

Un invariant d'isotopie lisse pour des surfaces dans une variété de dimension 4

Cédric Darolles[†]

CNRS UMR 5580, UFR MIG, Université Toulouse III, 31062 Toulouse cedex 04, France

Reçu le 2 mai 2002 ; accepté le 9 juillet 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé

Nous construisons un invariant d'isotopies lisses pour des surfaces lissement plongées dans des variétés de dimension 4. Cet invariant distingue, à isotopie lisse près, des tores ou des bouteilles de Klein qui sont régulièrement homotopes dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, qui ont le même complémentaire et le même rack fondamental. *Pour citer cet article : C. Darolles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 811–815.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An invariant of smooth isotopy for surfaces in a 4-manifold

Abstract

We construct an invariant of smooth isotopy for surfaces smoothly embedded in 4-manifolds. This invariant is used to distinguish smooth embeddings of tori or Klein bottles that are regular homotopic in $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, and that have the same complement and the same fundamental rack. *To cite this article: C. Darolles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 811–815.*

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Consider an oriented knot K embedded in $F^2 \times \mathbb{R}$, where F^2 is a connected oriented surface that is not simply connected, possibly non compact, possibly with boundary. We suppose that K is in general position with respect to the projection on F^2 . Consider an isotopy of K on itself. The result T is a torus or a Klein bottle, depending on the preservation of the orientation through the isotopy. If F^2 is oriented then T can be seen as a 2-dimensional braid in the following sense:

DEFINITION 0.1. – Let M^4 be $F^2 \times \mathbb{R} \times S^1$. Let T be an oriented surface smoothly embedded in M^4 . The surface $T \hookrightarrow M^4$ is a (closed) 2-dimensional braid if the restriction $\arg|_T$ on T of the natural projection $\arg: M^4 \rightarrow S^1$ is a submersion. (See also [3].)

Consider the crossings of the projection of K on F^2 . By splitting the diagram with respect to the orientation of the knot at a crossing p , we obtain two oriented knot diagrams. Let K_p^+ be the one for which the undercrossing goes to the overcrossing. We associate to the crossing p a *homological marking*, which is the homology class represented by K_p^+ .

Let $(a, b) \in [(H_1(F^2))/\langle [K] \rangle]^2$ be fixed, with $a \neq b$, $a \neq 2b$, $b \neq 2a$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Let $s \in S^1$ such that $K_s = T \cap \arg^{-1}(s)$ is generic. For all $p \in K_s$ with homological marking “ a ” and for all $p \in K_s$ with homological marking “ $a - b$ ” we consider p with, respectively, the two weights $m(p)$

(see (1)) and $n(p)$ (see (2)) in Definition 1.2 obtained by summing over Gauss diagrams of the knot. A *Gauss diagram* is an oriented circle with oriented chords, obtained by connecting points on the circle mapped to a crossing of $\text{pr}(K)$ and orienting them from the preimage of the undercrossing to the preimage of the overcrossing.

DEFINITION 0.2. – Let $(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$ be the union, for generic $s \in S^1$ of all the crossings p with the marking a and of all the crossings p with marking $a - b$. The set $(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$ is an open non-connected and non-oriented manifold. The connected components S_p are the traces of the different crossings p through the pieces of isotopy for which s is generic.

We pick an orientation $(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$ so that the degrees of the projection of each oriented connected component S_p over S^1 correspond to the signs of the weight associated to the crossing p if this weight is non-zero. If the weight is zero we do not orient the component. Let $S_{(a,b)}^\circ$ be the union with multiplicities of the oriented components of $(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$.

Here, each connected component S_p enters into $S_{(a,b)}^\circ$ with multiplicity $|m(p)|$ respectively $|n(p)|$. Let $S_{(a,b)}$ be the closure of $S_{(a,b)}^\circ \subset F^2$.

LEMMA 0.3. – $S_{(a,b)}$ is a cycle which defines an element $[S_{a,b}]$ in $H_1(F^2, \mathbb{Z})$.

DEFINITION 0.4. – Let Σ be the subset in $(H_1(F^2; \mathbb{Z}))^2$ defined by $\{a = b, \text{ or } a = 2b, \text{ or } b = 2a, \text{ or } a = 0, \text{ or } b = 0\}$. I_T is defined by:

$$I_T : (H_1(F^2, \mathbb{Z}) \times H_1(F^2, \mathbb{Z})) \setminus \Sigma \rightarrow H_1(F^2, \mathbb{Z}) \times H_1(S^1, \mathbb{Z})$$

$$(a, b) \mapsto I_T(a, b) = [S_{a,b}] \times \text{deg}(S_{a,b} \rightarrow S^1)$$

THEOREM 0.5. – Let $T^t \hookrightarrow M^4, t \in [0, 1]$, be any smooth isotopy from the 2-dimensional braid T^0 to the 2-dimensional braid T^1 (we do not suppose that $T^t, t \in]0, 1[$, is a 2-dimensional braid).

We suppose that $(K_s)^0$ is connected and not contained in any 3-ball, $D^3 \hookrightarrow F^2 \times \mathbb{R}$, for every $s \in S^1$. Then $I_{T^0} \equiv I_{T^1}$.

1. Introduction

Dans cette note nous allons construire un invariant d'isotopie lisse pour des surfaces plongées dans des 4-variétés. La situation est la suivante : soit F^2 une surface connexe orientée et non simplement connexe. Soit $M^4 = F^2 \times \mathbb{R} \times S^1$ et soit K un nœud plongé dans $F^2 \times \mathbb{R}$, en position générique, c'est-à-dire que les seules singularités de la projection du nœud sur F^2 sont des croisements simples. Notons $[K]$ la classe d'homologie de K dans $H_1(F^2; \mathbb{Z})$. Considérons alors la surface S obtenue à partir du cylindre $K \times [0, 1]$, en recollant à l'aide d'une isotopie h du nœud K sur lui-même, les bords $K \times \{0\}$ et $K \times \{1\}$ du cylindre. La surface S que nous obtenons lorsque F^2 est orientée est une tresse de dimension 2 dans le sens suivant :

DÉFINITION 1.1. – Soit $M^4 = F^2 \times \mathbb{R} \times S^1$. Soit T une surface connexe orientée lissement plongée dans M^4 . La surface $T \hookrightarrow M^4$ est appelée une *tresse fermée de dimension 2* si la restriction à T de la projection sur $S^1, \text{arg} : M^4 \rightarrow S^1$ est une submersion.

Cette définition généralise bien celle des tresses classiques : Si nous remplaçons F^2 par \mathbb{R} et T par une union de cercles, nous obtenons la notion de tresse fermée habituelle.

Cette définition implique que la surface T , si elle est orientable, est un tore. Lorsque l'isotopie h inverse l'orientation de K , la surface obtenue est une bouteille de Klein plongée dans M^4 . On note K_s le nœud $K \times \{s\} \hookrightarrow F^2 \times \mathbb{R} \times \{s\}$.

Nous allons considérer les croisements de la projection de K sur F^2 . La désingularisation du diagramme de K en un croisement p donne lieu à deux diagrammes de nœuds orientés. Celui de ces deux diagrammes où la branche de dessous se prolonge par la branche de dessus est noté K_p^+ .

Marquons en homologie chaque croisement p à l'aide de la classe d'homologie $[K_p^+] \in H_1(F^2; \mathbb{Z})/\langle [K] \rangle$ et associons à chacun un signe (« writhe ») $w(p)$ de la manière habituelle. Soient s_1, \dots, s_i les points, en nombre fini, en lesquels la projection de K sur F^2 a une autotangence ou un point triple. On dira que s est générique si $s \in S^1 \setminus \{s_1, \dots, s_i\}$.

A tout diagramme générique d'un nœud correspond un *diagramme de Gauss*, qui est un cercle orienté avec des cordes orientées, obtenues en reliant sur le cercle les deux points correspondant à un croisement de $\text{pr}(K)$; elles sont orientées de la préimage du point appartenant à la branche de dessous à la préimage du point appartenant à la branche de dessus. On peut ainsi sommer des données liées aux croisements de $\text{pr}(K)$ sur des configurations de cordes présentes dans ce diagramme de Gauss (voir [4]).

Fiedler a construit un invariant appelé W_T d'isotopie lisse pour des tores dans M^4 en utilisant l'unique invariant de degré 1 pour les nœuds dans $F^2 \times \mathbb{R}$. On ignorait si sa construction pouvait être généralisée pour construire des invariants d'isotopie de tores à partir des invariants de nœuds de degrés plus grands. Nous montrons que c'est le cas. Soit $(a, b) \in (H_1(F^2; \mathbb{Z}))^2 \setminus \Sigma$. La définition suivante est la clef de notre généralisation de l'invariant W_T .

DÉFINITION 1.2. – Soit $s \in S^1$ générique. Pour tout croisement $p \in K_s$ de marquage en homologie a , on regarde p avec le poids associé :

$$m(p) = \sum_{\mathbb{D}_{a,b}} w(p)w(q) + \sum_{\mathbb{D}_{a,b-a}} w(p)w(q). \tag{1}$$

Pour tout croisement $p \in K_s$ de marquage en homologie $a - b$ on regarde p avec le poids associé :

$$n(p) = \sum_{\mathbb{D}_{a-b}} w(p)w(q). \tag{2}$$

Soit $(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$ l'union, pour $s \in S^1$ générique, des images dans $F^2 \times \{s\} = F^2$ de tous les croisements p de marquage en homologie a et de tous les croisements p de marquage en homologie $a - b$.

$(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$ est une variété ouverte non connexe et non orientée. Les composantes connexes S_p correspondent aux traces des différents croisements p lors des morceaux d'isotopies au cours desquels s est générique.

On oriente $(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$ de façon que le degré de la projection de chaque composante connexe S_p sur S^1 corresponde au signe du poids associé au croisement p si ce poids est non nul. Si le poids est nul, on n'oriente pas la composante en question.

$S_{(a,b)}^\circ$ est l'union avec multiplicités des composantes orientées de $(S_{(a,b)}^\circ)^\pm$. Ici, chaque composante connexe orientée de S_p entre dans $S_{(a,b)}^\circ$ avec la multiplicité $|m(p)|$ respectivement $|n(p)|$. On note $S_{(a,b)}$ l'adhérence de $S_{(a,b)}^\circ \in F^2$.

Le lemme suivant est d'une importance fondamentale.

LEMME 1.3. – $S_{(a,b)}$ est un cycle qui définit un élément $[S_{(a,b)}]$ dans $H_1(F^2; \mathbb{Z})$.

Démonstration. – En les points s_j qui correspondent aux autotangences, il se produit une apparition ou une disparition de 2 croisements de signes opposés et de marquages identiques. Les configurations de Gauss qui apparaissent ou disparaissent 2 par 2 sont les mêmes, mais elles sont comptées avec des produits $w(p)w(q)$ de signes opposés (voir [1]). Par conséquent, les poids associés s'annulent mutuellement dans le point d'autotangence.

Le Théorème 2.1 de [4] dit que $m(p) + n(p)$ est invariant pour le passage des nœuds K_s par un nœud K_{s_i} qui a un point triple ordinaire dans la projection sur F^2 . Par conséquent, le bord de la chaîne $S_{(a,b)}$ est nul dans le point triple et $S_{(a,b)}$ est un cycle entier. \square

Maintenant, nous pouvons définir notre invariant I_T .

DÉFINITION 1.4. – I_T est donné par :

$$I_T : (H_1(F^2, \mathbb{Z}) \times H_1(F^2, \mathbb{Z})) \setminus \Sigma \rightarrow H_1(F^2, \mathbb{Z}) \times H_1(S^1, \mathbb{Z})$$

$$(a, b) \mapsto I_T(a, b) = [S_{a,b}] \times \text{deg}(S_{a,b} \rightarrow S^1)$$

Remarque 1. – La restriction

$$I_T : (H_1(F^2; \mathbb{Z}) \times H_1(F^2; \mathbb{Z})) \setminus \Sigma \rightarrow H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

coincide avec l'invariant I_K de degré 2 de nœud défini dans [4] pour le nœud $K = K_s = \arg^{-1}(s) \cap T \hookrightarrow F^2 \times \mathbb{R} \times \{s\}$ (et il est indépendant du s choisi).

Le théorème suivant est notre résultat principal. Il généralise la construction de l'invariant W_T de « degré 1 » pour des tores plongés dans M^4 (voir [3]) à un invariant I_T de « degré 2 ».

THÉORÈME 1.5. – Soient $T^0, T^1 \hookrightarrow F^2 \times \mathbb{R} \times S^1$ des tresses fermées de dimension 2. On suppose que $K_s^0 = T^0 \cap \arg^{-1}(s)$ est connexe et non contenu dans une boule de dimension 3, $D^3 \hookrightarrow F^2 \times \mathbb{R} \times \{s\}$.

Soit $T^t, t \in [0, 1]$, une isotopie lisse dans M^4 qui relie T^0 à T^1 . (On ne suppose pas que $T^t, t \in]0, 1[$, est une tresse fermée.) Alors $I_{T^0} \equiv I_{T^1}$, où I_T est l'invariant introduit dans la Définition 1.4.

2. Esquisse de la démonstration du théorème

On a

$$\text{deg}(S_{a,b} \rightarrow S^1) = m(p) + n(p) = \sum_{\substack{\oplus \\ a \ b}} w(p)w(q) + \sum_{\substack{\oplus \\ a \ b-a}} w(p)w(q) + \sum_{\substack{\oplus \\ b \ a-b}} w(p)w(q).$$

Il vient $\text{deg}(S_{a,b} \rightarrow S^1) = I_{K_s}^3(a, b)$, or $I_{K_s}^3(a, b)$ est un invariant de nœuds (voir [4]).

Le reste de la démonstration comporte deux étapes. Dans un premier temps nous montrons que I_T est invariant par les isotopies restant dans la catégorie des tresses fermées de dimension 2. Ces isotopies de tresses correspondent à des isotopies d'isotopies de nœuds. On montre l'invariance de I_T au cas par cas pour le passage par les singularités génériques d'une famille à deux paramètres de projections de nœuds (voir [1]).

Il nous faut ensuite étudier l'invariance par les isotopies lisses. On suit de très près la démonstration du Théorème 6.1 de [3].

Le problème est que $\arg : T^t \rightarrow S^1$ n'est plus une submersion pour t générique, mais a des singularités de Morse. Néanmoins, comme ces singularités de Morse apparaissent et disparaissent dans des singularités de type « naissance » respectivement « mort », on peut contrôler les entrelacs $(T^t)_s$: chaque entrelacs $(T^t)_s$ est la réunion d'un nœud K_s^t qui est isotope à K_s^0 , et d'un entrelacs trivial U_s^t . De plus U_s^t borde un système de disques D_s^t plongés de façon canonique (voir [3]). Le système de disques n'est pas continu par rapport à t à cause du passage par un tore T^{t_0} tel que $\arg : T^{t_0} \rightarrow S^1$ a deux points critiques avec la même valeur. Néanmoins, on peut utiliser les disques D_s^t pour définir l'analogie du cycle $S_{(a,b)}$ pour tous les tores T^t . Soit $p \in (T^{t_0})_{s_0}$ un point critique d'indice 1 de $\arg : T^{t_0} \rightarrow S^1$. Quand s passe par s_0 , il se produit une fusion d'un nœud trivial $u_{s_0-\varepsilon}^t \subset U_{s_0-\varepsilon}^t$ avec $K_{s_0-\varepsilon}^t$ dans p . Le nœud $u_{s_0-\varepsilon}^t$ borde un disque $d_{s_0-\varepsilon}^t \subset D_{s_0-\varepsilon}^t$. On utilise le disque $d_{s_0-\varepsilon}^t$ pour déformer par une isotopie $K_{s_0+\varepsilon}^t$ en $K_{s_0-\varepsilon}^t$. En faisant cette opération pour tous

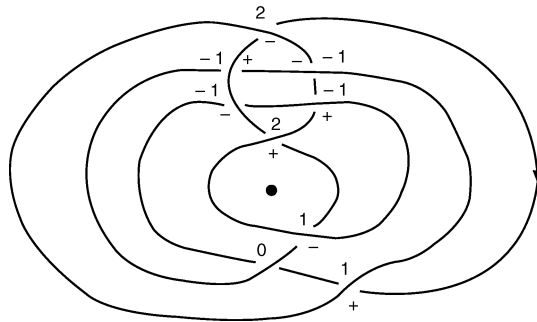


Figure 1. – Un nœud.
Figure 1. – A knot.

les points critiques p d'indice 1 dans T^t , on peut définir $S_{(a,b)}^t \subset F^2$ pour chaque t en analogie avec $S_{(a,b)}$ pour T^0 . Le lemme suivant est démontré dans [1] (voir aussi [3] où il est démontré pour l'invariant W_T).

LEMME 2.1. – $S_{(a,b)}^t \subset F^2$ est un cycle pour chaque t et on a $[S_{(a,b)}^t] = [S_{(a,b)}^0]$ pour chaque $t \in [0, 1]$.

Le Théorème est une conséquence immédiate du Lemme 2.1.

Remarque 2. – Le cas de la bouteille de Klein T est complètement analogue au cas du tore parce que le writhe d'un croisement ne dépend pas de l'orientation du nœud.

3. Un exemple

Soit $F^2 = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ et soit $K \hookrightarrow F^2 \times \mathbb{R}$ le nœud de la Fig. 1 (l'axe $(0, 0) \times \mathbb{R}$ est représenté par le point). $[K] = 0$ dans $H_1(F^2; \mathbb{Z})$ et les writhes des croisements ainsi que leurs marquages homologiques sont indiqués aussi sur la Fig. 1.

Soit pour chaque $n \in \mathbb{Z}$ le tore $T_n \hookrightarrow ((\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)) \times \mathbb{R}) \times S^1 \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, formé à partir du nœud K en faisant tourner ce nœud n fois dans le sens trigonométrique autour de l'axe $(0, 0) \times \mathbb{R}$.

On calcule facilement que $W_{T_n} \equiv (0, 0)$ mais $I_{T_n} : (a = 1, b = -1) \mapsto (-2n, -2)$. Par conséquent, les tores T_n ne sont pas lissement isotopes deux à deux. Evidemment, tous les T_n ont le même complémentaire dans $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Le nœud K est régulièrement homotope au nœud trivial dans $(\mathbb{R}^2 \times (0, 0)) \times \mathbb{R}$. En faisant cette homotopie simultanément pour chaque $s \in S^1$, on voit que tous les T_n sont deux à deux régulièrement homotopes dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

De plus, on peut démontrer que quelquefois, le rack fondamental (qui est un raffinement du groupe fondamental du complément) ne distingue pas le sens de la rotation, c.a.d. ne distingue pas T_n de T_{-n} (voir [1]). La question suivante reste ouverte : Y a-t-il parmi les tores T_n des tores qui sont topologiquement isotopes ?

Références bibliographiques

- [1] C. Darolles, Invariants d'isotopies pour surfaces différentiables dans des 4-variétés, Thèse doctorale, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- [2] C. Darolles, Isotopy invariants for torus and Klein bottles in 4-manifolds, in preparation.
- [3] T. Fiedler, Isotopy invariants for smooth tori in 4-manifolds, *Topology* 40 (2001) 1415–1435.
- [4] T. Fiedler, Gauss Diagram Invariants for Knots and Links, *Mathematics and Its Application*, Vol. 532, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [5] D. Goldsmith, Motion of links in the 3-sphere, *Math. Scand.* 50 (1982) 167–205.
- [6] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series, Vol. 7, Publish or Perish, 1976.