C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 587–590

Algèbre homologique/*Homological Algebra*

Une propriété de la filtration du degré des foncteurs polynomiaux

Laurent Piriou [a], Lionel Schwartz [b]

[a] Département de mathématiques, UMR 6629, faculté des sciences, Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, 44322 Nantes cedex 03, France

[b] Laboratoire analyse, géométrie et applications, UMR 5739, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 20 avril 2002 ; accepté le 22 juillet 2002

Note présentée par Jean-Louis Koszul.

Résumé On montre que la filtration du degré sur les foncteurs polynomiaux, de la catégorie des espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{F}_2$ dans elle même, dont le socle est fini est compatible, en un sens approprié, avec la fitration des socles, dite de Loewy. Pour démontrer ce résultat on se ramène à en montrer un équivalent pour la fitration par le poids (*cf.* [1]) sur la cohomologie modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires et celle des socles obtenue en la considérant comme objet dans la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. ***Pour citer cet article : L. Piriou, L. Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 587–590.***

A property of the degree filtration on polynomial functors

Abstract One shows the degree filtration on polynomial functors with finite socle, from the category of vector spaces over the field $\mathbf{F}_2$ to itself, is compatible with the socle filtration. To prove this result, one proves an equivalent one concerning the mod-2 cohomology of elementary abelian 2-groups, considering this cohomology as an object in the category $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. ***To cite this article: L. Piriou, L. Schwartz, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 587–590.***

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie abélienne des foncteurs $F : \mathcal{V}ect_f \to \mathcal{V}ect$ de la catégorie des $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels, de dimension finie, dans celle de tous les $\mathbf{F}_2$-espaces vectoriels.

On compare deux filtrations naturelles sur les injectifs standards de la catégorie. La première est donnée par le degré d'Eilenberg–Mac Lane, spécifique à la situation dans laquelle nous nous trouvons [2,4,8]. Soit Δ l'endofoncteur de la catégorie $\mathcal{F}$ déterminé par $\Delta(F)(V) = \ker(F(V \oplus \mathbf{F}_2) \to F(V))$. On dit qu'un foncteur est de degré inférieur ou égal à n si $\Delta^{n+1}(F) = 0$. On définit ainsi le plus grand sous-foncteur de degré inférieur ou égal à n d'un foncteur F quelconque, on le note $t_n(F)$. Un foncteur analytique F est par définition un foncteur qui est limite directe des foncteurs $t_n(F)$.

La seconde filtration est celle des socles (aussi dite de Loewy), définie comme suit. Le socle d'un objet F est le plus grand sous-objet $\mathrm{Soc}(F) = \mathrm{Soc}_0(F) \subset F$ qui est somme directe d'objets simples. On

Adresses e-mail : piriou@math.univ-nantes.fr (L. Piriou); schwartz@math.univ-paris13.fr (L. Schwartz).

S1631-073X(02)02535-9/FLA

définit itérativement $\mathrm{Soc}_n(F)$ par $\mathrm{Soc}_n(F) = \pi^{-1}\mathrm{Soc}(F/\mathrm{Soc}_{n-1}(F))$, où $\pi : F \to F/\mathrm{Soc}_{n-1}(F))$ est la projection canonique. Si F est analytique cette filtration est convergente.

Si on considère le foncteur $V \mapsto \mathbf{F}_2^{V^*}$ il est facile de voir que ces deux filtrations sont identiques. Ce foncteur représente $F \mapsto F(\mathbf{F}_2)^*$, c'est un objet injectif standard de $\mathcal{F}$. Le résultat montre qu'en un sens approprié, ces deux filtrations sont compatibles pour tout objet dont l'enveloppe injective est somme directe finie d'objets injectifs indécomposables, ou, ce qui est équivalent, dont le socle est fini.

THÉORÈME 0.1. – *Soit F un foncteur dont l'enveloppe injective est facteur direct dans une somme directe finie d'injectifs indécomposables. Soit n un entier assez grand. Le socle* (*i.e. le plus grand sous-objet somme directe d'objets simples*) *de $F/t_n(F)$ est somme directe finie de foncteurs simples de degré $n+1$.*

Le problème a une formulation équivalente, dans la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod [8]. Rappelons que la catégorie $\mathcal{U}$ quotientée par la sous-catégorie pleine $\mathcal{N}il$ des modules nilpotents est équivalente à la catégorie des foncteurs analytiques $\mathcal{F}_\omega$ [2, Part 1]. On dispose alors des opérations de Steenrod. Les outils centraux de cet article sont les opérations P_t^s [5], et leur comportement sur les F-générateurs semi-standards des modules de Weyl et des objets simples.

1. Réduction au cas de H^*E

Le foncteur I_E, donné par $I_E(V) := \mathbf{F}_2^{\mathrm{Hom}(V,E)}$ où le membre de droite est l'ensemble des applications ensemblistes de $\mathrm{Hom}(V, E)$ dans $\mathbf{F}_2$, représente le foncteur $F \mapsto F(E)^*$ de $\mathcal{F}$ vers la catégorie $\mathcal{V}ect$. On a une équivalence naturelle de foncteurs : $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(F, I_E) \cong F(E)^*$. Ces objets sont les cogénérateurs injectifs standards de la catégorie. Le Théorème 0.1 est impliqué par :

THÉORÈME 1.1. – *Soit E un 2-groupe abélien élémentaire de dimension d. Si $n \geqslant d2^d$ tous les sous-foncteurs simples dans le quotient de $I_E/t_{n-1}(I_E)$ sont de degré n. Autrement dit le socle de $I_E/t_{n-1}(I_E)$ est une somme directe finie de foncteurs* (*simples*) *de degré n.*

G. Powell a donné une démonstration indépendante de ce résultat pour $\dim(E) = 2$ [7]. Comme le foncteur I_E est l'image, par l'équivalence de catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il \cong \mathcal{F}_\omega$, [2], de la cohomologie modulo deux H^*E du 2-groupe abélien élémentaire E les questions posées, portent, alors sur le module instable H^*E. Les filtrations par le degré et de Loewy sur $F \subset I_E$ sont les filtrations induites par celles des I_E. La filtration par le degré sur I_E est obtenu comme suit. La cohomologie H^*E est une algèbre de Hopf (de même que le foncteur I_E est un foncteur en $\mathbf{F}_2$-algèbre de Hopf) et la filtration correspondante n'est autre que la filtration primitive $P_1(H^*E) \subset \cdots \subset P_n(H^*E) \subset \cdots \subset H^*E$. Dans ce cas la filtration primitive est décrite comme suit. L'algèbre H^*E est isomorphe à $S^*(E^*)$ qui est primitivement engendrée comme algèbre de Hopf. En particulier $P_n(H^*E) \cong (P_1(H^*E))^n$, les éléments primitifs consistent en $H^1E \cong E^*$ et ses images par les itérés du morphisme de Frobenius. A la notion de degré d'un foncteur polynômial correspond celle de poids pour un module instable réduit [1]. Un module instable est réduit M si et seulement si il est un sous-module quelconque (sur l'algèbre de Steenrod) d'une somme directe arbitraire de modules H^*E, où E est un 2-groupe abélien élémentaire. Si on peut plonger M dans une telle somme directe finie le module correspond à un foncteur dont le socle est fini. Son poids est le plus grand entier ω (si il existe) tel qu'existe un degré n tel que M^n soit non-nul et que la décompostion 2-adique de n comporte ω coefficients égaux à 1. On peut alors reformuler 1.1. Par sous-objets simples de $H^*E/P_{n-1}(H^*E)$ on entend modules instables réduits $\mathcal{N}il$-fermés simples en tant qu'objets dans $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. La simplicité équivaut à dire que le quotient par tout sous-module non-trivial est un module nilpotent (limite directe de modules ayant chacun une filtration finie dont les quotients sont des suspensions).

THÉORÈME 1.2. – *Soit E un 2-groupe abélien élémentaire de dimension d. Les sous-objets simples de $H^*E/P_{n-1}(H^*E)$ sont de poids exactement n dès que $n \geqslant d2^d$.*

On notera que $P_n(H^*E)/P_{n-1}(H^*E)$ est de poids n exactement, i.e. de poids inférieur ou égal à n, mais pas à $n-1$, et que sa partie de degré $n-1$ est triviale. Pour démontrer 1.2 on se convainc facilement qu'il suffit de montrer :

PROPOSITION 1.3. – *Soit $d = \dim(E)$. Supposons que $n > d2^d$, alors pour tout élément $x \in P_n(H^*E)$ tel que $x \notin P_{n-1}(H^*E)$ on peut trouver une opération de Steenrod β telle que $\beta(x) \in P_{n-1}(H^*E)$ et $\beta(x) \notin P_{n-2}(H^*E)$.*

2. Un cas particulier

Le Lemme 2.1 ci-dessous montre que 1.3 a lieu pour certaines classes. On montrera dans la section suivante que l'on peut se ramener à travailler sur de telles classes. Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_t)$ une partition 2-régulière pour les colonnes ($0 \leqslant \mu_i - \mu_{i+1} \leqslant 1$ pour tout $i < t$ et $\mu_t = 1$) telle que $\mu_1 \leqslant d$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_h)$ sa partition conjuguée (ou associée) : $\lambda_j = \mathrm{Card}\{i \mid \mu_i \geqslant j\}$. On a $t = \lambda_1$ et $h = \mu_1$. La partition λ est 2-régulière : $\lambda_i > \lambda_{i+1}$, pour tout i. On conserve ces notations dans la suite. Soit un ensemble S d'entiers $\{h_1, \ldots, h_t\}$, avec $h_i < h_j$ si $i < j$. On suppose aussi la suite h_i croissante, et que pour tout i on a l'inégalité : $2^{h_i} > \sum_1^{i-1} \mu_j 2^{h_j}$. Cette condition assure que l'opération ϱ introduite ci-dessous agit sur les éléments considérés comme une dérivation.

Si E un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension d, $H^*E \cong \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$, où $\{x_1, \ldots, x_d\}$ est une base de E^*.

LEMME 2.1. – *Supposons que le polynôme $p \in \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$ est de poids n exactement et est somme de monômes de la forme $x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}$ où chaque exposant k_i s'écrit $k_i = \sum_j 2^{b_{i,j}}$. Les entiers $b_{i,j}$, qui sont non-nécessairement deux à deux distincts, appartiennent à l'ensemble $\{h_1, \ldots, h_t\}$. De plus le nombre d'entiers $b_{i,j}$ égaux à h_ℓ est égal à μ_ℓ. Supposons enfin que $n > d2^d$, et que si $i < j$ et $\mu_i = \mu_j$, la classe $P_{h_j - h_i}^{h_i}(p)$ est de poids au plus $n-1$.*

Alors il existe une opération de Steenrod ϱ telle que $\varrho(p) \in P_{n-1}(H^*E)$, mais $\varrho(p) \notin P_{n-2}(H^*E)$.

Démonstration. – Choisissons un monôme $m = x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}$ de poids n dont le coefficient est non-nul dans le polynôme p, un tel monôme existe car p est de poids n [1]. A l'entier $h_j \in S$ on associe un sous-ensemble de $\{1, \ldots, d\}$: on considère le sous-ensemble des indices i de $\{1, \ldots, d\}$ pour lesquels 2^{h_j} apparait dans la décomposition donnée de k_i en somme de puissances de 2, par hypothèse il apparaît une fois au plus car le monôme est de poids n. Il y a 2^d sous-ensembles. Donc dès que $\lambda_1 = t > 2^d$ un même sous-ensemble doit apparaître deux fois. Or $n > d2^d$, sous cette hypothèse on montre alors facilement que pour une partition de l'entier μ, 2-régulière pour les colonnes, on a $\lambda_1 = t > 2^d$. Ainsi il existe une paire (a, b) d'éléments de S tel que, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant d$, on ait l'alternative suivante :

- soit 2^a et 2^b apparaîssent tous les deux dans la décomposition donnée en somme de puissances de 2 de k_i,
- soit ni 2^a, ni 2^b n'apparaîssent.

On suppose que $a < b$, et on pose $\varrho = P_{b-a}^a$ [5]. Le calcul de $P_{b-a}^a(p)$, laissé aux soins du lecteur [6, Proposition 2.5], fournit un élément non-nul et de poids exactement $n-1$. Ceci achève cette partie de la démonstration.

3. Générateurs standards et semi-standards

Il faut maintenant modifier la classe x de 1.3 pour qu'elle ait les propriétés requises par 2.1. La première partie de la réduction résulte de généralités de théorie des modules, on obtient :

PROPOSITION 3.1. – *Il existe une opération de Steenrod θ telle que la réduction de $y = \theta(x)$ dans $P_n(H^*E)/P_{n-1}(H^*E)$ est non nulle, et dans le socle de ce module ; de plus, elle est dans une composante isotypique de ce socle, au sens de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$.*

L'étape suivante dépend de la structure des objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$. Nous utilisons la description suivante des modules de Weyl et des modules simples associés à la partition 2-régulière pour les colonnes μ [1,3,8], ce sont des modules réduits, de poids est égal à $\sum_i \mu_i$:

– $W_\mu(F(1)) := C_\mu R_\mu F(1)^{\otimes n}$ où $C_\mu R_\mu$ désigne le produit de la somme $C_\mu \in \mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]$, des éléments du groupe $\mathcal{S}_n$ qui laissent fixe les colonnes du premier diagramme de Young associé à μ, par la somme $R_\mu \in \mathbf{F}_2[\mathcal{S}_n]$, des éléments qui laissent fixe les lignes.
– $S_\mu(F(1)) := R_\mu C_\mu R_\mu F(1)^{\otimes n}$ est l'unique quotient simple du module de Weyl $W_\mu(F(1))$.

DÉFINITION 3.2. – On dira qu'un élément x d'un module instable M est F-générateur si le quotient $M/\mathcal{A}x$ est nilpotent.

Par définition d'un objet simple de $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ un élément quelconque non nul de $S_\mu(F(1))$ est F-générateur. Nous explicitons maintenant des F-générateurs du module de Weyl $W_\mu(F(1))$, qui donnent, par réduction, des F-générateurs de $S_\mu(F(1))$. Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ une suite d'entiers positifs deux à deux distincts et soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{\lambda_1})$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. On pose

$$w_\mu(\mathbf{x}) := C_\mu \bigotimes_{j=1}^{j=\mu_1} \bigotimes_{1 \leqslant i \leqslant \lambda_j} u^{2^{x_i}} \quad \text{et} \quad u_\mu(\mathbf{a}) := C_\mu R_\mu \bigotimes_{i=1}^{i=n} u^{2^{a_i}}.$$

PROPOSITION 3.3 ([1]). – *Les éléments* $u_\mu(\mathbf{a})$ *et* $w_\mu(\mathbf{x})$ *sont des* F*-générateurs de* $W_\mu(F(1))$. *Les premiers sont dits standards et les seconds semi-standards.*

On reprend maintenant l'argumentation en supposant que la classe y se projette sur un F-générateur standard $u_\mu(\mathbf{a})$ d'un module isomorphe à $S_\mu(F(1))$. La décomposition 2-adique de son degré s'écrit $2^{a_1} + \cdots + 2^{a_n}$ et le polynôme y, de poids n, s'écrit donc comme somme de monômes $x_1^{k_1} \cdots x_d^{k_d}$ où chaque k_i est somme de puissances 2^{a_k}, chacune n'apparaissant qu'une seule fois. Soit

$$\phi := \prod_{1 \leqslant i \leqslant \lambda_1} \prod_{1 \leqslant j \leqslant \mu_i} P_{h_i - a_{\ell_j - i+1}}^{a_{\ell_j - i+1}},$$

où $\ell_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$ et $h_i = x_i + h$, l'entier h est assez grand pour que toutes les quantités $h_i - a_k$ soient positives, et strictement supérieures aux a_k. Ces conditions assurent que chaque opération P_t^s dans le produit n'agit que sur un des facteurs du tenseur $\bigotimes_{i=1}^{i=n} u^{2^{a_i}}$. On a $\phi(u_\mu(\mathbf{a})) = \mathrm{Sq}_0^h w_\mu(\mathbf{x})$. Le polynôme $p = \phi(y) \in \mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$ satisfait alors aux hypothèses du Lemme 2.1. En fait ces hypothèse caractérisent les polynômes p qui engendrent un sous-module instable de $\mathbf{F}_2[x_1, \ldots, x_d]$ admettant une application non-triviale à valeurs dans $S_\mu(F(1))$ dans la catégorie $\mathcal{U}/\mathcal{N}il$ (*cf.* [6]).

Références bibliographiques

[1] V. Franjou, L. Schwartz, Reduced unstable $\mathcal{A}$-modules and the modular representation theory of the symmetric groups, Ann. Sci. École Norm. Sup. 23 (1990) 593–624.
[2] H.-W. Henn, J. Lannes, L. Schwartz, The categories of unstable modules and unstable algebras modulo nilpotent objects, Amer. J. Math. 115 (5) (1993) 1053–1106.
[3] G.D. James, A. Kerber, The representation theory of the symmetric groups, Encyclopedia Math. Appl. 16 (1981).
[4] N. Kuhn, Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra, Amer. J. Math. 116 (1993) 327–360.
[5] H.R. Margolis, Spectra and the Steenrod Algebra, North-Holland, Amsterdam, 1983.
[6] L. Piriou, L. Schwartz, La filtration du degré sur la cohomologie modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires, Prépublication 2000-22 de l'Université Paris 13.
[7] G. Powell, On polynomial filtrations of certain sub-quotients of injectives, Prépublication, Mai 1998.
[8] L. Schwartz, Unstable Modules over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture, in: Chicago Lectures in Math., 1994.