C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 505–508

Théorie des groupes/*Group Theory*

Représentation de Steinberg et identités de projecteurs

François Sauvageot

Institut de mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 5, France

Reçu le 19 avril 2002 ; accepté après révision le 1er août 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé Nous démontrons l'analogue dans l'anneau de Green d'un résultat de Bhama Srinivasan sur le caractère de Steinberg. L'identité obtenue a pour conséquence des isogénies entre produits de jacobiennes de quotients de courbes projectives, lisses et géométriquement connexes. ***Pour citer cet article : F. Sauvageot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 505–508.***

Steinberg representation and idempotent relations

Abstract We prove an analogue in the Green ring of a result obtained by Bhama Srinivasan on the Steinberg character. This implies isogenies between products of Jacobians of quotients of projective, smooth and geometrically connected curves. ***To cite this article: F. Sauvageot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 505–508.***

1. Un théorème de Srinivasan

Soient G un groupe algébrique réductif connexe sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, F une application de Frobenius sur G et T_0 un tore maximal F-stable quasi-déployé de G.

On note $r(\mathrm{G})$ le F-rang de G, $\mathrm{St}_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}$ la représentation de Steinberg de G^F, $\mathrm{W} = \mathrm{W}(\mathrm{T}_0)$ le groupe de Weyl de T_0 dans G, $\mathcal{T}$ l'ensemble des tores maximaux F-stables de G, $[\mathcal{T}/\mathrm{G}^\mathrm{F}]$ un ensemble de représentants de classes de conjugaison de $\mathcal{T}$ sous G^F et $R_{\mathbf{C}}(\mathrm{G}^\mathrm{F})$ le groupe de Grothendieck de la catégorie semi-simple des G^F-modules complexes.

On pose $\varepsilon_\mathrm{G} = (-1)^{r(\mathrm{G})}$. Dans [12, Section 5], Bhama Srinivasan introduit explicitement des familles de caractères $(\psi_{\mathrm{T}^\mathrm{F}})_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}}$ des normalisateurs $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{T})^\mathrm{F}$, triviaux sur T^F. Notons (S) l'hypothèse : p ne divise pas $|\mathrm{W}|$ et G est un groupe de Chevalley (ou une forme tordue) de type A_n, B_n, C_n, D_n, F_4 ou G_2 ou encore un groupe de Suzuki ou un groupe de Ree.

THÉORÈME 1.1 (Srinivasan [12]). – *Dans* $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} R_{\mathbf{C}}(\mathrm{G}^\mathrm{F})$, *on a*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{G}^\mathrm{F}} = \sum_{\mathrm{T}\in[\mathcal{T}/\mathrm{G}^\mathrm{F}]} \frac{\varepsilon_\mathrm{G}\varepsilon_\mathrm{T}}{|\mathrm{W}(\mathrm{T})^\mathrm{F}|} \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}^\mathrm{F}}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}} 1_{\mathrm{T}^\mathrm{F}} = \frac{1}{|\mathrm{G}^\mathrm{F}|} \sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}} \varepsilon_\mathrm{G}\varepsilon_\mathrm{T} \left|\mathrm{T}^\mathrm{F}\right| \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}^\mathrm{F}}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}} 1_{\mathrm{T}^\mathrm{F}}.$$

Adresse e-mail : sauvageo@math.jussieu.fr (F. Sauvageot).

S1631-073X(02)02523-2/FLA

Si on se place dans l'hypothèse (S)*, alors on a de plus*

$$\mathrm{St}_{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}} = \sum_{\mathrm{T}\in[\mathcal{T}/\mathrm{G}^{\mathrm{F}}]} \varepsilon_{\mathrm{G}}\varepsilon_{\mathrm{T}} \mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^{\mathrm{F}}}^{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}} \psi_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}} = \frac{1}{|\mathrm{G}^{\mathrm{F}}|} \sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}} \varepsilon_{\mathrm{G}}\varepsilon_{\mathrm{T}} \left|\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^{\mathrm{F}}\right| \mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^{\mathrm{F}}}^{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}} \psi_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}}.$$

Remarque 1. – Une démonstration de l'identité pour les tores, utilisant la théorie de Deligne–Lusztig, est donnée par Carter [2, Corollary 7.6.7]. Il serait intéressant de comprendre les caractères introduits par B. Srinivasan dans ce cadre.

À tout sous-groupe H de G^{F} on fait correspondre le projecteur $e_{\mathrm{H}} = \frac{1}{|\mathrm{H}|}\sum_{h\in\mathrm{H}} h$ de l'algèbre de groupe $\mathbf{Q}[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}]$.

COROLLAIRE 1.2. – *Soit* B *un sous-groupe de Borel* F*-stable de* G*. Si* G^{F} *n'a que deux classes de conjugaison de tores maximaux rationnels* F*-stables représentées par* T_0 *et* T_1*, alors, en tant que* $\mathbf{Q}[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}]$*-modules,*

$$\mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{T}_0^{\mathrm{F}}\big] \oplus \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{G}^{\mathrm{F}}\big] \oplus \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{G}^{\mathrm{F}}\big] \simeq \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{T}_1^{\mathrm{F}}\big] \oplus \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{B}^{\mathrm{F}}\big] \oplus \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{B}^{\mathrm{F}}\big].$$

De plus, si p *est impair, alors*

$$\mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{B}^{\mathrm{F}}\big] \oplus \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_1)^{\mathrm{F}}\big] \simeq \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{G}^{\mathrm{F}}\big] \oplus \mathbf{Q}\big[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0)^{\mathrm{F}}\big].$$

En particulier, si G^{F} *est le groupe* $\mathrm{GL}(2)$ *ou le groupe* $\mathrm{PGL}(2)$ *sur un corps fini et si* $\mathrm{B}^{\mathrm{F}} \supset \mathrm{T}_0^{\mathrm{F}}$*, les projecteurs de* $\mathbf{Q}[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}]$*,* $e_{\mathrm{T}_0^{\mathrm{F}}} - e_{\mathrm{B}^{\mathrm{F}}}$ *et* $e_{\mathrm{T}_1^{\mathrm{F}}} + e_{\mathrm{B}^{\mathrm{F}}} - 2e_{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}}$ *sont conjugués. Si* p *est impair il en est de même pour les projecteurs* $e_{\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_0)^{\mathrm{F}}}$ *et* $e_{\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_1)^{\mathrm{F}}} + e_{\mathrm{B}^{\mathrm{F}}} - e_{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}}$*.*

Démonstration. – Sous les hypothèses du corollaire, le groupe de Weyl de T_0 est de cardinal 2 et la première assertion en résulte. Pour la seconde assertion, on déduit de $\mathrm{T}_0^{\mathrm{F}} \subset \mathrm{B}^{\mathrm{F}}$ et de $\mathrm{T}_1^{\mathrm{F}}\mathrm{B}^{\mathrm{F}} = \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$, qu'on a affaire à des projecteurs de $\mathbf{Q}[\mathrm{G}^{\mathrm{F}}]$. La première assertion montre qu'ils ont même caractère et ils sont donc conjugués. □

Remarque 2. – Imin Chen et Bas Edixhoven ont donné d'autres démonstrations de ce résultat pour le groupe $\mathrm{GL}(2)$ [3,4,8]. La propriété $\mathrm{T}_1^{\mathrm{F}}\mathrm{B}^{\mathrm{F}} = \mathrm{G}^{\mathrm{F}}$ est particulière au groupe $\mathrm{GL}(2)$. Les identités précédentes entraînent [9,7] l'existence d'isogénies entre produits de jacobiennes de quotients de courbes projectives, lisses et géométriquement connexes.

2. Extension à l'anneau de Green

On peut démontrer le théorème précédent en utilisant la notion d'invariant de Steinberg en p, noté $\mathrm{St}_p(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$, définie pour un groupe fini quelconque [1, Section 4.3] et utiliser le théorème d'induction d'Artin [11, Théorèmes 17 et 26]. Cette démonstration a l'avantage de se propager à l'anneau de Green. Une relation dans l'anneau de Green permet de déduire des isogénies de degré premier à ℓ [7].

Soit $\mathcal{O}$ un anneau commutatif local noethérien complet de caractéristique résiduelle ℓ première à $|\mathrm{G}^{\mathrm{F}}|_{p'}$ et $A_{\mathcal{O}}(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ l'anneau de Green de G^{F} sur $\mathcal{O}$, i.e. le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{O}\mathrm{G}^{\mathrm{F}}$-réseaux, pour les relations données par les décompositions en sommes directes. On note $s_p(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ l'ensemble des p-sous-groupes non-triviaux de G^{F}, $B(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ l'anneau de Burnside de G^{F}, $\widetilde{\chi}$ l'invariant de Lefschetz et, pour H un sous-groupe de G^{F}, $s_p(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})^{\mathrm{H}}$ l'ensemble des éléments de $s_p(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ invariants sous H et $e_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}}$ l'idempotent de $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} B(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ associé au G^{F}-ensemble $\mathrm{G}^{\mathrm{F}}/\mathrm{H}$. On renvoie le lecteur à [1] pour les définitions précises de ces objets.

THÉORÈME 2.1. – *L'image de* $\mathrm{St}_p(\mathrm{G}^\mathrm{F})$ *dans* $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(\mathrm{G}^\mathrm{F})$ *est*

$$\frac{1}{|\mathrm{G}^\mathrm{F}|}\sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}}\varepsilon_\mathrm{G}\varepsilon_\mathrm{T}\left|\mathrm{T}^\mathrm{F}\right|\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}^\mathrm{F}}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}}1_{\mathrm{T}^\mathrm{F}}.$$

Démonstration. – Si X est un G^F-ensemble, par construction des idempotents $e_\mathrm{H}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}}$, on a l'identité

$$X=\sum_{\mathrm{H}\subset\mathrm{G}^\mathrm{F}}\frac{|\mathrm{N}_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})|}{|\mathrm{G}^\mathrm{F}|}\left|X^\mathrm{H}\right|e_\mathrm{H}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}}$$

dans $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} B(\mathrm{G}^\mathrm{F})$. Par conséquent, par définition de $\mathrm{St}_p(\mathrm{G}^\mathrm{F})$ et de l'invariant de Lefschetz, on a, toujours dans $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} B(\mathrm{G}^\mathrm{F})$,

$$\mathrm{St}_p\left(\mathrm{G}^\mathrm{F}\right)=\sum_{\mathrm{H}\subset\mathrm{G}^\mathrm{F}}\frac{|\mathrm{N}_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})|}{|\mathrm{G}^\mathrm{F}|}\widetilde{\chi}\left(s_p\left(\mathrm{G}^\mathrm{F}\right)^\mathrm{H}\right)e_\mathrm{H}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}}.$$

D'après [1, Lemma 4.3.7], pour tout p-sous-groupe non trivial P de G^F, $\mathrm{St}_p(\mathrm{G}^\mathrm{F})^\mathrm{P}=0$. Il en résulte que $\widetilde{\chi}(s_p(\mathrm{G}^\mathrm{F})^\mathrm{H})$ est nul pour tout sous-groupe H de G^F admettant un p-sous-groupe normal non trivial.

D'après le théorème d'induction de Conlon [1, Theorem 3.5.5], l'image de $e_\mathrm{H}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}}$ dans $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(\mathrm{G}^\mathrm{F})$ est nulle sauf si H est cyclique mod ℓ, i.e. sauf si le quotient de H par son plus grand ℓ-sous-groupe normal est cyclique.

Par conséquent, vu l'hypothèse faite sur ℓ, l'image de $\mathrm{St}_p(\mathrm{G}^\mathrm{F})$ dans $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(\mathrm{G}^\mathrm{F})$ est celle de

$$\sum_{\mathrm{H}\subset\mathrm{G}^\mathrm{F}\mid\mathrm{H}\ p'\text{-cyclique}}\frac{|\mathrm{N}_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})|}{|\mathrm{G}^\mathrm{F}|}\widetilde{\chi}\left(s_p\left(\mathrm{G}^\mathrm{F}\right)^\mathrm{H}\right)e_\mathrm{H}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}},$$

ou encore, par un théorème de Gluck [1, Theorem 3.3.2],

$$\sum_{\mathrm{K}\subset\mathrm{H}\subset\mathrm{G}^\mathrm{F}\mid\mathrm{H}\ p'\text{-cyclique}}\frac{|\mathrm{K}|}{|\mathrm{G}^\mathrm{F}|}\mu(\mathrm{H}/\mathrm{K})\widetilde{\chi}\left(s_p\left(\mathrm{G}^\mathrm{F}\right)^\mathrm{H}\right)\mathrm{Ind}_\mathrm{K}^{\mathrm{G}^\mathrm{F}}1_\mathrm{K},$$

où μ est la fonction de Möbius.

Par ailleurs, si T est un tore maximal F-stable de G, le même raisonnement conduit à l'égalité, dans $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(\mathrm{T}^\mathrm{F})$,

$$1_{\mathrm{T}^\mathrm{F}}=\frac{1}{|\mathrm{T}^\mathrm{F}|}\sum_{\mathrm{K}\subset\mathrm{H}\subset\mathrm{T}^\mathrm{F}\mid\mathrm{H}\text{-cyclique}}\mu(\mathrm{H}/\mathrm{K})|\mathrm{K}|\mathrm{Ind}_\mathrm{K}^{\mathrm{T}^\mathrm{F}}1_\mathrm{K}.$$

Si maintenant H est un p'-sous-groupe cyclique de G^F, d'après [10, Corollary 1.12], on a

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}\mid\mathrm{T}\supset\mathrm{H}}\varepsilon_\mathrm{G}\varepsilon_\mathrm{T}&=\sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}\mid\mathrm{T}\subset C_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})^0}\varepsilon_\mathrm{G}\varepsilon_\mathrm{T}=\varepsilon_\mathrm{G}\varepsilon_{C_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})^0}\left|C_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})^0\right|_p\\&=\varepsilon_\mathrm{G}\varepsilon_{C_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})^0}\widetilde{\chi}\left(s_p\left(C_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})^0\right)\right)=\widetilde{\chi}\left(s_p\left(\mathrm{G}^\mathrm{F}\right)^\mathrm{H}\right),\end{aligned}$$

où $C_{\mathrm{G}^\mathrm{F}}(\mathrm{H})^0$ désigne la composante connexe de l'identité du centralisateur de H dans G^F. □

Remarque 3. – En utilisant le théorème d'induction d'Artin au lieu du théorème d'induction de Conlon dans la démonstration précédente, on retrouve le résultat de B. Srinivasan.

Remarque 4. – On obtient un isomorphisme de $\mathcal{O}\mathrm{G}^{\mathrm{F}}$-réseaux en regroupant les termes affectés d'un même signe dans l'identité :

$$|\mathrm{G}^{\mathrm{F}}|\mathrm{St}_p(\mathrm{G}^{\mathrm{F}}) = \sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}} \varepsilon_{\mathrm{G}}\varepsilon_{\mathrm{T}}|\mathrm{T}^{\mathrm{F}}|\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}}^{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}} 1_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}}.$$

Par ailleurs, on peut remplacer $\mathcal{O}$ par $\mathbf{Z}_{(\ell)}$ pour ℓ premier à $|\mathrm{G}^{\mathrm{F}}|_{p'}$, d'après [6, Proposition 30.17]. Lorsque G est $\mathrm{GL}(2)$, ce théorème est l'un des résultats de Bart De Smit et Bas Edixhoven [7]. Dans le cas des groupes $\mathrm{SL}(2)$ ou $\mathrm{PSL}(2)$, on affine les résultats de Ernst Kani et Michael Rosen [9].

Comme dans le Paragraphe 1, on obtient une identité similaire pour les normalisateurs :

THÉORÈME 2.2. – *Si on se place dans l'hypothèse* (S), *l'image de* $\mathrm{St}_p(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ *dans* $\mathbf{Q}\otimes_{\mathbf{Z}} A_{\mathcal{O}}(\mathrm{G}^{\mathrm{F}})$ *est égale à*

$$\sum_{\mathrm{T}\in[\mathcal{T}/\mathrm{G}^{\mathrm{F}}]} \varepsilon_{\mathrm{G}}\varepsilon_{\mathrm{T}}\mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^{\mathrm{F}}}^{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}} \psi_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}}.$$

Démonstration. – En effet un $\mathcal{O}\mathrm{G}^{\mathrm{F}}$-réseau induit à partir d'un p'-sous-groupe est projectif. Par conséquent, pour démontrer que les $\mathcal{O}\mathrm{G}^{\mathrm{F}}$-réseaux

$$\sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}} \varepsilon_{\mathrm{G}}\varepsilon_{\mathrm{T}}|\mathrm{T}^{\mathrm{F}}|\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}}^{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}} 1_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}} \quad \text{et} \quad \sum_{\mathrm{T}\in\mathcal{T}} \varepsilon_{\mathrm{G}}\varepsilon_{\mathrm{T}}|\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^{\mathrm{F}}|\mathrm{Ind}_{\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^{\mathrm{F}}}^{\mathrm{G}^{\mathrm{F}}} \psi_{\mathrm{T}^{\mathrm{F}}}$$

sont isomorphes, il suffit de les étudier après extension des scalaires au corps des fractions de $\mathcal{O}$ d'après [6, Theorem 32.1]. L'assertion résulte donc du Théorème 1.1. □

Remerciements. Je remercie Antoine Chambert-Loir pour avoir attisé mon intérêt pour ce sujet ainsi que, pour de fructueuses conversations, Serge Bouc, Antoine Chambert-Loir et Jean Michel.

Références bibliographiques

[1] S. Bouc, Burnside rings, in: Handbook of Algebra, Vol. 2, Elsevier, 2000.
[2] R.W. Carter, Finite Groups of Lie Type, Wiley-Interscience, 1985.
[3] I. Chen, The Jacobian of modular curves associated to Cartan subgroups, Ph.D. thesis, University of Oxford, 1996.
[4] I. Chen, The Jacobian of non-split Cartan modular curves, Proc. London Math. Soc. (3) 77 (1998) 1–38.
[5] I. Chen, On relations between Jacobians of certain modular curves, J. Algebra 231 (1) (2000) 414–448.
[6] C.W. Curtis, I. Reiner, Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders, Wiley-Interscience, 1981 and 1987.
[7] B. De Smit, S.J. Edixhoven, Sur un résultat d'Imin Chen, Math. Res. Lett. 7 (2000) 147–153.
[8] S.J. Edixhoven, On a result of Imin Chen, Prépublication 96-16 de l'IRMAR, Rennes, mai 1996. Mais voir aussi arXiv alg-geom/9604008.
[9] E. Kani, M. Rosen, Idempotent relations and factors of Jacobians, Math. Ann. 284 (2) (1989) 307–327.
[10] G. Lehrer, Rational tori, semisimple orbits and the topology of hyperplane complements, Comment. Math. Helv. 67 (2) (1992) 226–251.
[11] J.-P. Serre, Repésentations linéaires des groupes finis, Hermann, Paris, 1978.
[12] B. Srinivasan, On the Steinberg character of a finite simple group of Lie type, J. Australian Math. Soc. 12 (1971) 1–14.