C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 899–902

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

Développement asymptotique q-Gevrey et fonction thêta de Jacobi

Jean-Pierre Ramis [a], Changgui Zhang [b]

[a] Laboratoire E. Picard (UMR–CNRS 5580) et Institut Universitaire de France, UFR MIG, Université Paul Sabatier de Toulouse, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

[b] Laboratoire AGAT (UMR–CNRS 8524), UFR Math., Université des sciences et technologies de Lille, cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu et accepté le 4 octobre 2002

Note présentée par Bernard Malgrange.

Résumé Des notions de développements asymptotiques à caractère q-Gevrey ont été étudiées dans [6,7]. Tout récemment, nous nous sommes intéressés à une nouvelle notion asymptotique [8] : originaire de l'étude d'une fonction thêta de Jacobi elle fait un pont naturel entre l'asymptotique des équations aux q-différences et la théorie des fonctions elliptiques. La présente Note a pour objectif de montrer quelques derniers développements de cette notion asymptotique. ***Pour citer cet article : J.-P. Ramis, C. Zhang, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 899–902.***

q-Gevrey asymptotic expansion and Jacobi theta function

Abstract Some notions of q-Gevrey asymptotic expansion have been studied in [6,7]. Recently we became interested in a new notion of asymptotic expansion [8]: it is related to a Jacobi theta function and allows one to establish the natural link between the asymptotics of q-difference equations and the theory of elliptic functions. The purpose of this Note is to give some new results related to this notion of asymptotic expansion. ***To cite this article: J.-P. Ramis, C. Zhang, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 899–902.***

0. Fonction θ et premières notations

Soit q un nombre complexe fixé tel que $|q|>1$. Pour chaque $\lambda\in\mathbb{C}^*$, on définit la « q-spirale » de base λ notée $[\lambda]$, comme étant l'ensemble $\{\lambda q^n : n\in\mathbb{Z}\}$. Si $x\in\mathbb{C}^*$, on pose

$$d_q\big(x;[\lambda]\big)=|x|^{-1}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\big|x-\lambda q^n\big|.$$

Notons θ la fonction thêta de Jacobi définie dans $\mathbb{C}^*$ par :

$$\theta(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{-n(n-1)/2}x^n=\prod_{n\geqslant 0}\big(1-q^{-n-1}\big)\big(1+xq^{-n}\big)\left(1+\frac{q^{-n-1}}{x}\right),$$

le développement en produit étant la triple formule de Jacobi. On a les propriétés suivantes.

Adresses e-mail : ramis@picard.ups-tlse.fr (J.-P. Ramis); zhang@agat.univ-lille1.fr (C. Zhang).

S1631-073X(02)02586-4/FLA

(i) Si $x \in \mathbb{C}^*$, on a $\theta(qx) = qx\theta(x)$, ce qui donne : $\theta(q^n x) = q^{n(n+1)/2} x^n \theta(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que, étant donnés $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{C}^*$, si $d_q(x; [-1]) \geqslant \varepsilon$, alors (cf. le Lemme 1.3.1 de [8], avec une adaptation évidente) :

$$C\varepsilon\theta_{|q|}\big(|x|\big) \leqslant \big|\theta(x)\big| \leqslant \theta_{|q|}\big(|x|\big),$$

où $x \mapsto \theta_{|q|}(x)$ est la fonction obtenue en substituant $|q|$ à q dans la définition de $\theta(x)$.

Une série $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ sera dite *q-Gevrey d'ordre un* s'il existe des constantes $C > 0$, $A > 0$ telles que $|a_n| < CA^n |q|^{n(n-1)/2}$. L'ensemble de ces séries sera noté $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

1. Une notion de développement asymptotique q-Gevrey

Nous proposons la définition suivante, motivée par le Théorème 1.3.2 de [8].

DÉFINITION 1.1. – Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\hat{f} = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière et soit f une fonction définie et analytique dans un ouvert de la forme $\{x \in \mathbb{C}^* : |x| < r\} \setminus [-\lambda]$. On notera $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ ou, plus précisemment, $f \sim_{q;1}^{[\lambda]} \hat{f}$, et on dira que f admet $\hat{f}$ pour *développement asymptotique q-Gevrey d'ordre un en* 0 *le long de* $[\lambda]$, s'il existe des constantes $C > 0$, $A > 0$ telles que, pour tout $\rho \in]0, \infty[$ et tout $r > 0$ suffisamment petit, on ait :

$$\left| f(x) - \sum_{0 \leqslant m < n} a_m x^m \right| < C\rho A^n |q|^{n(n-1)/2} |x|^n$$

si $0 < |x| \leqslant r$, $d_q(x; [-\lambda]) \geqslant 1/\rho$ et $n \in \mathbb{N}$.

Lorsque $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$, on vérifie aussitôt les propriétés suivantes.

(i) Lorsque $r > 0$ est assez petit, les points singuliers de la fonction f dans le disque pointé $0 < |x| < r$, s'il y en a, se situent tous sur la spirale $[-\lambda]$ et ce sont des pôles simples.

(ii) On a $f \in \mathbb{C}\{x\}$ si, et seulement si, il existe une q-spirale $[\mu]$ distincte de $[\lambda]$ et telle que $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\mu]}$.

THÉORÈME 1.2. – *Une fonction $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ est de développement nul si, et seulement si, il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que la fonction $x \mapsto f(x)\theta(q^m\lambda/x)$ puisse se prolonger en une fonction analytique dans un disque de centre* 0 *et de rayon non nul.*

COROLLAIRE 1.3. – *Soient $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ et $g \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$; on suppose que leurs développements asymptotiques sont égaux. Alors on a $f = g$ si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

(i) *Il existe une suite (c_n) tendant vers zéro dans $\{x \in \mathbb{C}^* : |x| < r\} \setminus [-\lambda]$ telle que $f(c_n) = g(c_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Pour tout entier n suffisamment grand, le résidu de f en $x = -\lambda q^{-n}$ est égal à celui de g correspondant.*

2. Transformations de Borel et Laplace q-analogues

Appelons *transformation de Borel* (*d'ordre un*) *formelle q-analogue* l'unique automorphisme noté $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}$, continu pour la topologie x-adique, de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[[x]]$ sur $\mathbb{C}$ qui envoie chaque monôme x^n sur $q^{-n(n-1)/2}x^n$. Soit $\widehat{\mathcal{L}}_{q;1}$ l'inverse de $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}$; si $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\widehat{\mathcal{L}}_{q;1} x^n = q^{n(n-1)/2} x^n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{(q^m\lambda)^n}{\theta(q^m\lambda/x)}.$$

THÉORÈME 2.1 (q-analogue de Borel–Ritt Gevrey). – *Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Soit φ une fonction analytique dans un disque ouvert de centre zéro et de rayon r $(0 < r < \infty)$, fixons n_0 un entier relatif tel que $|\lambda q^{n_0}| < r$ et* *posons, pour tout* $x \in \mathbb{C}^* \setminus [-\lambda]$:

$$f(x) = \sum_{n \leqslant n_0} \frac{\varphi(q^n \lambda)}{\theta(q^n \lambda / x)}.$$

Alors $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ *et son développement asymptotique est égal à* $\widehat{\mathcal{L}}_{q;1}\varphi$.

Par conséquent, l'application qui à chaque élément de $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ *associe son développement asymptotique est surjective de* $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ *sur* $\mathbb{C}[[x]]_{q;1}$.

Soit $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$. On choisit un $r > 0$ suffisamment petit et tel que $r \notin |\lambda||q|^{\mathbb{Z}}$, de sorte que le cercle $\mathcal{C}(0; r)$ appartient au domaine de définition de f. Soit n_r le plus petit entier tel que $|\lambda q^{-n_r}| < r$, et choissions ensuite un $\varepsilon > 0$ suffisamment petit de telle manière que, si $n \geqslant n_r$, on ait l'inclusion $\mathcal{C}(-\lambda q^{-n}; \varepsilon |q|^{-n}) \subset \{x \in \mathbb{C}^* : |x| < r\}$; posons enfin

$$\Gamma_{r,\varepsilon}^N = \mathcal{C}(0; r) - \sum_{n=n_r}^{N} \mathcal{C}\big(-\lambda q^{-n}; \varepsilon |q|^{-n}\big)$$

pour tout entier $N \geqslant n_r$.

THÉORÈME 2.2 (Transformée de Borel q-analogue). – *Si* $f \sim_{q;1}^{[\lambda]} \hat{f}$ *et que* φ *est la fonction somme de* $\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat{f}$, *alors on a* :

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{N \to \infty} \int_{\Gamma_{r,\varepsilon}^N} f(x) \theta\left(\frac{\xi}{x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{C}^*$ *de module suffisamment petit.*

En effet, par Cauchy chaque contour d'intégration $\Gamma_{r,\varepsilon}^N$ ci-dessus peut être remplacé par le cercle $\mathcal{C}(0; \varepsilon |q|^{-N})$; la convergence recherchée, pour $N \to \infty$, s'en déduit avec la décomposition $f = \hat{f}_N + R_N(f, \hat{f})$, la somme partielle $\hat{f}_N$ d'ordre N de $\hat{f}$ donnant lieu à celle de φ correspondante.

Lorsque f est analytique au voisinage de zéro, l'intégrale étudiée dans le théorème ci-dessus peut être calculée uniquement sur le cercle $\mathcal{C}(0; r)$. Pour une interprétation thermodynamique de cette formule de convolution multiplicative (avec une variante de θ), nous nous référons à la formule (28.14) de [2], p. 353.

3. Résidus et prolongements dans la q-spirale

Appelons *espace des suites* q*-Gevrey d'ordre un* (*resp. moins un*) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ constitué des suites $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$, $C > 0$, $A > 0$ avec ceci : $c_n = 0$ si $n < n_0$, $|c_n| \leqslant C A^n |q|^{n(n-1)/2}$ (resp. $\leqslant C A^n |q|^{-n(n-1)/2}$) si $n \geqslant n_0$; cet espace sera noté $\mathbb{C}_{q;1}^{\mathbb{Z}+}$ (resp. $\mathbb{C}_{q;-1}^{\mathbb{Z}+}$). On munit ensuite $\mathbb{C}_{q;\pm 1}^{\mathbb{Z}+}$ d'une relation d'équivalence notée $\equiv$: on a $(c_n) \equiv (d_n)$ si, et seulement si, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $c_n = d_n$ pour tout entier $n \geqslant N$. On obtient ainsi les espaces $\mathbb{C}_{q;1}^{\mathbb{Z}+}/\!\equiv$ et $\mathbb{C}_{q;-1}^{\mathbb{Z}+}/\!\equiv$.

Soit $\mathcal{O}_0$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ constitué des germes de fonctions analytiques en zéro du plan complexe.

THÉORÈME 3.1. – *L'application qui associe à chaque fonction* $f \in \mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ *ses résidus en les points* $-\lambda q^{-n}$ *pour les entiers n suffisamment grands induit un isomorphisme, noté* $\mathcal{R}$, *de* $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}/\mathcal{O}_0$ *sur* $\mathbb{C}_{q;-1}^{\mathbb{Z}+}/\!\equiv$; *l'application inverse* $\mathcal{R}^{-1}$ *est donnée par la sommation de Mittag–Leffler rappelée ici* : *si* $(c_n) \in \mathbb{C}_{q;-1}^{\mathbb{Z}+}/\!\equiv$, *on pose*

$$\mathcal{R}^{-1}\big((c_n)\big) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{x + \lambda q^{-n}} \mod \mathcal{O}_0.$$

En termes de q-intégrale [1], p. 19, on a

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{c_n}{x+\lambda q^{-n}}=\frac{1}{1-q^{-1}}\int_0^1\frac{f(u)}{x+\lambda u}\,\mathrm{d}_q u$$

si $f(q^{-n})=c_n q^n$. L'application $\mathcal{R}^{-1}$ définie ci-dessus est alors un q-analogue de la formule suivante (cf. [3]), p. 176, dite de *Cauchy–Heine*, laquelle permet de recomposer, modulo les germes de fonctions analytiques au voisinage de $x=0$, une fonction « multivaluée » F à partir de sa variation $\operatorname{var} F$ connue sur $[0,1]$:

$$F(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^1\frac{\operatorname{var}F(u)}{x+u}\,\mathrm{d}u.$$

THÉORÈME 3.2. – *Si* $f\sim_{q;1}^{[\lambda]}\hat f$ *et* $\varphi=\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}\hat f$*, alors il existe une unique suite* $(c_n)\in\mathbb{C}_{q;1}^{\mathbb{Z}+}/\equiv$ *telle que* :

$$f(x)=\sum_{n\leqslant n_0}\frac{\varphi(\lambda q^n)}{\theta(\lambda q^n/x)}+\sum_{n>n_0}\frac{c_n}{\theta(\lambda q^n/x)},$$

où n_0 *est un entier suffisamment petit.*

Autrement dit, l'espace vectoriel $\mathbb{A}_{q;1}^{[\lambda]}$ *est isomorphe à l'espace produit* $\mathbb{C}\{\xi\}\times(\mathbb{C}_{q;1}^{\mathbb{Z}+}/\equiv)$.

La série $\hat f$ sera dite *sommable suivant la spirale* $[\lambda]$ si φ peut se prolonger en une fonction analytique et à croissance q-exponentielle d'ordre un dans un connexe W contenant toutes les q-spirales $[\mu]$ suffisamment voisines de $[\lambda]$: il existe un voisinage U de λ dans $\mathbb{C}^*$ tel que $\bigcup_{\mu\in U}[\mu]\subset W$. Lorsque c'est le cas, on définit $\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}\varphi$ de manière évidente.

D'après le Théorème 1.2.1 de [8] (avec q réel), toute solution formelle d'une équation aux q-différences linéaire et à coefficients analytiques est sommable suivant presque toutes les q-spirales sauf un nombre fini lorsque le polygone de Newton de l'équation considérée admet une unique pente valant un. La seconde partie du même article montre que, pour les séries hypergéométriques confluentes (basiques) du type Kummer, le procédé de sommation $\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}\circ\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}$ converge, quand q tend vers un, vers la sommation classique de Borel–Laplace.

Dans [5], on étendra la sommation $\mathcal{L}_{q;1}^{[\lambda]}\circ\widehat{\mathcal{B}}_{q;1}$ au cas de « niveaux multiples ».

Références bibliographiques

[1] G. Gasper, M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, in: Encycl. Math. Appl., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[2] R. Godement, Analyse mathématique, Tome II, Springer, 1998.

[3] B. Malgrange, Sommation des séries divergentes, Exposition. Math. 13 (2–3) (1995) 163–222.

[4] J.P. Ramis, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) I (1) (1992) 53–94.

[5] J.P. Ramis, J. Sauloy, C. Zhang, Classification analytique locale des équations aux q-différences linéaires et irrégulières (2002), en cours.

[6] C. Zhang, Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, Ann. Inst. Fourier 49 (1999) 227–261.

[7] C. Zhang, Transformations de q-Borel–Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 331 (2000) 31–34.

[8] C. Zhang, Une sommation discrète pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques : théorie générale et exemples, in: Workshop Differential Equations and Stokes Phenomenon, 28–30 mai 2001, Groningen.