C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1023–1027

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*)

A Hardy type estimate with exponential weights

Marius Măntoiu, Radu Purice

Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, PO Box 1-764, 70700 Bucharest, Romania

Received and accepted 7 October 2002

Note presented by Haïm Brezis.

Abstract In this paper we consider operators of the form $H = \lambda(-\mathrm{i}\nabla) + V$ with λ analytic in a strip having some specific growth conditions at infinity and prove Hardy type estimates in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ with exponential weights. In fact we extend our previous results [5] from bounded analytic functions on a strip to analytic functions with polynomial growth in that strip. ***To cite this article: M. Măntoiu, R. Purice, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1023–1027.***

Sur une estimation du type de Hardy avec des poids exponentiels

Résumé Pour des opérateurs de la forme $H = \lambda(-\mathrm{i}\nabla) + V$ avec λ une fonction analytique dans une bande et à croissance polynomielle à l'infini, nous démontrons une estimation du type de Hardy dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, avec des poids exponentiels. En effet nous étendons nos résultats précedents [5] du cas des fonctions λ analytiques bornées au cas à croissance polynomielle. ***Pour citer cet article : M. Măntoiu, R. Purice, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1023–1027.***

Version française abrégée

Pour un opérateur auto-adjoint H dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et un nombre réel E nous nous proposons d'obtenir des inégalités du type $\|w_1 f\| \leqslant C\|w_2(H-E)f\|$, où f est dans le domaine de H ayant le support en déhors d'un compact, w_1 et w_2 étant des fonctions de poids données. Dans [3], Hörmander obtient une inégalité de ce type pour un opérateur différentiel $H = P(-\mathrm{i}\nabla) + V$, P étant un polynôme et V un opérateur de multiplication par une fonction réelle, avec des poids polynomiaux. Dans [5] nous avons obtenu une telle inégalité pour un opérateur de convolution $H = \lambda(-\mathrm{i}\nabla)$, avec λ appartenant à une classe de fonctions analytiques bornées et des poids exponentielles. Dans ce papier, en modifiant nos techniques de [5], nous obtenons une amélioration du Théorème 14.5.2 dans [3] pour des opérateurs de convolution non-locaux, non-bornés et des fonctions de poids exponentiels. Ça démontre une partie du résultat général annoncé dans [7]. Nos résultats se situent dans le cadre des estimations de Hardy et pour une présentation de ce contexte on peut se référer à [1].

E-mail addresses: Marius.Mantoiu@imar.ro (M. Măntoiu); Radu.Purice@imar.ro (R. Purice).

S1631-073X(02)02604-3/FLA

Soit $\mathbb{C}^n_\delta := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |\Im z_j| < \delta,\ j \in \{1,\dots,n\}\}$ et $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n_\delta)$ l'espace des fonctions analytiques là-dessus. On pose $\langle x\rangle := (1+|x|^2)^{1/2}$. Pour tout s réel on définit $S^s_0(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant $|(\partial^\alpha \rho)(x)| \leqslant C_\alpha \min\{\langle x\rangle^{s-|\alpha|}, \langle \rho(x)\rangle\}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\mathcal{O}^s_0(\mathbb{C}^n_\delta)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n_\delta)$ telles que $\lambda(\cdot + \mathrm{i}y) \in S^s_0(\mathbb{R}^n)$ avec des estimations uniformes pour $\max_j |y_j| < \gamma$ où $\gamma \in (0,\delta)$. Pour $\lambda \in \mathcal{O}^s_0(\mathbb{C}^n_\delta)$ on dit que $E \in \mathbb{R}$ est une *valeure régulière* s'il existent $\varepsilon > 0$ et $\kappa > 0$ tels que $|\nabla\lambda(k)| \geqslant \kappa$ pour tout $k \in \lambda^{-1}((E-\varepsilon, E+\varepsilon))$. $\lambda(-\mathrm{i}\nabla)$ est l'opérateur définit par le calcul fonctionel associé à la famille $\{-\mathrm{i}\partial_1, \dots, -\mathrm{i}\partial_n\}$; cet opérateur peut être écrit comme la convolution avec la transformée de Fourier de λ.

THÉORÈME 0.1. – *Soit $\delta > 0$, $\lambda \in \mathcal{O}^s_0(\mathbb{C}^n_\delta)$ et E une valeure régulière de λ ; soit $V(Q)$ l'opérateur de multiplication par la fonction réelle $V(x)$ tel que (pour χ fonction charactéristique)* :

$$\lim_{R\to\infty} \left\| \chi\big(|Q| \geqslant R\big)\langle Q\rangle V(Q)\big(\lambda(-\mathrm{i}\nabla)+\mathrm{i}\big)^{-1}\right\| = 0.$$

Pour $H := \lambda(-\mathrm{i}\nabla) + V(Q)$ on denote par $\mathcal{G}$ son domaine avec la norme du graphe $\|\cdot\|_\mathcal{G}$. Alors il existe une constante strictement positive $\gamma_0 < \delta$ et pour $\gamma \in (0,\gamma_0)$ il existe C (dépendant de γ et de E) de façon que pour tout $f \in \mathcal{G}$ l'on ait :

$$\left\|\mathrm{e}^{\gamma\langle Q\rangle} f\right\|_\mathcal{G} \leqslant C \left\| \sqrt{\langle Q\rangle}\,\mathrm{e}^{\gamma\langle Q\rangle}(H-E) f\right\|.$$

Dans l'énoncé précédent E peut appartenir aussi bien au spectre de $\lambda(-\mathrm{i}\nabla)$ qu'à son ensemble résolvant.

Remarque 1. – Dans le cas des perturbations par opérateurs de multiplication V, notre théorème étend le Théorème 14.5.2 de [3] pour des fonctions analytiques λ de type symbole et des poids exponentiels. Une modification évidente de la démonstration permet en effet de traiter aussi le cas des perturbations non-locales.

Une conséquence importante des estimations que nous venons d'énoncer est le résultat suivant (voir aussi [5] et [6]) :

THÉORÈME 0.2. – *Soit λ, V et H comme dans le Théorème* 0.1. *Si E est une valeure propre de H qui est régulière pour λ et si g est une fonction propre associée, alors il existe une constante strictement positive γ telle que* $\mathrm{e}^{\gamma|x|}g(x)$ *appartient à* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

La démonstration des deux théorèmes précédents suit la stratégie élaborée dans [5]. Par une troncature on se réduit à démontrer une estimation pour des fonctions $f \in \mathcal{G}$ à support compact. Pour le control du passage à la limite on est obligé de travailler avec une famille de poids bornés qui approchent le poids exponentiel. Pour f à support compact et la classe de poids considérée, un ingrédient central est une inégalité de positivité concernant le commutateur de $\lambda(-\mathrm{i}\nabla)$ avec un opérateur A bien choisi (comme pour l'estimation de Mourre). Il s'avère que la forme de l'opérateur A est dictée par le commutateur de $\lambda(-\mathrm{i}\nabla)$ avec le poids. On ne va plus répéter les arguments exposés dans [5] mais on va se concentrer sur les problèmes techniques engendrés par le fait que l'opérateur $\lambda(-\mathrm{i}\nabla)$ n'est plus borné. Les difficultés se manifestent surtout au niveau des propriétés du calcul fonctionnel (1) et on va les traiter dans les Propositions 2.4 et 2.3.

Remarque 2. – Dans [4] on obtient des estimations pondérées polynomielles pour un opérateur $H = \lambda(-\mathrm{i}\nabla) + V(Q, -\mathrm{i}\nabla)$, avec V ayant le même ordre que le polynôme λ et à longue-portée. Si on peut trouver un bon « opérateur conjugué » A, les arguments de [5] et de ce papier peuvent être refaits et conduisent à élargir le Théorème 30.2.9 de [4] pour des fonctions λ analytiques de type symbole et des poids exponentiels.

To cite this article: M. Măntoiu, R. Purice, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1023–1027

1.

We shall use the same framework and notations as in [5], but our intention now is to study convolution operators with functions λ of class $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n_\delta)$ having a "symbol-type" behaviour for $|\operatorname{Re} z_j|$ going to ∞. The proof of Theorem 0.1 follows the strategy explained in [5]. The main point is to prove an uniform estimate for compactly supported functions and for a given class of weights that we now define.

DEFINITION 1.1. – For any $\gamma \in (0, \delta)$ and any $m \geqslant 1$:

$$\Phi_{\gamma,m} := \left\{\varphi \in \mathrm{C}^\infty\big((1,\infty);\mathbb{R}\big) \mid 0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \gamma;\ \left|\varphi''(t)\right| \leqslant \frac{\gamma}{t};\ \left|\varphi^{(l)}(t)\right| \leqslant \gamma,\ \forall l \leqslant m+1\right\};$$

we also set $w(x) := \mathrm{e}^{\varphi(\langle x\rangle)}$ (for $\varphi \in \Phi_{\gamma,m}$) and $X(x) := \nabla(\varphi(x)) = \frac{x}{\langle x\rangle}\varphi'(\langle x\rangle)$.

Let $\lambda \in \mathcal{O}^s_0(\mathbb{C}^n_\delta)$. For $\gamma > 0$ we fix the phase function $\varphi_0(t) = \gamma t$, that is evidently in $\Phi_{\gamma,m}$ for any m. We shall approximate φ_0 with bounded phase functions from $\Phi_{\gamma,m}$ by using exactly the same cut-offs as in [5] and we shall approximate f with vectors with compact support. For this regularised situation we prove

PROPOSITION 1.2. – *Let $\lambda \in \mathcal{O}^s_0(\mathbb{C}^n_\delta)$, V as in the hypothesis of Theorem* 0.1 *and let E be a regular value for λ. Then there exists a strictly positive constant $\gamma_0 < \delta$ such that for $m := [s]+1$ ($[s]$ denotes the entire part of s) and for any $\gamma \in (0, \gamma_0)$ there exists a positive constant C depending only on λ, E, γ_0 and on the class $\Phi_{\gamma,m}$, such that for any phase function $\varphi \in \Phi_{\gamma,m}$ and any $f \in \mathcal{G}$ with compact support the following estimate holds*:

$$\left\|\mathrm{e}^{\varphi(\langle Q\rangle)} f\right\|_{\mathcal{G}} \leqslant C\left\|\frac{\langle Q\rangle}{\psi(Q)}\,\mathrm{e}^{\varphi(\langle Q\rangle)}\big(\lambda(-\mathrm{i}\nabla) + V(Q) - E\big)f\right\|,$$

with $\psi(Q) := \sqrt{\gamma + 2\langle Q\rangle\varphi'(\langle Q\rangle)}$.

2.

In order to prove Proposition 1.2 we need to extend the functional calculus elaborated in [5] to the case of polynomially growing functions λ. We set $D := -\mathrm{i}\nabla$ and denote by $U_D(x)$ the translation with x. We observe that for $\lambda \in \mathcal{O}^s_0(\mathbb{C}^n_\delta)$ the operator $\lambda(D)$ is essentially self-adjoint on $\mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^n)$. As in [5], we have to work with a class of pseudodifferential operators that formally look like

$$(\lambda \diamond G)(Q, D) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\lambda}(y) G(y, Q) U_D(y)\,\mathrm{d}y. \tag{1}$$

We shall take $\hat{\lambda}$ a tempered distribution with exponential decay and G a function of class C^∞ having some specific growth properties at infinity (imposed by the conditions on the weight functions). We need to allow the function G to grow at infinity in the first variable uniformly with respect to the second one. In order to control the behaviour of G we introduce two weight functions W and Ω with some specific hypothesis. In the sequel we shall take $N = 2n$ or $N = n$.

HYPOTHESIS 2.1. –

(1) W and Ω are even, positive functions in $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ and satisfy:
   (a) $\exists\kappa > 0$ with $\kappa \leqslant W(x)$, $\kappa \leqslant \Omega(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$;
   (b) $\exists C < \infty$ such that $W(x+y) \leqslant C W(x) W(y)$ and $\Omega(x+y) \leqslant C\Omega(x)\Omega(y)$.

(2) $G \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n)$ such that $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exists C_m < \infty$ with

$$\max_{|\alpha| \leqslant m}\left|(\partial_1^\alpha G)(y, z)\right| \leqslant C_m W(y)\Omega^{-1}(z). \tag{2}$$

In our developments usually $W(x) = \mathrm{e}^{\gamma|x|}$ and $\Omega(x)$ is the constant function equal to 1 or the function $\langle x\rangle^r$ for some $r > 0$. We set $W_t(x) := W(tx)$.

The main technical properties of the $\diamond$-operation (analogs of those in [5]) are contained in the following two propositions.

NOTATION 2.2. – For W and Ω as in Hypothesis 2.1 and $\lambda \in \mathcal{O}_0^s(\mathbb{C}_\delta^n)$ we set

$$\big\||\lambda|\big\|_{(1),m} := \max_{\alpha|=m} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \big\|W_t \Omega \widehat{\lambda^{(\alpha)}}\big\|_{\mathrm{L}^1} < \infty.$$

PROPOSITION 2.3. – *Suppose $G \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ satisfies Hypothesis 2.1; suppose $\lambda \in \mathcal{O}_0^s(\mathbb{C}_\delta^n)$ and $m > s$. Then for any function g in $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ one has*

$$\big\|(\lambda \diamond G)(Q,D)g\big\|_{\mathrm{L}^2} \leqslant C_m(G)\mathbf{N}(g),$$
$$\mathbf{N}(g) := \max_{|\alpha|<m} \big\|\Omega^{-1}(Q)\lambda^{(\alpha)}(D)g\big\|_{\mathrm{L}^2} + \big\||\lambda|\big\|_{(1),m}\big\|\Omega^{-1}(Q)g\big\|_{\mathrm{L}^2}$$

with $C_m(G)$ a constant depending only on G and its derivatives up to order m with respect to the first variable.

Proof. – We remark that for any fixed $z \in \mathbb{R}^n$ the map $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto G(y,z)g(z+y) \in \mathbb{C}$ is of class $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ and we have $\langle\overline{\hat{\lambda}_y}, G(y,z)g(z+y)\rangle = \{\lambda(D)G(Q,z)U_D(z)g\}(0)$. This defines the operator $(\lambda \diamond G)(Q,D)$ on $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. In order to estimate the L^2 norm we shall commute $\lambda(D)$ with $G(Q,z)$ and use the Taylor development of $G(y,z)$ in the variable y. Taking $N > s$ we get:

$$\begin{aligned}\big\{\lambda(D)\big[G(Q,z)U_D(z)g\big]\big\}(x) &= \sum_{|\alpha|\leqslant N-1} c_\alpha (\partial_1^\alpha G)(x,z)\big[\lambda^{(\alpha)}(D)g\big](x+z)\\ &+ \sum_{|\alpha|=N} c'_\alpha \int_0^1 (1-t)^{N-1}\,\mathrm{d}t \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}y\,\widehat{\lambda^{(\alpha)}}(y)(\partial_1^\alpha G)(x+ty,z)g(x+y+z).\end{aligned} \tag{3}$$

For $|\alpha| > s$ we use Proposition 1.3.6 from [2] and the fact that due to the analyticity assumption on λ, for any $\gamma \in (0,\delta)$, there is a positive constant $c_2(\gamma)$ such that:

$$\max_{|\alpha|=m} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{t\gamma|x|}\big|\big(\mathcal{F}^{-1}(\partial^\alpha\lambda)\big)(x)\big|\,\mathrm{d}x \leqslant c_2(\gamma) < \infty,$$

so that $W\Omega^{-1}\hat{\lambda}^{(\alpha)}$ and $\Omega^{-1}\hat{\lambda}^{(\alpha)}$ are in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Using all these estimates we get the conclusion of the proposition. $\square$

For the case $N = 2n$ we shall underline variables $\underline{y} = (y, y')$ in $\mathbb{R}^{2n}$ and the corresponding families of operators $\underline{Q}$ and $\underline{D}$. We shall indicate by a subscript the variable in which a distribution acts.

PROPOSITION 2.4. – *Suppose $Z \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n)$ verifies Hypothesis 2.1; suppose also given $\lambda \in \mathcal{O}_0^s(\mathbb{C}^n)$ and $m > s$. Then for f and g in $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ one has*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big|\big\langle\overline{(\hat{\lambda}_- \otimes \hat{\lambda})_{\underline{y}}}, Z(\underline{y},z)\big\{U_{\underline{D}}(z,z)(\overline{f}\otimes g)\big\}(\underline{y})\big\rangle\big|\,\mathrm{d}z \leqslant C_m(Z)\mathbf{N}(f)\mathbf{N}(g),$$
$$\mathbf{N}(f) := \Big\{\max_{|\alpha|<m}\big\|\Omega^{-1}(Q)\lambda^{(\alpha)}(D)f\big\|_{\mathrm{L}^2} + \||\lambda|\|_{(1),m}\big\|\Omega^{-1}(Q)f\big\|_{\mathrm{L}^2}\Big\}$$

with $C_m(Z)$ a constant depending only on Z and its derivatives up to order m with respect to the first variable.

Proof. – We proceed as in the proof of the above proposition, but use the Taylor development of the function Z in both variables y and y' and the conditions of Hypothesis 2.1 in order to obtain for any $z \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\left\langle \overline{(\hat{\lambda}_- \otimes \hat{\lambda})_{\underline{y}}}, Z(\underline{y}, z)\overline{f}(z+y)g(z+y')\right\rangle\right| \leqslant C_m(Z)N(f;z)N(g;z),$$

where:

$$N(f;z) := \sum_{|\alpha|<m} \left|\left\{\Omega^{-1}(Q)\lambda^{\alpha}(D)f\right\}(z)\right| + \left\||\lambda|\right\|_{(1),m}\left|\Omega^{-1}(z)f(z)\right|.$$

Then, by integrating with respect to z and using the Cauchy–Schwarz inequality and the hypothesis on the function λ, we get the stated result. □

3.

Once we have the above technical results, we prove Proposition 1.2 following the same procedure as in [5]. We once again consider the cut-offs $\{\chi_\theta\}_{\theta>0}$ and $\{\varphi_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ as in [5] in order to deduce Theorem 0.1 from our Proposition 1.2. The removal of the cut-offs goes exactly along the lines explained in Section 4 of [5] by using the Fatou lemma on the left hand side and the Dominated Convergence theorem on the right-hand side. The only new difficulty comming from the unboundedness of λ is the proof of the following limit: $\lim_{\theta\to 0} \|\frac{\langle Q\rangle}{\psi_N(Q)} \mathrm{e}^{\varphi_N}[\lambda(D), \chi_\theta(Q)]f\| = 0$. We set $\zeta_\theta(y,z;t) := \langle z\rangle y \cdot (\nabla\chi)(\theta\langle z+ty\rangle)$ and observe that we can write $\langle Q\rangle[\lambda(D), \chi_\theta(Q)]f = \int_0^1 \mathrm{d}t\,(\lambda \diamond \zeta_\theta(t))(Q,D)f$. Taking into account that $\chi'(t)$ has support in the set $\{1/2 \leqslant t \leqslant 1\}$, we denote by h_θ the characteristic function of $[\frac{1}{2\theta}, \frac{1}{\theta}]$ and we prove that $|\partial_y^\alpha \zeta_\theta(y,z;t)| \leqslant Ch_\theta(\langle z+ty\rangle)\langle y\rangle^2$. Using Proposition 2.3 we get the stated result.

Acknowledgement. This research was partially supported by the Swiss National Science Foundation and the Grant CNCSU 13 C.

References

[1] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, Hardy type inequalities for abstract differential operators, Mem. Amer. Math. Soc. 70 (375) (1987) 1–119.
[2] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel, V. Georgescu, C_0-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians, Birkhäuser, 1996.
[3] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators II, Springer-Verlag, 1983.
[4] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV, Springer-Verlag, 1985.
[5] M. Măntoiu, R. Purice, Weighted estimations from a conjugate operator, Lett. Math. Phys. 51 (2000) 17–35.
[6] M. Măntoiu, R. Purice, A priori decay for eigenfunctions of perturbed periodic Schrödinger operators, Ann. H. Poincaré 2 (2001) 525–551.
[7] M. Măntoiu, R. Purice, Hardy Type Inequalities, Mourre Estimate and A-Priori Decay for Eigenfunctions, in: Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 126, Birkhäuser, 2001.