\sigma d_{\xi} \tilde{v} + \tilde{v} d_{\xi} \tilde{v} + \tilde{v} d_{\xi} \tilde{u} = \varepsilon_2 d_{\xi\xi}^2 (\tilde{u} + \tilde{v}). \end{cases} \quad (3)$$

De telles solutions conduisent à définir les solutions choc de (1) comme limites des solutions de (2) lorsque l’opérateur de diffusion tend vers 0. En effet, si  $\tilde{\mathbf{W}}$  est solution de (3), alors  $\tilde{\mathbf{W}}_{\delta}(\xi) = \tilde{\mathbf{W}}(\xi/\delta)$ ,  $\delta > 0$ , sont solutions (régulières, bornées) de (3) où  $\varepsilon_i$  sont remplacés par  $\delta \varepsilon_i$ . De plus, lorsque  $\delta$  tend vers 0, la suite  $\tilde{\mathbf{W}}_{\delta}$  converge dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  fortement vers la fonction discontinue

$$\mathbf{W}_0(x, t) = \begin{cases} \mathbf{W}_-, & \text{si } x < \sigma t, \\ \mathbf{W}_+, & \text{si } x > \sigma t. \end{cases} \quad (4)$$

Suivant [8], la fonction  $\mathbf{W}_0$  est une solution faible de (1) compatible avec le tenseur de diffusion choisi.

Concernant l’existence des solutions onde progressive, nous avons :

THÉORÈME 2.1. – Soit  $\mathbf{W}_- \in \Omega$  un état donné et  $\sigma$  une constante réelle telle que  $\sigma < u_- + v_-$ . Alors il existe un unique état  $\mathbf{W}_+$  et une unique (à une translation près) solution,  $\tilde{\mathbf{W}}$ , de (3) qui vérifie  $\tilde{\mathbf{W}}(\pm\infty) = \mathbf{W}_\pm$ . Si de plus,  $u_- + v_- < 2\sigma$  alors  $\tilde{\mathbf{W}}(\xi) \in \Omega$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$ .

En réalité, il est possible de préciser l'état  $\mathbf{W}_+$  puisqu'un simple calcul nous donne :

$$v_+ = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (2\sigma - u_- - v_-) + \frac{\varepsilon_1 v_- - \varepsilon_2 u_-}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e^{2-2(u_-+v_-)/\sigma},$$

$$u_+ = 2\sigma - u_- - (v_- + v_+).$$

Il est alors aisé de constater que l'état  $\mathbf{W}_+$  dépend du rapport  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  (cf. [1,8] ou encore LeFloch [6]).

Nous complétons ce résultat en précisant les inégalités d'entropie énoncées dans le Lemme 1.1 :

THÉORÈME 2.2. – Soit  $\mathbf{W} \in \Omega$  une solution régulière de (2). Alors,  $\mathbf{W}$  satisfait les lois supplémentaires suivantes :

$$\partial_t(u+v) + \partial_x \frac{(u+v)^2}{2} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \partial_{xx}^2(u+v), \tag{5}$$

$$\partial_t \left( \frac{v}{u+v} \right) = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{v}{u+v} \right) \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{u+v} \partial_{xx}^2(u+v). \tag{6}$$

Il en résulte la relation suivante :

$$\partial_t \left( \frac{v}{u+v} \right) = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{v}{u+v} \right) \{ \partial_t \ln(u+v) + \partial_x(u+v) \}. \tag{7}$$

Remarquons que  $u+v$  vérifie l'équation de Burgers et donc que notre modèle simplifié bifluide est en étroite relation avec le modèle le plus simple de la mécanique des fluides compressibles. Notons, également, que cette propriété satisfaite par  $u+v$  est vérifiée quelque soit le choix du tenseur de diffusion sous forme conservative.

### 3. Schéma volume fini nonlinéaire

Sur la base des lois supplémentaires établies dans le Théorème 2.2, nous proposons une discrétisation de (1) consistante avec le tenseur de diffusion en utilisant une discrétisation de (5)–(7). Sous la restriction CFL  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |u_i^n + v_i^n| \leq 1$  et en posant  $\varepsilon = \varepsilon_2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ , nous proposons :

$$(u_i^{n+1} + v_i^{n+1}) = (u_i^n + v_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i^n F_{u+v}, \tag{8}$$

$$\left( \frac{v_i^{n+1}}{u_i^{n+1} + v_i^{n+1}} \right) = \varepsilon - \left( \varepsilon - \frac{v_i^n}{u_i^n + v_i^n} \right) \exp \left\{ \ln \left( \frac{u_i^{n+1} + v_i^{n+1}}{u_i^n + v_i^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i^n F_{\ln(u+v)} \right\}, \tag{9}$$

$$\Delta_i^n F. = (F.)_{i+1/2}^n - (F.)_{i-1/2}^n, \tag{10}$$

où  $(F.)_{i+1/2}^n := F.(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n; \Delta t/\Delta x)$  désignent des fonctions flux numérique Lipschitz-continues constantes :  $F_{u+v}(\mathbf{W}, \mathbf{W}; \Delta t/\Delta x) = (u+v)^2/2$  et  $F_{\ln(u+v)}(\mathbf{W}, \mathbf{W}; \Delta t/\Delta x) = u+v$ . De plus, le flux numérique  $F_{u+v}$  est choisi de sorte que le schéma (8), associé à l'équation de Burgers (5), soit monotone entropique (cf. [4]). Il en résulte que si  $\mathbf{W}_i^n \in \Omega$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , alors  $\mathbf{W}_i^{n+1} \in \Omega$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ .

Une fois le schéma (8), (9) réécrit en terme des inconnues  $(u, v)$ , nous obtenons :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \varepsilon) \Delta_i^n F_{u+v} - (\varepsilon(u_i^n + v_i^n) - v_i^n) (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i^n F_{\ln(u+v)}}), \tag{11}$$

$$v_i^{n+1} = v_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \varepsilon \Delta_i^n F_{u+v} + (\varepsilon(u_i^n + v_i^n) - v_i^n) (1 - e^{-\frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_i^n F_{\ln(u+v)}}), \tag{12}$$

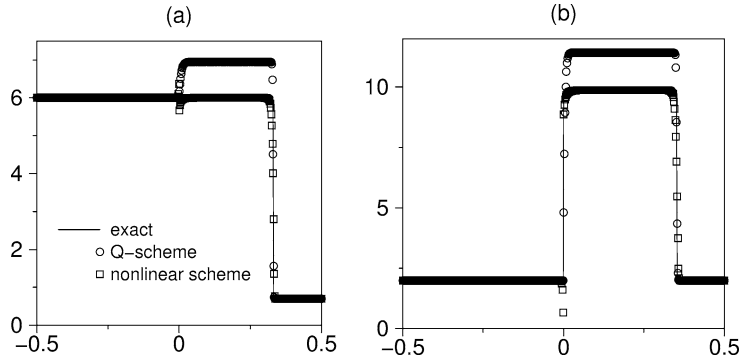


Figure 1. – Approximation numérique de problèmes de Riemann avec une discontinuité initiale en  $x = 0$  et pour les états gauche et droit : (a)  $(6, 4)$  et  $(0.7, 0.3)$  ; (b)  $(2, 10)$  et  $(2, 0.1)$ . Représentation de  $u$  pour le flux de Lax–Friedrichs avec 500 cellules, CFL de 0.5 et  $\varepsilon = 1/2$ .

qui est une discrétisation non conservative de (1) en accord avec le Théorème 2.2. De plus, puisque le schéma (8) est entropique pour l'équation de Burgers, le schéma (11)–(12) est entropique pour le système (1) :

$$\frac{1}{\Delta t} (S(\mathbf{W}_i^{n+1}) - S(\mathbf{W}_i^n)) + \frac{1}{\Delta x} (G_{i+1/2}^n - G_{i-1/2}^n) \leq 0,$$

pour tout couple d'entropie  $(S, G)$  (cf. Lemme 1.1).

A titre d'exemple, les résultats numériques présentés Fig. 1 sont comparés aux résultats obtenus par une discrétisation de (1) avec un  $Q$ -schéma (voir [2], par exemple, pour de plus amples détails). Notons simplement que le  $Q$ -schéma pour (1) conduit à une discrétisation nonconservative de l'équation de Burgers satisfaite par  $u + v$ . Nous en déduisons d'après Hou et LeFloch [5] que les solutions de type onde de choc approchées par le  $Q$ -schéma ne peuvent pas converger vers les solutions discontinues (4) définies dans la section précédente. En conclusion, le schéma (11)–(12) conduit à une bonne résolution numérique des solutions onde de choc (respect de l'amplitude et de la vitesse de propagation) malgré l'apparition d'un *undershoot* dans l'onde de contact.

### Références bibliographiques

- [1] C. Berthon, F. Coquel, Travelling wave solutions of a convective diffusive system with first and second order terms in nonconservation form, in: *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, Vol. I, in: *Internat. Ser. Numer. Math.*, Vol. 129, Birkhäuser, 1999, pp. 47–54.
- [2] M. Castro, J. Macas, C. Pars, A  $Q$ -scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system, *Math. Model. Numer. Anal.* 35 (1) (2001) 107–127.
- [3] G. Dal Maso, P. LeFloch, F. Murat, Definition and weak stability of a nonconservative product, *J. Math. Pures Appl.* 74 (1995) 483–548.
- [4] E. Godlewski, P.A. Raviart, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, in: *Appl. Math. Sci.*, Vol. 118, Springer, 1996.
- [5] T.Y. Hou, P.G. LeFloch, Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis, *Math. Comp.* 62 (206) (1994) 497–530.
- [6] P.G. LeFloch, An introduction to nonclassical shocks of systems of conservation laws, in: *An Introduction to Recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws*, in: *Lecture Notes Comput. Sci. Engrg.*, Vol. 5, Springer, 1999, pp. 28–72.
- [7] P.A. Raviart, L. Sainsaulieu, A nonconservative hyperbolic system modelling spray dynamics. Part 1. Solution of the Riemann problem, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 5 (3) (1995) 297–333.
- [8] L. Sainsaulieu, Ondes progressives solutions de systèmes convectifs–diffusifs et systèmes hyperboliques non conservatifs, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 312 (1991) 491–494.
- [9] D. Serre, *Systems of Conservation Laws. 1. Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*, Cambridge University Press, 1999.