C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 915–920

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Une formule de Landau–Zener pour un croisement non dégénéré et involutif de codimension 3

Clotilde Fermanian Kammerer [a], Patrick Gérard [b]

[a] Université de Cergy-Pontoise, dept. de mathématiques, BP 222, Pontoise, 95302 Cergy-Pontoise cedex, France

[b] Université de Paris-Sud, mathématiques, bât. 425, 91405 Orsay, France

Reçu le 1er octobre 2002 ; accepté le 15 octobre 2002

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé Nous étudions un système semi-classique de deux équations d'évolutions dont l'hamiltonien est donné par une matrice hermitienne présentant un croisement de modes de codimension 3. Pour un croisement non-dégénéré – dans un sens que nous définissons – nous montrons que deux situations géométriques sont possibles. Pour l'une d'entre elle, nous quantifions le transfert d'énergie au-dessus du croisement en établissant des formules de Landau–Zener pour des mesures semi-classiques à deux échelles. Ce résultat repose sur un théorème de réduction qui ramène à un système du type de celui étudié par Landau et Zener. ***Pour citer cet article : C. Fermanian Kammerer, P. Gérard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 915–920.***

Landau–Zener formula for non-degenerate involutive codimension 3 crossings

Abstract In this Note, we study a 2 × 2 system of evolution equations with some codimension 3 crossing. We derive two conditions of non-degeneracy. We focus on one of them and reduce our system to some Landau–Zener's type system. Using this reduction, we describe the energy transfer at the crossing by Landau–Zener formula for 2-scales semi-classical measures. ***To cite this article: C. Fermanian Kammerer, P. Gérard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 915–920.***

Abridged English version

We study the behaviour, as h goes to 0, of families $(\psi^h)_{h>0}$, solutions of

$$\begin{cases} \mathrm{i}h\partial_t\psi^h = \mathrm{op}_h(P)\psi^h, \\ \psi^h_{|t=0} = \psi^h_0, \end{cases}$$

where (ψ^h_0) is uniformly bounded in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^2)$, and $\mathrm{op}_h(P)$ is a semi-classical pseudodifferential operator with the following Weyl symbol,

$$P(t,x,\xi) = k + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 + \mathrm{i}p_3 \\ p_2 - \mathrm{i}p_3 & -p_1 \end{pmatrix}, \quad (t,x,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d,$$

Adresses e-mail : Clotilde.Fermanian@math.u-cergy.fr (C. Fermanian Kammerer); Patrick.Gerard@math.u-psud.fr (P. Gérard).

S1631-073X(02)02601-8/FLA

where $k=\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(P)=k(t,x,\xi)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d+1})$, $p=p(t,x,\xi)\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d+1},\mathbb{R}^3)$. The eigenvalues of $\tau+P$ are $\lambda^\pm=-\tau+k\pm|p|$, and therefore display a crossing for $p=0$. Our purpose is to describe the energy transfer from one energy level to another in this general setting. For particular cases in smaller dimensions, we refer to [9,11,6,7,2] and [4]. General results with $p_3=0$ have been recently obtained by the authors [5] and independently by Colin de Verdière [1]. We endow $T^*\mathbb{R}^{d+1}$ with the symplectic form $\sigma=\mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}t+\mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}x$ and we make the following assumptions, where we set $E=\{\tau+k,p\}$, $B=(\{p_3,p_2\},\{p_1,p_3\},\{p_2,p_1\})$.

(H1) the mapping $(t,x,\xi)\mapsto p(t,x,\xi)$ has rank 3 on $\{p=0\}$,

(H2) $E\cdot B=0$ and $|E|^2>|B|^2$ on $\{p=0\}$.

Example 1. – If $d=3$, $k=|\xi|^2/2$ and $p=p(x)$, as in [6], (H2) holds as $\xi\neq 0$.

Example 2. – If $k=V(t,x)$ and $p=\xi-A(t,x)$, E and B are the electric and magnetic fields respectively.

The geometry of the crossing is then described by the following result, where we denote by H_λ the hamiltonian vector field of the function λ and by S the set $\{p=0,\ \tau+k=0\}$.

PROPOSITION 0.1. – *Assume* (H1) *and* (H2) *are fulfilled. Then, for every $\rho_0\in S$, there exists (locally in s) unique curves $\rho_s^\pm$ such that*

$$\dot\rho_s^\pm=H_{\lambda^\pm}\big(\rho_s^\pm\big),\qquad \rho_s^\pm\,|_{s=0}=\rho_0.$$

Moreover, these curves are transverse to S. If we denote by $J^{\pm,p}$ the union of the curves $(\rho_s^\pm)_{s\leqslant 0}$, by $J^{\pm,f}$ the union of the curves $(\rho_s^\pm)_{s\geqslant 0}$, as ρ_0 ranges in S, the sets

$$J=J^{+,p}\cup J^{-,f},\qquad J'=J^{+,f}\cup J^{-,p},$$

are smooth involutive submanifolds of $T^*\mathbb{R}^{d+1}$.

Remark 1. – In the case $E\cdot B\neq 0$, the first part of the proposition above still holds; however the involutivity of J, J' fails, so that the analysis we are going to describe cannot be easily generalized (see however [3] for the special case of constant electromagnetic fields).

We now turn to the main result, which we state as Landau–Zener formulae in terms of two-scale Wigner measures, in the spirit of [4]. We refer to [4] or to the French version below for a definition of these objects. Roughly speaking, these measures describe the concentration of Wigner transforms on a given involutive submanifold with a given second scale. Let ν (resp. ν') be the two-scale Wigner measure associated to (ψ^h), J (resp. J') and to the second scale $\sqrt{h}$. We set

$$\jmath^{\pm,p}=J^{\pm,p}\backslash S,\quad \jmath^{\pm,f}=J^{\pm,f}\backslash S,\quad \Sigma^\pm=\big\{\lambda^\pm=0\big\}.$$

We denote by $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\jmath^{\pm,p})$, (resp. $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\jmath^{\pm,f})$), the bundle above $\Sigma^\pm$ obtained by spherical compactification of the fibres of the normal bundle $T\Sigma^\pm/T(\jmath^{\pm,p})$ (resp. $T\Sigma^\pm/T(\jmath^{\pm,f})$). In view of the localization of Wigner measures, there exist measures $\nu^{\pm,p}$ on $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\jmath^{\pm,p})$ and $\nu^{\pm,f}$ on $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\jmath^{\pm,f})$ such that

$$\nu=\begin{cases}\nu^{+,p}\Pi^+ \text{ above } \jmath^{+,p},\\[1ex] \nu^{-,f}\Pi^- \text{ above } \jmath^{-,f},\end{cases}\qquad \nu'=\begin{cases}\nu^{+,f}\Pi^+ \text{ above } \jmath^{+,f},\\[1ex] \nu^{-,p}\Pi^- \text{ above } \jmath^{-,p},\end{cases}$$

where $\Pi^\pm$ is the spectral projector associated to $\lambda^\pm$. Moreover, these measures are propagated by the Hamiltonian flows induced by $H_{\lambda^\pm}$ on $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\jmath^{\pm,p})$ and $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\jmath^{\pm,f})$ respectively. Using simple arguments of transversality, they have traces above S that we shall denote by $\nu_S^{\pm,p}$ and $\nu_S^{\pm,f}$. Introducing the vector fields H and H' defined by

$$\lim_{s\to 0^-}H_{\lambda^+}(\rho_s^+)=\lim_{s\to 0^+}H_{\lambda^-}(\rho_s^-)=H,\qquad \lim_{s\to 0^+}H_{\lambda^+}(\rho_s^+)=\lim_{s\to 0^-}H_{\lambda^-}(\rho_s^-)=H',$$

we observe that $\nu_S^{+,p}$ and $\nu_S^{-,f}$ are measures on $H^\perp/TJ$ while $\nu_S^{-,p}$ and $\nu_S^{+,f}$ are measures on $(H')^\perp/TJ'$. These two bundles can be identified to

$$D := T\big(T^*\mathbb{R}^{d+1}\big)/F, \quad \text{où } F := TJ + TJ' = TS \oplus \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}H',$$

or to $F^\perp = \{W(\lambda) = \frac{(E\wedge B)\cdot\lambda}{|E|^2} H_{\tau+k} + \lambda \cdot H_p;\ \lambda\cdot E = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^3\}$. Let (λ_1, λ_2) be an orthonormal basis of the normal plane to E in $\mathbb{R}^3$ such that, if $B \neq 0$,

$$\lambda_1 = \frac{E\wedge B}{|E|\,|B|}, \qquad \lambda_2 = \frac{E}{|E|}\wedge \lambda_1.$$

Let $W_1 = W(\lambda_1)$, $W_2 = W(\lambda_2)$ be the associated basis of $F^\perp$. Measures $\nu_S^{\pm,p}$ and $\nu_S^{\pm,f}$ are related as follows.

THÉORÈME 0.2. – *If $\nu_S^{+,p}$ and $\nu_S^{-,p}$ are mutually singular on D, then*

$$\begin{pmatrix} \nu_S^{+,f} \\ \nu_S^{-,f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-T & T \\ T & 1-T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_S^{+,p} \\ \nu_S^{-,p} \end{pmatrix},$$

with $T([\delta\rho]) = \exp\Big(-\pi \frac{|E|^2}{(|E|^2-|B|^2)^{3/2}} \big[\sigma(W_1,\delta\rho)^2 + \big(1-\frac{|B|^2}{|E|^2}\big)\sigma(W_2,\delta\rho)^2\big]\Big)$.

1. Introduction

On étudie le comportement de familles de solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles,

$$\begin{cases} \mathrm{i}h\partial_t \psi^h = \mathrm{op}_h(P)\psi^h, \\ \psi^h_{|t=0} = \psi^h_0, \end{cases} \tag{1}$$

où (ψ_0^h) est une famille uniformément bornée de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dépendant du petit paramètre h, $h>0$, et $\mathrm{op}_h(P)$ est l'opérateur pseudodifférentiel semi-classique dont le symbole de Weyl est la matrice hermitienne,

$$P(t,x,\xi) = k + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 + \mathrm{i}p_3 \\ p_2 - \mathrm{i}p_3 & -p_1 \end{pmatrix}, \quad (t,x,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d,$$

où $k = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(P) = k(t,x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d+1})$, $p = p(t,x,\xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{R}^3)$. Les valeurs propres de $\tau + P$ sont $\lambda^\pm = \tau + k \pm |p|$, elles sont distinctes tant que $p \neq 0$. L'étude d'exemples (cf. [9,11,6,8]) suggère qu'au-dessus de $S = \{p = 0,\ \tau + k = 0\}$, intersection de la variété caractéristique avec le lieu du croisement, se produit un transfert d'énergie entre les modes. Ce transfert a été décrit pour des systèmes en dimension 1 d'espace dans [2] et, pour un cas particulier, en dimension 2 d'espace dans [4]. Ce dernier résultat a été récemment généralisé à un croisement générique de codimension 2 dans [5] et indépendamment par Colin de Verdière (cf. [1]). Dans ce travail, nous quantifions ce transfert en codimension 3 en termes de mesures semi-classiques, dans l'esprit de [4,5], sous certaines hypothèses que nous expliciterons ci-dessous.

2. La géométrie du croisement : hypothèses

On suppose que le croisement est de *codimension* 3, i.e.

$$(t,x,\xi) \mapsto p(t,x,\xi) \text{ est de rang 3 sur } \{p=0\}. \tag{H1}$$

On munit $T^*\mathbb{R}^{d+1}$ de la forme symplectique $\sigma = \mathrm{d}\tau\wedge\mathrm{d}t + \mathrm{d}\xi\wedge\mathrm{d}x$. Soient

$$E = \{\tau + k, p\}, \qquad B = \big(\{p_3, p_2\}, \{p_1, p_3\}, \{p_2, p_1\}\big).$$

On s'intéresse aux courbes hamiltoniennes $\rho_s^{\pm}$ associées à $\lambda^{\pm}$ qui rencontrent S transversalement, au sens où

$$\left(\rho_s^{\pm}\right)_{|s=0} = \rho_0 \in S \quad \text{et} \quad \lim_{s\to 0^{\pm}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} p\left(\rho_s^{\pm}\right) \neq 0.$$

Pour que de telles courbes existent, il est nécessaire que l'une des hypothèses suivantes, soit vérifiée en ρ_0.

$$E\cdot B = 0 \quad \text{et} \quad |E|^2 > |B|^2, \tag{H2}$$

$$E\cdot B \neq 0. \tag{H2$'$}$$

Dans la proposition suivante on désigne par H_λ le champ hamiltonien de la fonction λ.

PROPOSITION 2.1. – *Soit $\rho_0 \in S$ tel que* ((H1) *et* (H2)) *ou* ((H1) *et* (H2$'$)) *soient vérifiées, alors il existe une paire unique de courbes $s \mapsto \rho_s^+$ et $s \mapsto \rho_s^-$ dans $T^*\mathbb{R}^{d+1}_{t,x}$ telles que*

$$\dot\rho_s^{\pm} = H_{\lambda^{\pm}}\left(\rho_s^{\pm}\right), \quad \rho_s^{\pm}\,|_{s=0} = \rho_0.$$

De plus, les courbes $(\rho_s^{\pm})_{s\leqslant 0}$ et $(\rho_s^{\mp})_{s\geqslant 0}$ sont transverses à S et se recollent de façon $\mathcal{C}^\infty$.

Soit Ω un voisinage de ρ_0 dans S tel que (H1) et ((H2) ou (H2$'$)) soient vérifiées dans Ω. On définit $J^{\pm,p}$ comme l'ensemble des courbes $(\rho_s^{\pm})_{s\leqslant 0}$ arrivant en un point de Ω, et $J^{\pm,f}$ celui constitué des courbes $(\rho_s^{\pm})_{s\geqslant 0}$, issues d'un point de Ω. Du fait de la Proposition 2.1, $J^{+,p}$ et $J^{-,f}$ d'une part et $J^{+,f}$ et $J^{-,p}$ d'autre part se recollent de façon $\mathcal{C}^\infty$ au-dessus de S en

$$J = J^{+,p} \cup J^{-,f}, \qquad J' = J^{+,f} \cup J^{-,p}.$$

PROPOSITION 2.2. – *Si* (H1) *et* (H2) *sont vérifiées sur Ω, les ensembles J et J' sont des sous variétés involutives de codimension* 3 *de $T^*\mathbb{R}^{d+1}$.*

Dans le cas d'un croisement générique de codimension 2, pour une matrice symétrique, sous une hypothèse de non-dégénérescence du même type, les ensembles J et J' sont toujours des sous-variétés involutives. Il n'en est pas ainsi en codimension 3, en particulier lorsque (H1) et (H2$'$) sont vérifiées dans Ω, puisque S est alors symplectique. Une situation de ce type est étudiée dans [3].

Example 1. – Si $d = 3$, $k = |\xi|^2/2$ et $p = p(x)$, comme dans [6], (H2) est vraie dès que $\xi \neq 0$.

Example 2. – Si $k = V(t,x)$ et $p = \xi - A(t,x)$, comme dans [3], E et B sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique et les deux situations (H2) et (H2$'$) peuvent se produire.

On se concentre dans la suite sur les croisements non-dégénérés de type involutif, c'est-à-dire vérifiant les hypothèses (H1) et (H2). Cette situation peut sembler restrictive mais, comme le montrent les exemples ci-dessus, elle recouvre déjà de nombreux cas physiquement intéressants.

3. Théorème de réduction

Rappelons que si κ est une transformation canonique de $T^*\mathbb{R}^D$, il existe un opérateur intégral de Fourier semi-classique $U = U_h$ dit *associé à κ*, tel que (cf. par exemple [4]), au sens de la norme L^2,

$$\forall a \in \mathcal{C}_0^\infty\left(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D\right),\ \forall f \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^D\right), \quad U^*\,\mathrm{op}_h(a)Uf = \mathrm{op}_h(a\circ\kappa)f + \mathrm{O}\left(h^2\right)\|f\|_{\mathrm{L}^2}.$$

THÉORÈME 3.1. – *Soit $\rho_0 \in S$ tel que* (H1) *et* (H2) *soient vérifiées dans un voisinage Ω de ρ_0 dans S, il existe une transformation canonique locale κ d'un voisinage de ρ_0 dans un voisinage Ω' de* 0

$$\kappa:\ (t,x,\tau,\xi) \mapsto (s,z,\sigma,\zeta),$$

il existe un opérateur intégral de Fourier U associé à κ et un opérateur pseudodifférentiel B tels que la famille $u^h = UB\psi^h$ vérifie pour tout $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega')$

$$\mathrm{op}_h(\phi)\ \mathrm{op}_h\begin{pmatrix} -\sigma + s & \gamma_1\zeta_1 + \gamma_2\zeta_2 \\ \overline{\gamma}_1\zeta_1 + \overline{\gamma}_2\zeta_2 & -\sigma - s \end{pmatrix} u^h = hf^h, \tag{2}$$

où $\gamma_j = \gamma_j(s,\sigma,z,\zeta)$, $j \in \{1,2\}$, sont des fonctions à valeurs complexes telles que $\mathcal{I}m\,(\gamma_1\overline{\gamma}_2)$ ne s'annule pas sur Ω' et (f^h) est une famille uniformément bornée de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{d+1})$. *De plus*

$$J \cup J' = \{\sigma^2 = s^2\} \cap \{\zeta_1 = \zeta_2 = 0\},$$
$$J^{\pm,f} = \{s<0,\ \sigma \pm s = 0,\ \zeta_1 = \zeta_2 = 0\}, \qquad J^{\pm,p} = \{s>0,\ \sigma \mp s = 0,\ \zeta_1 = \zeta_2 = 0\}.$$

4. Formules de Landau–Zener pour un croisement non-dégénéré de type involutif

Le transfert d'énergie au croisement dépend de la manière dont se concentre (ψ^h), à l'échelle $\sqrt{h}$, sur les ensembles J et J'. Ces ensembles étant involutifs, on utilise les mesures semi-classiques à deux échelles dont nous rappelons quelques propriétés (cf. [10] et [4]).

4.1. Mesures semi-classiques à deux échelles associées à une sous-variété involutive

Soit $I = \{f = 0\}$ une sous-variété involutive de $T^*\mathbb{R}^D$ de codimension m, $N(I)$, le fibré normal à I et $\overline{N}(I)$, le fibré normal à I compactifié obtenu en ajoutant une sphère à l'infini. Soit $\mathcal{A}$, la classe de symboles $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^m)$, définie par

– $\exists K \subset \mathbb{R}^D_x \times \mathbb{R}^D_\xi$, K compact, $\forall \eta \in \mathbb{R}^m$, $a(\cdot,\cdot,\eta) \in \mathcal{C}_0^\infty(K)$,

– $\exists a_\infty$, homogène de degré 0 en η, $\exists R \in \mathbb{R}^{*+}$, $\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D$, $|\eta| > R \Rightarrow a(x,\xi,\eta) = a_\infty(x,\xi,\eta)$.
On note $a(x,\xi,\frac{\eta}{|\eta|}\infty) = a_\infty(x,\xi,\eta)$.

Le choix d'une équation f de I induit un système de coordonnées sur $\overline{N}(I)_{|\rho}$, pour $\rho \in I$, donné par l'extension naturelle $\overline{\chi}$ de l'isomorphisme $\chi : [\delta\rho] \mapsto \eta = \mathrm{d}f(\rho)\delta\rho$. Si ν est une mesure sur $\overline{N}(I)$, on notera ν_f la mesure sur $\overline{\mathbb{R}^m}$, image par $\overline{\chi}$ de ν.

Soit (v^h) une famille uniformément bornée de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^D, \mathbf{C}^N)$, il existe une suite h_k, $h_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et une mesure de Radon positive matricielle ν sur $\overline{N}(I)$, telles que pour toute matrice a à coefficients dans $\mathcal{A}$,

$$\left(\mathrm{op}_{h_k}\left(a\left(x,\xi,\frac{f}{\sqrt{h_k}}\right)\right)v^{h_k}\,\middle|\,v^{h_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Tr}\langle a,\nu_f\rangle + \mathrm{Tr}\left(\int_{T^*\mathbb{R}^D\setminus I} a\left(x,\xi,\frac{f}{|f|}\infty\right)\mathrm{d}\mu\right),$$

où μ est une mesure semi-classique de la suite (v^{h_k}).

4.2. Formules de Landau–Zener

Soient ν (resp. ν') les mesures à deux échelles associées à (ψ^h) et J (resp. J'). Soient

$$\dot{J}^{\pm,p} = J^{\pm,p}\setminus S, \quad \dot{J}^{\pm,f} = J^{\pm,f}\setminus S, \quad \Sigma^\pm = \{\lambda^\pm = 0\}.$$

Soit $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,p})$ (resp. $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,f})$), le fibré au-dessus de $\Sigma^\pm$ obtenu par compactification des fibres de $T\Sigma^\pm/T(\dot{J}^{\pm,p})$ (resp. $T\Sigma^\pm/T(\dot{J}^{\pm,f})$). Du fait de la localisation des mesures semi-classiques, il existe quatre mesures $\nu^{\pm,p}$ sur $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,p})$ et $\nu^{\pm,f}$ sur $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,f})$ telles que

$$\nu = \begin{cases} \nu^{+,p}\Pi^+ \text{ au-dessus de } \dot{J}^{+,p}, \\ \nu^{-,f}\Pi^- \text{ au-dessus de } \dot{J}^{-,f}, \end{cases} \qquad \nu' = \begin{cases} \nu^{+,f}\Pi^+ \text{ au-dessus de } \dot{J}^{+,f}, \\ \nu^{-,p}\Pi^- \text{ au-dessus de } \dot{J}^{-,p}, \end{cases}$$

où $\Pi^\pm$ est le projecteur spectral associé à $\lambda^\pm$. De plus ces mesures sont propagées par les flots induits par $H_{\lambda^\pm}$ sur $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,p})$ et $\overline{N}_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,f})$ respectivement. D'après la Proposition 2.1, il existe deux champs H et H' linéairement indépendants et transverses à S tels que

$$\lim_{s\to 0^-} H_{\lambda^+}(\rho_s^+) = \lim_{s\to 0^+} H_{\lambda^-}(\rho_s^-) = H, \qquad \lim_{s\to 0^+} H_{\lambda^+}(\rho_s^+) = \lim_{s\to 0^-} H_{\lambda^-}(\rho_s^-) = H'.$$

Comme H et H' sont transverses à S, ces mesures ont des traces au-dessus de S que nous noterons $\nu_S^{\pm,p}$ et $\nu_S^{\pm,f}$. En étudiant la limite des fibres de $N_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,p})$ et de $N_{\Sigma^\pm}(\dot{J}^{\pm,f})$ au-dessus d'un point ρ tendant vers un point ρ_0 de S, on remarque que $\nu_S^{+,p}$ et $\nu_S^{-,f}$ sont des mesures sur $H^\perp/TJ$ tandis que $\nu_S^{-,p}$ et $\nu_S^{+,f}$ sont des mesures sur $(H')^\perp/TJ'$. Ces deux derniers fibrés peuvent être identifiés au fibré de rang 2

$$D := T\big(T^*\mathbb{R}^{d+1}\big)/F, \quad \text{où } F := TJ + TJ' = TS \oplus \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}H',$$

ou encore à

$$F^\perp = \left\{ W(\lambda) = \frac{(E \wedge B)\cdot\lambda}{|E|^2} H_{\tau+k} + \lambda \cdot H_p;\ \lambda \cdot E = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

L'espace $F^\perp$ est donc isomorphe au plan orthogonal à E pour la structure euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^3$. Soit (λ_1, λ_2) une base orthonormée de ce plan, telle que pour $B \neq 0$, on ait

$$\lambda_1 = \frac{E \wedge B}{|E|\,|B|}, \qquad \lambda_2 = \frac{E}{|E|} \wedge \lambda_1.$$

Soient $W_1 = W(\lambda_1)$, $W_2 = W(\lambda_2)$ la base de $F^\perp$ associée. Le lien entre $\nu_S^{\pm,p}$ et $\nu_S^{\pm,f}$ s'exprime alors de la manière suivante.

THÉORÈME 4.1. – *Si les mesures $\nu_S^{+,p}$ et $\nu_S^{-,p}$ sont étrangères sur D, alors*

$$\begin{pmatrix} \nu_S^{+,f} \\ \nu_S^{-,f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-T & T \\ T & 1-T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_S^{+,p} \\ \nu_S^{-,p} \end{pmatrix},$$

avec

$$T\big([\delta\rho]\big) = \exp\left(-\pi \frac{|E|^2}{(|E|^2 - |B|^2)^{3/2}} \left[\sigma(W_1, \delta\rho)^2 + \left(1 - \frac{|B|^2}{|E|^2}\right) \sigma(W_2, \delta\rho)^2 \right] \right).$$

On remarque que si $B = 0$, comme c'est le cas pour les croisements d'Hagedorn (Exemple 1), T ne dépend pas du choix de la base (λ_1, λ_2), de plus

$$T = \exp\left(-\frac{\pi}{|E|} \big(\sigma(W_1, \delta\rho)^2 + \sigma(W_2, \delta\rho)^2 \big) \right).$$

Références bibliographiques

[1] Y. Colin de Verdière, The level crossing problem in semi-classical analysis I. The symmetric case, in: Proceedings of Frédéric Pham's Congress, 2002, to appear.
[2] Y. Colin de Verdière, M. Lombardi, J. Pollet, The microlocal Landau–Zener formula, Ann. Inst. Henri Poincaré 71 (1) (1999) 95–127.
[3] C. Fermanian Kammerer, A noncommutative Landau–Zener formula, Prépublication de l'Université Cergy-Pontoise, No. 1, 2002.
[4] C. Fermanian Kammerer, P. Gérard, Mesures semi-classiques et croisements de modes, Bull. Soc. Math. France 130 (1) (2002) 145–190.
[5] C. Fermanian Kammerer, P. Gérard, Une formule de Landau–Zener pour un croisement générique de codimension 2, X-EDP, 2002.
[6] G.A. Hagedorn, Molecular propagation through electron energy level crossings, Mem. Amer. Math. Soc. 111 (536) (1994).
[7] G.A. Hagedorn, A. Joye, Landau–Zener transitions through small electronic eigenvalue gaps in the Born–Oppenheimer approximation, Ann. Inst. H. Poincaré 68 (1) (1998) 85–134.
[8] A. Joye, Proof of the Landau–Zener formula, Asymptotic Anal. 9 (1994) 209–258.
[9] L. Landau, Collected Papers of L. Landau, Pergamon Press, 1965.
[10] L. Miller, Propagation d'onde semi-classiques à travers une interface et mesures 2-microlocales, Thèse de l'École Polytechnique, 1996.
[11] C. Zener, Non-adiabatic crossing of energy levels, Proc. Roy. Soc. London 137 (1932) 696–702.