C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 581–586

Théorie des nombres/*Number Theory*
(Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*)

Sur les déformations p-adiques des formes de Saito–Kurokawa

Christopher Skinner [a], Eric Urban [b]

[a] Department of Mathematics, University of Michigan, 2074 East Hall, Ann Arbor, MI 48109-1109, USA
[b] LAGA, Institut Galilée, Universite Paris-Nord, avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 10 juin 2002 ; accepté après révision le 2 septembre 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé Soit f une forme modulaire cuspidale propre pour les opérateurs de Hecke de poids $2k-2 \geqslant 2$ et niveau 1. Soient p un nombre premier ordinaire pour f et V_f la représentation galoisienne p-adique associée de poids $2k-3$. On montre que si la fonction zêta de f s'annule en $s=k-1$ avec un ordre impair, le groupe de Selmer $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(k-1))$ est infini. ***Pour citer cet article : C. Skinner, E. Urban, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 581–586.***

p-adic deformations of Saito–Kurokawa lifts

Abstract Let f be a cuspidal eigenform of weight $2k-2 \geqslant 2$ and level 1. Suppose p is an ordinary prime for f and V_f is the p-adic representation of weight $2k-3$ associated to f. We show that if the zeta function of f vanishes at $s=k-1$ to odd order, then the Selmer group $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(k-1))$ is infinite. ***To cite this article: C. Skinner, E. Urban, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 581–586.***

Abridged English version

Let $f=\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ be a normalized cuspidal eigenform of weight $2k-2 \geqslant 2$ for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Let p be a prime and V_f the p-adic Galois representation associated to f by Deligne. The Hodge–Tate weights of V_f are $\{0, 2k-3\}$ and the motivic weight is $2k-3$. For every integer n we define, following Bloch–Kato, the Selmer group $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(n))$ to be the kernel of the restriction map

$$H^1\big(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), V_f(n)\big) \to \bigoplus_{\ell \neq p} H^1\big(I_\ell, V_f(n)\big) \oplus H^1\big(I_p, V_f(n) \otimes B_{\mathrm{cris}}\big),$$

where for every prime ℓ, I_ℓ is an inertia group at ℓ and B_{cris} denotes Fontaine's ring of p-adic periods.

The zeta function of f, $L(f,s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, has a holomorphic continuation to the entire complex plane and satisfies a functional equation of the form

$$L(f,s)=\varepsilon(s) L(f, 2k-2-s).$$

Adresses e-mail : cskinner@umich.edu (C. Skinner); urban@zeus.math.univ-paris13.fr (E. Urban).

S1631-073X(02)02540-2/FLA

Let $\varepsilon_f = \varepsilon(k-1) = \pm 1$. In this note we describe the proof of the following theorem, the details of which will appear in a subsequent paper.

THEOREM. – *If $\varepsilon_f = -1$ (i.e., $L(f,s)$ vanishes at $s = k-1$ to odd order), then for every prime p such that f is ordinary at p (i.e., $|a_p|_p = 1$)*

$$H^1_f\big(\mathbb{Q}, V_f(k-1)\big) \neq 0.$$

We prove the same result for forms of arbitrary level and trivial character under certain local hypotheses on the Galois representations associated to Siegel modular forms (see Hypothesis 4.2 below and the comments following it). To prove the theorem we construct a suitable extension of V_f using Galois representations associated to Siegel modular forms that are congruent modulo large powers of p to a suitable Saito–Kurokawa lift of f. More precisely, we consider a p-stabilization of this lift and show that it belongs to a two-variable family of p-adic Siegel cusp forms. A crucial step in our proof is to establish that the Galois representations associated to the forms in this family are generically irreducible. Using this we construct a non-trivial extension of V_f of the desired type. The local properties of this extension are deduced from the local properties of the representations in this family.

The idea of using Saito–Kurokawa lifts to prove results of this type is due to G. Harder, but his construction uses geometric methods. Moreover, he has only verified that the extension he constructs is non-trivial when $k-1$ is a simple zero of $L(f,s)$. It is natural to ask whether the extension we construct coincides with the one Harder has constructed.

When the zero is simple and $k = 2$ our result has been proved by B. Gross and D. Zagier. When the zero of the corresponding p-adic L-function is simple and $k > 2$ J. Nekovar has shown that the Selmer group has rank exactly one. When the zero is of higher order and $k = 2$ our result follows from recent work of J. Nekovar on the parity conjecture.

1. Introduction

Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ une forme modulaire de poids $2k-2 \geqslant 2$ pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On suppose f propre pour tous les opérateurs de Hecke et normalisée. Soient p un nombre premier et V_f la représentation galoisienne p-adique attachée à f par Deligne. Ses poids de Hodge–Tate sont $\{0, 2k-3\}$ et son poids motivique $2k-3$ (on prend ici la convention *géométrique* que $\mathbb{Q}_p(1)$ est de poids de Hodge–Tate -1 et de poids motivique -2). Pour tout entier n, rappelons qu'on définit, en suivant Bloch–Kato, le groupe de Selmer $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f(n))$ comme le noyau du morphisme de restriction suivant :

$$H^1\big(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), V_f(n)\big) \to \bigoplus_{\ell \neq p} H^1\big(I_\ell, V_f(n)\big) \oplus H^1\big(I_p, V_f(n) \otimes B_{\mathrm{cris}}\big),$$

où pour tout nombre premier ℓ, on note I_ℓ un sous-groupe d'inertie en ℓ et B_{cris} l'anneau des périodes p-adiques de Fontaine.

La fonction Zêta de f, $L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ admet un prolongement holomorphe au plan complexe et vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$L(f,s) = \varepsilon(s) L(f, 2k-2-s).$$

Soit $\varepsilon_f = \varepsilon(k-1) = \pm 1$. L'objet de cette note est d'exposer la stratégie de la preuve du théorème suivant dont les détails sont réservés à un article ultérieur.

THÉORÈME 1.1. – *Supposons que $\varepsilon_f = -1$ (i.e. $L(f,s)$ s'annule en $s = k-1$ avec un ordre impair), alors pour tout nombre premier p tel que f est ordinaire en p (i.e. $|a_p|_p = 1$), on a*

$$H^1_f\big(\mathbb{Q}, V_f(k-1)\big) \neq 0.$$

1.2. – Un résultat semblable est démontré pour une forme de niveau arbitraire et caractère trivial si l'on admet certaines propriétés locales des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de Siegel cf. Hypothèse 4.2 ci-dessous.

2. Familles p-adiques de formes modulaires de Siegel semi-ordinaires

2.1. *Notations.* – Pour tout anneau unitaire A et $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, on note $M_r(A)$, l'algèbre des matrices carrées de taille r et $\mathrm{GL}_r(A)$ le groupe des matrices inversibles de taille r. Soit G le groupe algébrique des similitudes symplectiques défini par

$$G(A) = G\,\mathrm{Sp}_4(A) = \left\{\gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \in M_4(A) \;\middle|\; {}^t\gamma\iota\gamma = \nu(\gamma)\iota \text{ avec } \nu(\gamma) \in A^\times\right\}$$

avec $\iota = \left(\begin{smallmatrix} 0_2 & -1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{smallmatrix}\right)$. On pose aussi $\mathrm{Sp}_4 = \mathrm{Ker}(\nu)$. Soit B le sous-groupe de Borel de G déterminé par les matrices γ telles que $c_\gamma = 0$ et d_γ soit triangulaire supérieure. On considère aussi le sous-groupe parabolique Q des matrices γ stabilisant la droite fixée par B. Soit T le tore diagonal de G et pour $x, y, z \in A^\times$, on pose $[x, y; z] = \mathrm{diag}(x, y, zx^{-1}, zy^{-1}) \in T(A)$. On plonge GL_2 dans G via $g \mapsto \mathrm{diag}(g, {}^tg^{-1}) \in G\,\mathrm{Sp}_4$. On pose $\mathbb{B} = B \cap \mathrm{GL}_2$ et $\mathbb{T} = T \cap \mathrm{GL}_2$.

Pour tout entier $N \geqslant 1$, soit $\Delta_0(N)$ le sous-groupe des matrices $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ dont la réduction modulo N appartient à $Q(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Pour un nombre premier p, on note également $I_B(p)$ le sous-groupe des éléments $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ dont la réduction modulo p appartient à $B(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Soit $G\,\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})^+$ le sous-groupe de $G\,\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ des élements γ tel que $\nu(\gamma) > 0$. Ce groupe opère sur le demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_2 = \{z \in M_2(\mathbb{C}) \mid {}^tz = z$ et $\mathrm{Im}(z) > 0\}$ par la formule classique $\gamma.z = (a_\gamma z + b_\gamma)(c_\gamma z + d_\gamma)^{-1}$.

2.2. *Formes modulaires de Siegel.* – Pour toute paire d'entiers (k_1, k_2) telle que $k_1 \geqslant k_2 \geqslant 0$, soit V_{k_1,k_2} l'ensemble des polynômes homogènes à deux variables X, Y à coefficients complexes de degré $k_1 - k_2$ muni de l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ définie par

$$\big(\rho_{k_1,k_2}(g).P\big)(X, Y) = (g.P)(X, Y) = \det(g)^{k_2}.P\big((X, Y).g\big).$$

On note χ_{k_1,k_2} le caractère de $\mathbb{T}$ plus haut poids de cette représentation (pour la paire $(\mathbb{B}, \mathbb{T})$).

Pour toute fonction f définie sur $\mathcal{H}_2$ à valeurs dans V_{k_1,k_2} et $\gamma \in G\,\mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})^+$, on pose

$$(f|\gamma)(z) = (f|_{k_1,k_2}\gamma)(z) = \nu(\gamma)^{-3}\rho_{k_1,k_2}(c_\gamma z + d_\gamma)^{-1}.f(\gamma.z)$$

et pour tout sous-groupe de congruence $\Gamma \subset \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$, on considère $S_{k_1,k_2}(\Gamma)$ l'espace des formes de Siegel cuspidales de poids (k_1, k_2) comme l'espace des fonctions holomorphes f satisfaisant $f|_{k_1,k_2}\gamma = f$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ ainsi que certaines conditions de cuspidalité.

2.3. *Algèbre de Hecke.* – Pour $\ell \nmid N$, on considère les opérateurs de Hecke

$$T_{0,\ell} = \Gamma[1, 1; \ell]\Gamma, \qquad T_{1,\ell} = \Gamma\big[1, \ell; \ell^2\big]\Gamma, \qquad \langle\ell\rangle = \Gamma\big[\ell, \ell; \ell^2\big]\Gamma$$

avec Γ un sous-groupe de congruence de niveau N. On note $\mathcal{R}(N)$ l'algèbre de Hecke abstraite sur $\mathbb{Z}$ engendrée par ces opérateurs. Pour toute forme de Siegel $h \in S_{k_1,k_2}(\Gamma)$ propre pour ces opérateurs, on note λ_h le caractère de $\mathcal{R}(N)$ correspondant. On considère également le polynôme de Hecke $Q_\ell(X) \in \mathcal{R}(N)[X]$ défini par :

$$Q_\ell(X) = X^4 - T_{0,\ell}X^3 + \ell\big(T_{1,\ell} + \big(1 + \ell^2\big)\langle\ell\rangle\big)X^2 - \ell^3 T_{0,\ell}\langle\ell\rangle X + \ell^6\langle\ell\rangle^2.$$

2.4. *p-stabilisation.* – Soit Γ un sous-groupe de congruence de niveau N avec $(N, p) = 1$. On pose $\Gamma_0(p) = \Gamma \cap I_B(p)$ et on considère les opérateurs de Hecke en p :

$$U_{0,p} = \Gamma_0(p)[1, 1; p]\Gamma_0(p) \quad \text{et} \quad U_{1,p} = \Gamma_0(p)\big[1, p; p^2\big]\Gamma_0(p).$$

On note $\mathcal{R}(N, p)$ l'algèbre de Hecke abstraite $\mathcal{R}(Np)[U_{0,p}, U_{1,p}]$.

Soit $h \in S_{k_1,k_2}(\Gamma_0(p))$ une forme propre pour les opérateurs de Hecke $T \in \mathcal{R}(N)$. On dit que h est une forme p-stabilisée s'il existe une forme $g \in S_{k_1,k_2}(\Gamma)$ propre pour les opérateurs de Hecke telle que
(i) $h|T = \lambda_g(T)h$ pour tout $T \in \mathcal{R}(Np)$.
(ii) $h|U_{0,p} = \gamma_0 h$ et $h|U_{1,p} = p^{-1}\gamma_0\gamma_1 h$ où γ_0 et γ_1 sont des valeurs propres de $\lambda_g(Q_p(X))$ telles que $\gamma_0\gamma_1 \neq p^{k_1+k_2-3}$.
On dit de plus que h est *semi-ordinaire* si γ_0 est une *unité p-adique*.

2.5. *Espace des poids.* – Soit $\mathbb{C}_p$ la complétion p-adique d'une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{W}$ l'espace rigide analytique sur $\mathbb{Q}_p$ tel que $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{T}(\mathbb{Z}_p), \mathbb{C}_p^\times)$. Les points de $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ de la formes χ_{k_1,k_2} sont appelé points arithmétiques. Si $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est un affinoide étale au dessus de $\mathcal{W}$, un point $x \in \mathcal{V}(\mathbb{C}_p)$ est dit arithmétique de poids (k_1, k_2) si sa projection sur $\mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ vaut χ_{k_1,k_2}. On note $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ l'anneau des fonctions analytique sur $\mathcal{V}$ et $K_\mathcal{V}$ son corps des fractions (lorsque $\mathcal{V}$ est irréductible).

THÉORÈME 2.6. – *Soit h une forme p-stabilisée semi-ordinaire de poids (k_1, k_2) et niveau $\Gamma_0(p)$. Alors il existe un voisinage étale $\mathcal{V}$ de $\chi_{k_1,k_2} \in \mathcal{W}(\mathbb{C}_p)$ et un homomorphisme d'algèbre $\lambda = \lambda_\mathcal{V}$ de $\mathcal{R}(N, p)$ dans $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ tels qu'il existe un ensemble Zariski dense Σ de points arithmétiques de $\mathcal{V}(\mathbb{C}_p)$ tel que pour tout $x \in \Sigma$ de poids $(k_1(x), k_2(x))$, il existe une forme p-stabilisée cuspidale h_x de poids $(k_1(x), k_2(x))$ et niveau $\Gamma_0(p)$ satisfaisant* :
(i) *$h_x|T = \lambda(T)(x)h_x$ pour tout $T \in \mathcal{R}(Np)$.*
(ii) *$h|U_{0,p} = \lambda(U_{0,p})(x)h$ et $h_x|U_{1,p} = p^{k_2(x)-3}\lambda(U_{1,p})(x)h_x$.*

2.7. – Le principe de la démonstration de ce résultat consiste à construire un module de Banach p-adique de formes modulaire de Siegel p-adiques *ordinaires* pour l'opérateur de Hecke $U_{0,p}$ et sur lequel $U_{1,p}$ opère complètement continument et à appliquer la théorie de Fredholm à ce dernier. L'hypothèse de semi-ordinarité permet d'éviter la construction d'un sous-groupe canonique comme dans la théorie de Coleman.

3. Formes de Saito–Kurokawa

THÉORÈME 3.1. – *Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ une forme modulaire elliptique normalisée de niveau N, de poids $2k-2$ et caractère trivial. Supposons que $L(f, s)$ s'annule en $s = k-1$ avec un ordre impair. Alors il existe une forme modulaire de Siegel classique $g = \mathrm{SK}(f)$ pour $\Delta_0(N)$ de poids (k, k) telle que*

$$\lambda_{\mathrm{SK}(f)}\big(Q_\ell(X)\big) = \big(X^2 - a_\ell X + \ell^{2k-3}\big)\big(X - \ell^{k-1}\big)\big(X - \ell^{k-2}\big)$$

pour tout ℓ premier à N.

3.2. – Pour $N = 1$, ce résultat est dû aux travaux de Maass, Kohnen et Zagier. Dans le cas général, cela résulte essentiellement des travaux de I. Piatetski-Shapiro, J.-L.Waldspurger et des calculs explicites de R. Schmidt [5,10,6]. S'il existe des places où la représentation locale associée à f n'est pas dans la série principale, il existe des formes de Saito–Kurokawa même si $L(f, k-1) \neq 0$ mais pour un sous-groupe plus petit que $\Delta_0(N)$. Par ailleurs, si $L(f, s)$ s'annule avec un ordre pair en $s = k-1$, il existe une forme de Saito–Kurokawa avec le bon niveau mais qui n'est pas holomorphe.

3.3. – Soient f une forme modulaire vérifiant les hypothèses du 3.1, et p un nombre premier ne divisant pas N. Notons α et β les racines du polynôme de Hecke $X^2 - a_p X + p^{2k-3}$. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. – *Il existe une forme de Siegel $g_p = \mathrm{SK}_p(f)$ de poids k et niveau $\Delta_0(N, p) = \Delta_0(N) \cap I_B(p)$ telle que*
– *$g_p|T = \lambda_{\mathrm{SK}(f)}(T)g_p$ pour tout opérateur de Hecke $T \in R(Np)$.*
– *$g_p|U_{0,p} = \alpha g_p$ et $g_p|U_{1,p} = \alpha p^{k-2} g_p$.*

Remarque 3.5. – On vérifie immédiatement que $\gamma_0 = \alpha$ et $\gamma_1 = p^{k-1}$ sont des racines du polynôme de Hecke $\lambda_{\mathrm{SK}(f)}(Q_p(X))$. A priori, on aurait pu croire qu'il existe également une forme p-stabilisée avec

$\gamma_0 = \alpha$ et $\gamma_1 = p^{k-2}$; ce qui aurait fourni une forme p-stabilisée *ordinaire* pour les deux opérateurs de Hecke en p. En fait, il n'en ait rien. Cela résulte du fait que la représentation sphérique en p associé à $\mathrm{SK}(f)$ n'est pas égale à toute l'induite d'un caractère non ramifié de $T(\mathbb{Q}_p)$.

4. Représentations galoisiennes

4.1. – Par les travaux de Laumon et Weissauer [4,9], à toute forme de Siegel cuspidale holomorphe h de poids (k_1, k_2) et niveau N, on peut associer une représentation galoisienne p-adique semi-simple (ρ_h, W_h) de dimension 4 non ramifiée en dehors de Np et telle que pour tout Frobenius géométrique $Frob_\ell$ en $\ell \not| Np$, on ait :

$$\det\bigl(X - \rho_h(\mathrm{Frob}_\ell)1_4\bigr) = \lambda_h\bigl(Q_\ell(X)\bigr).$$

Si $(N, p) = 1$, la restriction de la représentation ρ_h à un sous-groupe de décomposition D_p en p est cristalline et le polynôme caractéristique de Frobenius ϕ opérant sur $D_{\mathrm{cris}}(W_h) = (W_h \otimes B_{\mathrm{cris}})^{D_p}$ est donné par $\lambda_h(Q_p(X))$ (cf. [8]). En les places qui divisent le niveau, on fait l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 4.2. – *Pour toute forme de Siegel h de niveau $\Delta_0(N)$ et pour tout $\ell | N$ ($\ell \neq p$), on a*

$$\rho_h|_{I_\ell} \cong K(\xi_1) \oplus K(\xi_2) \oplus \sigma,$$

où ξ_1 et ξ_2 sont des caractères et σ est une représentation de dimension 2 de I_ℓ.

Lorsque N est sans facteur carré, la vérification de cette hypothèse devrait résulter des travaux en cours de Genestier–Tilouine.

THÉORÈME 4.3. – *Soit f une forme modulaire vérifiant les hypothèses du* 3.1. *On suppose que f est ordinaire en p (i.e. $|a_p|_p = 1$), alors il existe un voisinage étale $\mathcal{V}$ de $\chi_{(k,k)}$ au-dessus de $\mathcal{W}$ et une famille analytique de représentations galoisiennes $\rho_{\mathcal{V}} : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_4(K_{\mathcal{V}})$ vérifiant les propriétés suivantes* :

(i) *Pour tout ℓ premier à Np, $\rho_{\mathcal{V}}$ est non ramifiée en ℓ et pour tout Frobenius géométrique* Frob_ℓ, *on a*

$$\det\bigl(X - \rho_{\mathcal{V}}(\mathrm{Frob}_\ell)1_4\bigr) = \lambda_{\mathcal{V}}\bigl(\mathbb{Q}_\ell(X)\bigr).$$

(ii) $(\rho_{\mathcal{V}})^{ss}(k,k) \cong K(1-k) \oplus K(2-k) \oplus V_f$ *où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ sur laquelle V_f est définie.*

(iii) *Sous l'Hypothèse* 4.2, *$\rho_{\mathcal{V}}$ est irréductible.*

(iv) *Il existe une droite fixe (point par point) pour l'action de l'inertie en p.*

(v) *Sous l'Hypothèse* 4.2,

$$\rho_{\mathcal{V}}|_{D_\ell} \cong K_{\mathcal{V}}(\xi_1) \oplus K_{\mathcal{V}}(\xi_2) \oplus \sigma,$$

où ξ_1 et ξ_2 sont des caractères et σ est une représentation de rang 2 *sur $K_{\mathcal{V}}$ de I_ℓ.*

4.4. *Idées de la démonstration.* – On applique le Théorème 2.6 à $\mathrm{SK}_p(f)$ et on utilise la technique des pseudo-représentations comme dans [7]. Par construction, les points (i), (ii), (iv) et (v) sont automatiques. Le point (iv) se démontre comme dans [7, Théorème 7.1]. En revanche, le crucial point (iii) est non trivial. Il se pourrait en effet que les formes de Siegel de la famille soit de type endoscopique et donc que $\rho_{\mathcal{V}}$ soit de la forme $\rho_1 \oplus \rho_2$ avec ρ_1 et ρ_2 des représentations de dimension 2 telles que $\det(\rho_1) = \det(\rho_2)$. C'est le cas d'éventuelle réductibilité le moins évident à exclure, les autres étant traités sans grande difficulté. Si l'on était dans une telle situation, la spécialisation en poids (k,k) de l'une de ces deux représentations, disons ρ_1, serait réductible et de semi-simplification isomorphe à $K(1-k) \oplus K(2-k)$. De plus par le point (v), elle serait non ramifiée en tout premier $\ell \neq p$. Par le choix d'un bon réseau, à la Ribet, dans l'espace de cette représentation, on pourrait alors construire, après une torsion à la Tate, une extension non triviale de $K(-1)$ par K. Cette extension E serait non ramifiée en dehors de p et ordinaire donc semi-stable en p. En fait elle serait même cristalline. Cela résulte d'une proposition de M. Kisin [3, Corollaire 5.12] : supposons que l'on ait une famille analytique ρ_x de représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ayant le poids de Hodge–Tate constant 0, une fonction analytique θ et une suite de points $x_1, x_2, \ldots$ convergeant p-adiquement vers x_∞ et tels que pour tout i, ρ_{x_i} soit semi-stable de poids de Hodge–Tate non negatifs et $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{x_i})^{\phi=\theta(x_i)} \neq 0$. Alors si ρ_{x_∞} est semistable, on a $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{x_\infty})^{\phi=\theta(x_\infty)} \neq 0$. On applique ceci à la famille ρ obtenue par torsion à la Tate de la famille ρ_1 et dont les points arithmétique ont les poids de Hodge–Tate $(k_1 - k_2 + 1, 0)$ et les valeurs propres de Frobenius $(\theta(x_i), p^{k_1-k_2+1}\theta(x_i)^{-1})$ avec $\theta = \lambda_{\mathcal{V}}(U_{1,p})\lambda_{\mathcal{V}}(U_{0,p})^{-1}$. On en déduit que $D_{\mathrm{cris}}(E)^{\phi=p} \neq 0$, c'est à dire que E est cristalline. D'où $H^1_f(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p(1)) \neq 0$, une contradiction.

Remarque 4.5. – Si l'on admet que les représentations arithmétiques de la famille ρ_1 sont modulaires, ce qui est conjecturalement attendu, on peut donner une autre démonstration. Nous le faisons ci-dessous afin de mettre en lumière l'aspect global de l'argument. Soit G_2 la forme modulaire p-adique dont le q-développement est donné par $G_2(q) = \frac{\zeta(-1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)q^n$ avec $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Nous allons montrer que sous les hypothèses que l'on a sur la famille ρ_1, on peut montrer que la forme modulaire p-adique G_2 est surconvergente ce qui établira une contradiction en vertu d'un résultat de Coleman–Gouvea–Jochnowitz [1]. En effet, par hypothèse on aura une famille de formes cuspidales propres et p-stabilisées de niveau p dont le q-développement converge p-adiquement vers $\sum_{n=1}^{\infty} p^{val_p(n)}\sigma_p(n)q^n = G_2(q) - G_2(q^p)$ avec $\sigma_p(n) = \sum_{\substack{d|n \\ (d,p)=1}} d$. D'après un théorème de Coleman–Mazur, $G_2(q) - G_2(q^p)$ est donc le q-développement d'une forme modulaire surconvergente. Par ailleurs, il est bien connu que $G_2(q) - pG_2(q^p) = \frac{(1-p)\zeta(-1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_p(n)q^n$, qui est le q-développement d'une série d'Eisenstein de poids 2 niveau p et caractère trivial, est classique et donc surconvergente. $G_2(q)$ est donc surconvergente, d'où la contradiction.

4.6. – Avec les hypothèses et notations précédentes, il existe donc un réseau de l'espace de la représentation $\rho_{\mathcal{V}}$ tel que, après spécialisation en poids (k,k), on obtienne une représentation W n'ayant que V_f comme quotient et dont la semi-simplification est isomorphe à $K(1-k) \oplus K(2-k) \oplus V_f$. On obtient ainsi une extension M non triviale de V_f par $K(t)$ avec $t = 1-k$ ou $2-k$. Par le point (iv) du Théorème 4.3, M est ordinaire et donc semi-stable en p. Un argument élémentaire sur les valeurs propres du Frobenius opérant sur $D_{st}(M)$ entraine qu'elle est cristalline. Grâce au point (v), la classe de cette extension est non ramifiée en tous les premiers $\ell \neq p$. On obtient donc un élément non trivial dans $H^1_f(\mathbb{Q}, V_f^\vee(t))$. Comme ce dernier groupe est nul pour $m = 1-k$ d'après un théorème de K. Kato (cf. [2]), on en déduit que $t = 2-k$ et le Théorème 1.1 est démontré car $V_f^\vee = V_f(2k-3)$.

Références bibliographiques

[1] R. Coleman, F. Gouvea, N. Jochnowitz, E_2, Θ, and overconvergence, Internat. Math. Res. Notices 1 (1995) 23–24.
[2] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta function of modular forms, Preprint.
[3] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine–Mazur conjecture, Preprint.
[4] G. Laumon, Fonctions Zéta des variétés de Siegel de dimension 3, Preprint.
[5] I. Piatetski-Shapiro, On the Saito–Kurokawa lifting, Invent. Math. 71 (1983).
[6] R. Schmidt, Generalized Saito–Kurokawa liftings, Preprint.
[7] J. Tilouine, E. Urban, Several variable p-adic families of Siegel–Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 32 (1999) 499–574.
[8] E. Urban, Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de $G\mathrm{Sp}_{4/\mathbb{Q}}$, Preprint.
[9] R. Weissauer, Four dimensional Galois representations, Preprint.
[10] J.-L. Waldspurger, Correspondances de Shimura et quaternions, Forum Math. 3 (1991) 219–307.