C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1063–1068

Probabilités/*Probability Theory*
(Statistique/*Statistics*)

Les ondelettes à la conquête du drap brownien fractionnaire

Antoine Ayache [a], Stéphanie Leger [b], Monique Pontier [a]

[a] L.S.P. Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 04, France

[b] L.M.A., Université Blaise Pascal, 63177 Clermont-Ferrand cedex, France

Reçu le 22 juin 2002 ; accepte après révision le 15 octobre 2002

Note présentée par Yves Meyer.

Résumé On définit un champ aléatoire dépendant de deux paramètres α et β par l'intégration fractionnaire d'un bruit blanc gaussien. Une base d'ondelettes est employée pour en produire une décomposition dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, premièrement selon une analyse de multirésolution, puis en employant une base produit tensoriel de deux bases de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Le but de cette Note est de produire un algorithme de simulation du drap brownien fractionnaire : on démontre la convergence presque sûre, uniforme sur tout compact du plan, de la seconde décomposition et on donne la vitesse de cette convergence. ***Pour citer cet article : A. Ayache et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1063–1068.***

Wavelets conquering the fractional Brownian field

Abstract A random field depending on two parameters α and β is defined by a fractional integration with respect to the white noise field. A wavelet basis is used to produce a decomposition of it in the space $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. The aim of this paper is to produce a simulation algorithm of the fractional Brownian field: the almost convergence, uniform on any compact set, of this decomposition is proved. Finally, the rate of this convergence is determined. ***To cite this article: A. Ayache et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 1063–1068.***

Abridged English version

This work uses a wavelet basis to produce a decomposition of a anisotropic fractional Brownian field $(W^{\alpha,\beta}_{s,t}, (s,t) \in \mathbb{R}^2_+)$. Such a decomposition converges almost everywhere, uniformly when (s,t) belongs to a compact set K in $(\mathbb{R}^2_+)$:

$$\lim_{N\to\infty, M\to\infty} \sup_{(s,t)\in K} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}^2,\ |j|\leqslant N,\ k\in\mathbb{Z}^2,\ |k|\leqslant M} \beta^{s,t}_{j,k}\varepsilon_I - W^{\alpha,\beta}_{s,t} \right| = 0,$$

where $I = (j,k)$ is an index in $\mathbb{Z}^4$, ε_I a white Gaussian noise and $\beta^{s,t}_I = a^{s,\alpha}_{j_1,k_1} a^{t,\beta}_{j_2,k_2}$ the wavelet coefficients of the kernel $\widehat{K}^{\alpha,\beta}_{s,t}$.

Adresses e-mail : ayache@lsp.ups-tlse.fr (A. Ayache); Stephanie.Leger@math.univ-bpclermont.fr (S. Leger); pontier@lsp.ups-tlse.fr (M. Pontier).

S1631-073X(02)02603-1/FLA

Moreover, the rate of this convergence is controlled; let $\mathcal{K}=\mathcal{K}_1\times\mathcal{K}_2$, with $\mathcal{K}_i=\{(j,k)\in\mathbb{Z}^2, |k|\leqslant M$ and $|j|\leqslant N$ or, if $j\geqslant 0$, $|2^j s-k|\leqslant L\}$. Then,

$$\sup_{(s,t)\in K}\left|\sum_{I\in\mathcal{K}}\beta_I^{s,t}\varepsilon_I-W_{s,t}^{\alpha,\beta}\right|=\mathrm{O}\big(2^{-N\eta}N\sqrt{\log N}\big)\mathrm{O}\big(\mathrm{L}^{-1}\big)+\mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\log M}}{M}\right)+\mathrm{O}\big(2^{-N\eta}\sqrt{\log N}\big),$$

where $\eta=\inf(\alpha,1-\alpha,\beta,1-\beta)$. When $L=N$, $M=2^{[N/\gamma]}$ with $\gamma>2\sup(1,\frac{\alpha}{1-\beta},\frac{\beta}{1-\alpha})$, the indices set $\mathcal{K}$ cardinal is about $N^2 2^{2[N/\gamma]}$, and this choice yields a good compromise between the rate of convergence and the algorithm complexity: then, for fixed (s,t), the rate is between n^{-1} and $n^{-\alpha\wedge\beta}$.

1. Introduction

L'objectif est de décomposer le drap brownien fractionnaire défini comme double intégrale fractionnaire d'un bruit blanc [6] et indexé par deux paramètres α et β sur des bases d'ondelettes à des fins de représentation – non seulement dans L^2 – mais aussi de façon presque sûre pour obtenir un algorithme de simulation. On considère, entre autres, deux représentations du DBF : harmonisable et en moyenne mobile, α et β étant les exposants de Hölder horizontaux et verticaux, à valeurs dans $]0,1[$.

Définissons sur $(\mathbb{R}^+)^2$ le drap brownien fractionnaire par une moyenne mobile non anticipative (cf. par exemple [4] ou [5]) :

$$W_{s,t}^{\alpha,\beta}=B(f_\alpha\cdot f_\beta)=\int_{\mathbb{R}^2}f_\alpha(s,u)f_\beta(t,v)\,\mathrm{d}B_{u,v},\quad (s,t)\in\big(\mathbb{R}^+\big)^2, \tag{1}$$

où $f_\alpha(s,u)=(s-u)_+^{\alpha-1/2}-(-u)_+^{\alpha-1/2}$, $f_\beta(t,v)=(t-v)_+^{\beta-1/2}-(-v)_+^{\beta-1/2}$ et $(\alpha,\beta)\in\,]0,1[^2$ sont tels que, pour tout $(s,t)\in(\mathbb{R}^+)^2$, $f_\alpha(s,\cdot)f_\beta(t,\cdot)\in\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. On peut remarquer que f_α et f_β sont les intégrands d'un mouvement brownien fractionnaire classique (aux constantes près) de paramètres respectifs α et β.

Puis rappelons la représentation harmonisable du drap brownien fractionnaire introduite dans [1]. La relation $\int_{\mathbb{R}^2}\hat f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\widehat{B}(\xi,\eta)=\int_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\,\mathrm{d}B(x,y)$, montre que le champ gaussien $\{\widehat{W}_{s,t}^{\alpha,\beta}, (s,t,\alpha,\beta)\in[0,L]\times[0,K]\times[a,b]\times[c,d]\}$ défini par

$$\widehat{W}_{s,t}^{\alpha,\beta}=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\xi}-1}{\mathrm{i}\xi|\xi|^{\alpha-1/2}}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\eta}-1}{\mathrm{i}\eta|\eta|^{\beta-1/2}}\right)\mathrm{d}\widehat{B}(\xi,\eta), \tag{2}$$

est une modification du champ $\{W_{s,t}^{\alpha,\beta}, (s,t,\alpha,\beta)\in[0,L]\times[0,K]\times[a,b]\times[c,d]\}$ défini en (1) à une fonction déterministe de (α,β) de classe C^∞ multiplicative près. Les champs W et $\widehat{W}$ sont donc identifiés.

2. Décomposition dans L^2

Ici de fait, on considère le drap brownien fractionnaire défini, via la représentation harmonisable, comme intégrale du noyau $\widehat{K}_{s,t}^{\alpha,\beta}:(u,v)\mapsto\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-1}{\mathrm{i}u|u|^{\alpha-1/2}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tv}-1}{\mathrm{i}v|v|^{\beta-1/2}}$, transformée de Fourier, à une constante près, du noyau $f_\alpha(s,\cdot)f_\beta(t,\cdot)$. Il y a plusieurs manières de représenter ce noyau sur une base d'ondelettes de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. En voici deux, qui s'appuient sur le fait que $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)=\mathrm{L}^2(\mathbb{R})\otimes\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ comme produit tensoriel.

2.1. Une première décomposition

On prend la base d'ondelettes de Lemarié–Meyer [8] avec ϕ l'ondelette père et ψ l'ondelette mère dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, base orthonormée de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ définie par :$\{\phi(\cdot-l),\ l\in\mathbb{Z};\ \psi_{j,k}:x\mapsto 2^{j/2}\psi\big(2^jx-k\big),\ j\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}\}$ en choisissant correctement ϕ et ψ. L'analyse multirésolution correspondante est la suite de sous espaces vectoriels (v_j,w_j), $j\in\mathbb{N}$, liés par la récurrence des sommes directes : $v_{j+1}=v_j\oplus w_j$. Pour tout $j\in\mathbb{Z}$, $\{\psi_{j,k}, k\in\mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de w_j. On peut lire dans Meyer [8] qu'on obtient alors une analyse multirésolution de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ par produit tensoriel : $V_j = v_j \otimes v_j$, et par conséquent, on a encore une récurrence de sommes directes : $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, et l'on vérifie sans problème que $W_j = v_j \otimes w_j \oplus w_j \otimes v_j \oplus w_j \otimes w_j$. La projection du noyau $\widehat{K}_{s,t}^{\alpha,\beta}$ dans cette analyse multirésolution est donnée sur V_0 par $\sum_{l_1,l_2} c_{l_1}^{s,\alpha} c_{l_2}^{t,\beta} \phi(\cdot - l_1)\phi(\cdot - l_2)$, où $c_l^{s,\alpha} = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-1}{|u|^{\alpha+1/2}} \overline{\phi(u-l)}\,\mathrm{d}u$, puis sur les W_j par la somme des trois termes suivants :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_{j,k_1}^{s,\alpha} b_{j,k_2}^{t,\beta} \phi_{j,k_1}\psi_{j,k_2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} b_{j,k_1}^{s,\alpha} c_{j,k_2}^{t,\beta} \psi_{j,k_1}\phi_{j,k_2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} b_{j,k_1}^{s,\alpha} b_{j,k_2}^{t,\beta} \psi_{j,k_1}\psi_{j,k_2}, \tag{3}$$

où $\phi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$, $c_{j,k}^{s,\alpha} = \int f_\alpha(s,u)\overline{\phi_{j,k}(u)}\,\mathrm{d}u$, et $b_{j,k}^{s,\alpha} = \int f_\beta(t,u)\overline{\psi_{j,k}(u)}\,\mathrm{d}u$.

La convergence de la série représentant le noyau ayant lieu dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ on peut intégrer terme à terme cette série contre le drap bruit blanc $\mathrm{d}B$ on obtient : $W_{s,t}^{\alpha,\beta} = \sum_I \gamma_I^{\alpha,\beta,s,t} \varepsilon_I$ où l'on a noté $\varepsilon_I = \int \chi_I(u,v)\,\mathrm{d}B_{u,v}$, où χ_I est selon les cas $\phi_{0,k}\phi_{0,l}$, $\phi_{j,k_1}\psi_{j,k_2}$, $\psi_{j,k_1}\phi_{j,k_2}$, l'indice I étant respectivement pour ces quatre familles $(0,k,l)$, $(1,j,k_1,k_2)$, $(2,j,k_1,k_2)$, $(3,j,k_1,k_2)$, les coefficients d'ondelettes $\gamma_I^{\alpha,\beta,s,t}$ correspondant aux quatre familles étant $c_k^{s,\alpha} c_l^{t,\beta}$, $c_{j,k_1}^{s,\alpha} b_{j,k_2}^{t,\beta}$, $b_{j,k_1}^{s,\alpha} c_{j,k_2}^{t,\beta}$, $b_{j,k_1}^{s,\alpha} b_{j,k_2}^{t,\beta}$. L'avantage de cette décompositon est de mettre en évidence séparément les phénomènes haute et basse fréquence.

2.2. Une deuxième décomposition

On peut obtenir une autre décomposition du drap brownien fractionnaire en utilisant le fait que $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} w_{j_1}$, chaque w_j admettant la base orthonormée $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$, et définir $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ par produit tensoriel : $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}^2} w_{j_1} \otimes w_{j_2}$, donc de base orthonormée $\{\psi_{j_1,k_1}\psi_{j_2,k_2},\ j \in \mathbb{Z}^2,\ k \in \mathbb{Z}^2\}$. Comme dans la première décomposition, le noyau admet une décomposition convergente dans L^2 :

$$\widehat{K}_{s,t}^{\alpha,\beta}(u,v) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2,\ k\in\mathbb{Z}^2} b_{j_1,k_1}^{s,\alpha} b_{j_2,k_2}^{t,\beta} \psi_{j_1,k_1}(u)\psi_{j_2,k_2}(v).$$

L'intégration de cette série contre le drap bruit blanc $\mathrm{d}B$ donne pour le drap brownien fractionnaire l'égalité dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ ($\varepsilon_{j,k} = \int \psi_{j_1,k_1}(u)\psi_{j_2,k_2}(v)\,\mathrm{d}B_{u,v}$) :

$$W_{s,t}^{\alpha,\beta} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2,\ k\in\mathbb{Z}^2} b_{j_1,k_1}^{s,\alpha} b_{j_2,k_2}^{t,\beta} \varepsilon_{j,k}.$$

Ici encore la famille $(\varepsilon_{j,k},\ j \in \mathbb{Z}^2, k \in \mathbb{Z}^2)$ est un bruit blanc gaussien. On verra dans la Section 3 que l'on obtient la convergence presque sûre de cette représentation, mais on a perdu la propriété de multirésolution.

2.3. Décomposition sur la base orthonormale transformée de Fourier de la précédente

La base de la deuxième décomposition est une base orthonormée d'ondelettes de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Son image par la transformée de Fourier $\{\hat{\psi}_{j_1,k_1}\hat{\psi}_{j_2,k_2},\ j \in \mathbb{Z}^2,\ k \in \mathbb{Z}^2\}$ est aussi une base orthonormée de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ [3,8]. Sur cette nouvelle base, on obtient pour le noyau $\widehat{K}_{s,t}^{\alpha,\beta}$ (transformée de Fourier de $f_\alpha f_\beta$) les coefficients

$$\iint \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-1}{\mathrm{i}u|u|^{\alpha-1/2}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tv}-1}{\mathrm{i}v|v|^{\beta-1/2}} \overline{\hat{\psi}_{j_1,k_1}(u)\hat{\psi}_{j_2,k_2}(v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad j \in \mathbb{Z}^2,\ k \in \mathbb{Z}^2,$$

c'est à dire le produit $a_{j_1,k_1}^{s,\alpha} a_{j_2,k_2}^{t,\beta}$ avec $a_{j,k}^{s,\alpha} = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-1}{\mathrm{i}u|u|^{\alpha-1/2}} \overline{\hat{\psi}_{j,k}(u)}\,\mathrm{d}u$ et $\hat{\psi}_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t2^{-j}k}\hat{\psi}(t2^{-j})$.

Remarque. – On utilise comme mère des ondelettes une fonction ψ de classe C^∞ dont la transformée de Fourier est à support dans $[-8\pi/3, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, 8\pi/3]$.

En conclusion, on peut représenter aussi $W_{s,t}^{\alpha,\beta}$ par la série convergente dans L^2 :

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^2,\ k\in\mathbb{Z}^2} a_{j_1,k_1}^{s,\alpha} a_{j_2,k_2}^{t,\beta} \varepsilon_{j,k} \tag{4}$$

où $\varepsilon_{j,k} = \int \hat{\psi}_{j_1,k_1}(u)\hat{\psi}_{j_2,k_2}\,\mathrm{d}B_{u,v}$ définit un bruit blanc gaussien. C'est cette décomposition dont on va montrer qu'elle converge également presque sûrement, donc convient pour une simulation.

3. Convergence presque sûre et simulation

Dans l'objectif d'une simulation, cette représentation ne vaut que si la série proposée converge presque sûrement. Nous utilisons dans ce but la décomposition (4), exprimée sur la base orthonormée des transformées de Fourier. On évalue la vitesse de convergence pour avoir une idée de la performance de l'approximation de cette simulation par la somme sur l'ensemble fini d'indices dans $\mathbb{Z}^4$: $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$, où $\mathcal{K}_i = \{(j,k) \in \mathbb{Z}^2, |k| \leqslant M$ et $|j| \leqslant N$ ou, si $j \geqslant 0,\ |2^j s - k| \leqslant L\}$. On montre :

PROPOSITION 1. – (1) *Pour tout compact K de $\mathbb{R}_+^2$, on a la convergence presque sûre* :

$$\lim_{N\to\infty, M\to\infty} \sup_{(s,t)\in K} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}^2,\ |j|\leqslant N,\ k\in\mathbb{Z}^2,\ |k|\leqslant M} \beta_{j,k}^{s,t} \varepsilon_I - W_{s,t}^{\alpha,\beta} \right| = 0, \tag{5}$$

(2) *On approche maintenant $W_{s,t}^{\alpha,\beta}$ par $\sum_{I\in\mathcal{K}} \beta_I^{s,t} \varepsilon_I$ et il vient pour tout compact K de $\mathbb{R}_+^2$* :

$$\sup_{(s,t)\in K} \left| \sum_{I\in\mathcal{K}} \beta_I^{s,t} \varepsilon_I - W_{s,t}^{\alpha,\beta} \right| = \mathrm{O}\big(2^{-N\eta} N \sqrt{\log N}\big) \mathrm{O}\big(\mathrm{L}^{-1}\big) + \mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\log M}}{M^2}\right) + \mathrm{O}\big(2^{-N\eta}\sqrt{\log N}\big), \tag{6}$$

où $\eta = \inf(\alpha, 1-\alpha, \beta, 1-\beta)$, ε_I un bruit blanc gaussien et $\beta_I^{s,t}$ les coefficients d'ondelettes du noyau $\widehat{K}_{s,t}^{\alpha,\beta}$, $I = (j,k)$ est un indice dans $\mathbb{Z}^4$, ε_I un bruit blanc gaussien et $\beta_I^{s,t} = a_{j_1,k_1}^{s,\alpha} a_{j_2,k_2}^{t,\beta}$ les coefficients d'ondelettes du noyau $\widehat{K}_{s,t}^{\alpha,\beta}$.

Les outils de la preuve sont le contrôle respectivement du bruit blanc (Lemme 1) et des coefficients (Lemmes 2 et 3). Le premier se montre comme le Lemme 3 de [7], le second est la majoration (96) de la Proposition 4.1 de [2]. Le troisième, dont nous n'avons pas a priori de référence parue, se montre en faisant un changement de variable dans l'intégrale définissant le coefficient d'ondelette, suivi de p intégrations par parties.

LEMME 1. – *Si $I = (j,k)$, $j \in \mathbb{Z}^2$, $k \in \mathbb{Z}^2$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une variable aléatoire C strictement positive telle que toute famille de bruit blanc gaussien indexée par $\{I, I \in \mathbb{Z}^4\}$ vérifie presque sûrement* :

$$\forall I, \quad \big|\varepsilon_I(\omega)\big| \leqslant C(\omega)\sqrt{1+\varepsilon} \prod_{i=1,2} \sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|j_i|\big)}\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|k_i|\big)}.$$

On étudie maintenant les coefficients $\gamma_I^{\alpha,\beta,s,t}$, $I \in \mathbb{Z}^4$, égaux aux produits $a_{j_1,k_1}^{\alpha,s} a_{j_2,k_2}^{\beta,t}$, lorsque $I = (j_1, k_1, j_2, k_2)$, et l'on rappelle que $a_{j,k}^{\alpha,s} = \int \big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-1}{\mathrm{i}u|u|^{\alpha-1/2}}\big) 2^{-j/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}uk2^{-j}} \hat{\psi}\big(u2^{-j}\big)\,\mathrm{d}u$.

LEMME 2. – *Pour tout $p > 0$, il existe une constante A telle que pour tout $j \geqslant 0$, pour tout entier relatif k, pour tout s dans un compact, alors* :

$$\big|a_{j,k}^{\alpha,s}\big| \leqslant A 2^{-j\alpha}\big[\big(1+\big|2^j s - k\big|\big)^{-p} + \big(1+|k|\big)^{-p}\big].$$

LEMME 3. – *Il existe une constante $B > 0$ telle que $\forall j > 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall p > 1$, pour tout s dans un compact, alors*

$$\big|a_{-j,k}^{\alpha,s}\big| \leqslant B\, 2^{-j(1-\alpha)}\big(1+|k|\big)^{-p}.$$

Preuve de la Proposition 1. – (1) (d'après le Théorème 2 de [7]) La somme sur $\mathbb{Z}^4$ dont on veut montrer la convergence presque sûre est majorée, grâce au Lemme 1 par le produit de deux séries de même nature :

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{I\in\mathbb{Z}^4}\beta_I^{s,t}\varepsilon_I(\omega)\Big|\\&\quad\leqslant C(\omega)\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}\big|a_{j,k}^{\alpha,s}\big|\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|j|\big)\log\big(\mathrm{e}+|k|\big)}\cdot\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}\big|a_{j,k}^{\beta,t}\big|\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|j|\big)\log\big(\mathrm{e}+|k|\big)}.\end{aligned}$$

(i) La convergence de ces séries résulte pour les $j\geqslant 0$ du Lemme 2 où l'on choisit $p=2$: le terme général est majoré par

$$\begin{aligned}&A2^{-j\alpha}\big(1+\big|2^js-k\big|\big)^{-2}\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|k|\big)}\\&\quad+K2^{-j\alpha}\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}\big(1+|k|\big)^{-2}\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|k|\big)}.\end{aligned}\tag{7}$$

La deuxième série double est le produit de deux séries convergentes indépendamment de $s\in[0,T]$. Il suffit de montrer le résultat pour des s et t tels que $\forall j,\ 2^js, 2^jt\in\mathbb{Z}$, puique les dyadiques forment un ensemble dense. Pour la première, on effectue le changement d'indice de sommation $l=k-2^js$; le terme général est majoré par :

$$\begin{aligned}&A2^{-j\alpha}\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}\big(1+|l|\big)^{-2}\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+\big|l+2^js\big|\big)}\\&\quad\leqslant A2^{-j\alpha}\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}\big(1+|l|\big)^{-2}\Big(\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|l|\big)}+\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+2^js\big)}\Big).\end{aligned}$$

La première série est le produit de deux séries convergentes indépendamment de s. La seconde, lorsque $s\in[0,T]$, est majorée par le produit de deux séries également convergentes indépendamment de s.

(ii) Pour les termes en $(-j,k)$, $j>0, k\in\mathbb{Z}$, on utilise le Lemme 3 : le terme général est majoré par $B2^{-j(1-\alpha)}\sqrt{\log(\mathrm{e}+|j|)}\sqrt{C(\omega)}(1+|k|)^{-p}\sqrt{\log(\mathrm{e}+|k|)}$. La série double est le produit de deux séries convergentes indépendamment de s.

(2) Le reste est majoré par la somme de plusieurs termes :

$$\begin{aligned}C(\omega)\Bigg[&\sum_{(j,k)\in\mathcal{K}_1^c}\big|a_{j,k}^{\alpha,s}\big|\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|j|\big)\log\big(\mathrm{e}+|k|\big)}D(t,\beta)\\&+\sum_{(j,k)\in\mathcal{K}_2^c}\big|a_{j,k}^{\beta,t}\big|\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|j|\big)\log\big(\mathrm{e}+|k|\big)}D(s,\alpha)\Bigg],\end{aligned}$$

où $D(t,\beta)$ est la somme $\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}|a_{j,k}^{\beta,t}|\sqrt{\log(\mathrm{e}+|j|)\log(\mathrm{e}+|k|)}$.

On majore le facteur de D en divisant l'ensemble de sommation du reste en trois : $\{|k|>M\}\cup\{j<-N\}\cup\{j>N, |2^js-k|>L\}$. Il existe une variable aléatoire strictement positive D telle que la première somme de ce reste est majorée par :

$$D(\omega)\sum_{j\geqslant 0}\big(2^{-j\alpha}+2^{-j(1-\alpha)}\big)\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}\sum_{|k|>M}\sqrt{\log\big(\mathrm{e}+|k|\big)}\big(1+|k|\big)^{-p},$$

de l'ordre de l'intégrale convergente $\int_M^\infty(\sqrt{\log(y)}/y^p)\,\mathrm{d}y=\mathrm{O}(\sqrt{\log M}/M^{p-1})$. On choisit ici $p=3$.

La deuxième somme est majorée par : $\sum_{j<-N}2^{j(1-\alpha)}\sqrt{\log(\mathrm{e}-j)}\sum_k\sqrt{\log(\mathrm{e}+|k|)}(1+|k|)^{-2}$, de l'ordre de l'intégrale $\int_N^\infty 2^{-x(1-\alpha)}\sqrt{\log(x)}\,\mathrm{d}x=\mathrm{O}(2^{-N(1-\alpha)}\sqrt{\log N})$.

Enfin, la troisième somme de ce reste nécessite un peu plus de travail car la majoration des coefficients $a_{j,k}^{\alpha,s}$ fait intervenir un facteur où figurent à la fois j et k :

$$2^{-j\alpha}\Big[\big(1+\big|2^js-k\big|\big)^{-2}+\big(1+|k|\big)^{-2}\Big]\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}.$$

La deuxième partie de cette majoration donne lieu au reste de la série analogue au terme ci-dessus avec α au lieu de $1-\alpha$, soit un reste en $\mathrm{O}(2^{-N\alpha}\sqrt{\log N})$.

La première partie se majore par : $D(\omega)\sum_{j>N,\ |2^js-k|>L} 2^{-j\alpha}\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}\sqrt{\log(\mathrm{e}+|k|)}(1+|2^js-k|)^{-2}$. Là encore, on ne considère que les s dyadiques. Plus précisément, puisque l'objectif est la simulation, on peut se contenter des s de la forme $(k+l)2^{-j}$, $j \geqslant N$: cela est suffisant pour une simulation. On effectue alors le changement d'indice de sommation $l = 2^js - k$, d'où la majoration

$$\sum_{j>N,\ l>L} 2^{-j\alpha}\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}\bigl(1+|l|\bigr)^{-2}\sqrt{\log\bigl(\mathrm{e}+|l+2^js|\bigr)}.$$

On peut montrer rapidement que si $L > s^{-1}2^{-N}$, $\sqrt{\log(\mathrm{e}+|l+2^js|)} \leqslant \sqrt{\log(\mathrm{e}+|l|)} + \sqrt{\log(\mathrm{e}+2^js)}$. Il vient donc deux sommes à majorer :

(a) $D(\omega)\sum_{j>N,\ l>L} 2^{-j\alpha}\sqrt{\log(\mathrm{e}+|j|)}(1+|l|)^{-2}\sqrt{\log(\mathrm{e}+|l|)}$,

(b) $D(\omega)\sum_{j>N,\ l>L} 2^{-j\alpha}\sqrt{\log(\mathrm{e}+j)}(1+|l|)^{-2}\sqrt{\log(\mathrm{e}+2^js)}$.

La somme (a) est le produit de deux restes et c'est donc un $\mathrm{O}(\sqrt{\log N}\times 2^{-\alpha N})\times \mathrm{O}(\sqrt{\log L}/L)$.

La somme (b) est de l'ordre du produit des restes des deux intégrales :

$$\int_N^\infty 2^{-x\alpha}\sqrt{\log(x)}\sqrt{\log\bigl(2^xs\bigr)}\,\mathrm{d}x \times \int_{\mathrm{L}}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Le premier facteur est un $\mathrm{O}(N\sqrt{\log N}2^{-N\alpha})$ et le second est un $\mathrm{O}(\mathrm{L}^{-1})$.

Globalement, les erreurs dominantes ont pour ordres de grandeur :

$$\mathrm{O}\left(\frac{\sqrt{\log M}}{M^2}\right) + \mathrm{O}\bigl(2^{-N\eta}\sqrt{\log N}\bigr) + \mathrm{O}\bigl(N\sqrt{\log N}2^{-N\alpha}\bigr)\mathrm{O}\bigl(\mathrm{L}^{-1}\bigr). \qquad \square$$

Une remarque pour conclure : si l'on choisit $L = N$, $M = 2^{[N/\gamma]}$ avec $\gamma > 2\sup\bigl(1, \frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{\beta}{1-\alpha}\bigr)$, l'effectif de $\mathcal{K}$, nombre de calculs à opérer est de l'ordre de $N^2\cdot 2^{2[N/\gamma]}$, ce qui donne un bon compromis entre la vitesse de convergence et la complexité de l'algorithme : c'est à dire que pour (s,t) fixés, la vitesse de convergence est d'un ordre situé entre n^{-1} et $n^{-\alpha\wedge\beta}$.

Enfin, un corollaire intéressant de cette décomposition est de pouvoir montrer sur cette forme décomposée du drap brownien fractionnaire la régularité :

l'application définie sur $]0,1[^2$ *par* $(\alpha,\beta)\mapsto W_{s,t}^{\alpha,\beta}$ *est de classe* C^∞.

En effet, pour tout $s,\ t,\ tj_1,\ tj_2,\ tk_1,\ tk_2$ fixés, l'application $(\alpha,\beta)\mapsto a_{j_1,k_1}^{\alpha,s}a_{j_2,k_2}^{\beta,t}$ est de classe C^∞ comme intégrale de fonctions C^∞ respectivement en α et β, de $n$ième dérivée $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}su}-1}{|u|^{\alpha+1/2}}(-\log|u|)^n 2^{-j/2}\times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2^{-j}ku}\hat{\psi}(2^{-j}u)$ uniformément majorée quand $\alpha\in[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ par une fonction intégrable. Ces coefficients dérivés se majorent comme l'ont été les coefficients d'ondelettes en sorte de prouver la convergence uniforme de la série dérivée.

Références bibliographiques

[1] A. Ayache, S. Léger, Fractional and multifractional Brownian motion, Preprint 2000.
[2] A. Benassi, S. Jaffard, D. Roux, Gaussian processes pseudodifferential elliptic operators, Rev. Math. Iberoamericana 13 (1997) 19–89.
[3] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, 1992.
[4] D. Feyel, A. De La Pradelle, On fractional Brownian processes, Potential Anal. 10 (3) (1999) 273–288.
[5] S. Léger, M. Pontier, Drap brownien fractionnaire, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 329 (1999) 893–898.
[6] T. Lindstrom, Fractional Brownian fields as integrals of white noise, Bull. London Math. Soc. 25 (1993) 83–88.
[7] Y. Meyer, F. Sellan, M.S. Taqqu, Wavelets, generalized white noise and fractional integration: the synthesis of fractional Bownian motion, J. Fourier Anal. Appl. 5 (5) (1999) 465–494.
[8] Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs, Hermann, Paris, 1990.