C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 321–324

Théorie des nombres/*Number Theory*

Quelques calculs de la cohomologie de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ et de la K-théorie de $\mathbb{Z}$

Philippe Elbaz-Vincent [a], Herbert Gangl [b], Christophe Soulé [c]

[a] Laboratoire GTA., UMR CNRS 5030, CC51, Université Montpellier II, 34095 Montpellier cedex 5, France

[b] MPI für Mathematik Bonn, Vivatsgasse 7, D-53111 Bonn, Allemagne

[c] CNRS et IHÉS, 35, route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France

Reçu le 13 juin 2002 ; accepté le 20 juin 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé Pour $N = 5$ et $N = 6$, nous calculons le complexe cellulaire défini par Voronoï à partir des formes quadratiques réelles de dimension N. Nous en déduisons l'homologie de $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ à coefficients triviaux, à de petits nombres premiers près. Nous montrons aussi que $K_5(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et que $K_6(\mathbb{Z})$ n'a que de la 3-torsion. ***Pour citer cet article : P. Elbaz-Vincent et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 321–324.***

Some computations of the homology of $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ and the K-theory of $\mathbb{Z}$

Abstract For $N = 5$ and $N = 6$, we compute the Voronoï cell complex attached to real N-dimensional quadratic forms, and we obtain the homology of $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ with trivial coefficients, up to small primes. We also prove that $K_5(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ and $K_6(\mathbb{Z})$ has only 3-torsion. ***To cite this article: P. Elbaz-Vincent et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 321–324.***

1. La théorie de Voronoï

Soit $N \geqslant 2$ un entier. Notons C_N l'espace des formes quadratiques définies positives réelles de rang N. Étant donnée $h \in C_N$, les vecteurs minimaux de h, c'est-à-dire les vecteurs v non nuls de $\mathbb{Z}^N$ tels que $h(v)$ soit minimal, forment un ensemble fini, noté $m(h)$. Une forme $h \in C_N$ est dite *parfaite* si elle est entièrement caractérisée par son minimum sur $\mathbb{Z}^N - \{0\}$ et par l'ensemble $m(h)$. Désignons par Γ le groupe $\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ ou $\mathrm{SL}_N(\mathbb{Z})$. Voronoï a démontré [15] (Thm., p.110) que, modulo l'action de Γ et la multiplication par les réels positifs, il n'y a qu'un nombre fini de formes parfaites.

Notons C_N^* l'espace des formes quadratiques positives réelles sur $\mathbb{R}^N$ dont le noyau est engendré par un sous-espace vectoriel propre de $\mathbb{Q}^N$. Soient X_N^* le quotient de C_N^* par les homothéties positives, $\pi : C_N^* \to X_N^*$ l'application quotient, $X_N = \pi(C_N)$ et $\partial X_N^* = X_N^* - X_N$. Le groupe Γ agit sur C_N^*, et sur X_N^*, par la formule $h \cdot \gamma = \gamma^t h \gamma$, $\gamma \in \Gamma$, $h \in C_N^*$, où γ^t est la transposée de γ.

A tout vecteur $v \in \mathbb{Z}^N - \{0\}$ on peut associer une forme $\widehat{v} \in C_N^*$, définie par $\widehat{v}(x) = (v|x)^2$. Étant donné un sous-ensemble fini B de $\mathbb{Z}^N - \{0\}$, *l'enveloppe convexe* de B est le sous-ensemble de X_N^* image par π

Adresses e-mail : pev@math.univ-montp2.fr (P. Elbaz-Vincent); herbert@mpim-bonn.mpg.de (H. Gangl); soule@ihes.fr (C. Soulé).

S1631-073X(02)02481-0/FLA

du sous-ensemble $\left\{\sum_j \lambda_j \widehat{v}_j,\ v_j \in B,\ \lambda_j \geqslant 0\right\}$ de C_N^*. Lorsque h est une forme parfaite, nous désignons par $\sigma(h) \subset X_N^*$ l'enveloppe convexe de l'ensemble $m(h)$ de ses vecteurs minimaux. Voronoï a montré [15] (§§8–15) que les cellules $\sigma(h)$ et leurs intersections, quand h parcourt l'ensemble des formes parfaites, définissent une décomposition cellulaire de X_N^*, compatible avec l'action de Γ. Nous munissons X_N^* de la CW-structure correspondante. Si τ est une cellule (fermée) de X_N^* et si h est une forme parfaite telle que $\tau \subset \sigma(h)$, on note $m(\tau)$ l'ensemble des vecteurs v de $m(h)$ tels que $\widehat{v}$ soit dans τ. La cellule τ est l'enveloppe convexe de $m(\tau)$ et l'on a $m(\tau) \cap m(\tau') = m(\tau \cap \tau')$.

2. Calculs explicites

2.1. – Notons Σ_n, $0 \leqslant n \leqslant \dim(X_N^*) = d(N) = N(N+1)/2 - 1$, un ensemble de représentants, modulo l'action de Γ, des cellules σ de dimension n dans X_N^* qui rencontrent X_N et telles qu'aucun élément du stabilisateur de σ dans Γ ne change l'orientation de σ. Pour $N \leqslant 6$ nous avons déterminé un tel ensemble Σ_n. En particulier on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. – *Le cardinal de Σ_n est zéro sauf dans les cas indiqués dans le Tableau* 1.

2.2. – Pour tout entier $m > 1$ on note $\mathcal{S}_m$ la classe (de Serre) des groupes abéliens finis A tels que tout nombre premier p divisant l'ordre de A vérifie $p \leqslant m$. Si $\gamma \in \Gamma$ est d'ordre premier p on sait que $p \leqslant N+1$. Il en résulte que l'action de Γ sur X_N^* permet de définir un complexe $V = (V_n, d_n)$ tel que V_n soit isomorphe au module libre engendré par Σ_n, $n \geqslant 0$, et que l'homologie de V coïncide, modulo $\mathcal{S}_{N+1}$, avec l'homologie Γ-équivariante de la paire $(X_N^*, \partial X_N^*)$ ([4], VII, Prop. 8.1, [14], Prop. 2.2) :

$$H_n(V) = H_n^\Gamma(X_N^*, \partial X_N^*; \mathbb{Z}) \pmod{\mathcal{S}_{N+1}}.$$

PROPOSITION 2.2. – (i) *Si $\Gamma = \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$, on a, modulo $\mathcal{S}_5$,*

$$H_n(V,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ n = 9, 14, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

(ii) *Si $\Gamma = \mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$, on a, modulo $\mathcal{S}_7$,*

$$H_n(V,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & si\ n = 10, 11, 15, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

(iii) *Si $\Gamma = \mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$, on a, modulo $\mathcal{S}_7$,*

$$H_n(V,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & si\ n = 15, \\ \mathbb{Z} & si\ n = 10, 11, 12, 20, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2.3. – La preuve des Propositions 2.1 et 2.2 utilise la classification des formes parfaites. Si $N \leqslant 7$, le travail de Jaquet [5] fournit un ensemble $\mathcal{P}$ de représentants des formes parfaites de rang N et, si $h \in \mathcal{P}$, la liste $m(h)$ des vecteurs minimaux de h et une liste des formes « voisines » de h modulo l'action de son stabilisateur Γ_h, ainsi que leurs représentants dans $\mathcal{P}$. On en déduit une liste des faces de $\sigma(h)$ modulo Γ_h.

Pour obtenir un ensemble Σ_n comme dans 2.1, on procède comme suit, à l'aide d'un ordinateur. Pour chaque $h \in \mathcal{P}$ on calcule les éléments de Γ_h, et donc la liste $\mathcal{F}_{1,h}$ de toutes ses faces τ de codimension 1 (i.e. les ensembles $m(\tau)$ correspondants). Par récurrence sur l'entier n, $1 \leqslant n \leqslant d(N)$, on définit un ensemble

Tableau 1. – $\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$, $\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$ pour $6 \leqslant n \leqslant 20$.

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z})$	0	0	1	7	6	1	0	2	3						
$\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z})$	0	0	0	3	46	163	340	544	636	469	200	49	5	0	0
$\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z})$	3	10	18	43	169	460	815	1132	1270	970	434	114	27	14	7

$\mathcal{F}_{n,h}$ de cellules de codimension n dans X_N^*, puis un système de représentants $\mathcal{C}_{n,h} \subset \mathcal{F}_{n,h}$ pour l'action de Γ sur $\mathcal{F}_{n,h}$ (*cf.* 4.3). Par définition, $\mathcal{F}_{n+1,h}$ est l'ensemble des cellules $\varphi \cap \tau$, $\varphi \in \mathcal{F}_{n,h}$, $\tau \in \mathcal{C}_{n,h}$, qui sont de codimension $n+1$ dans $\sigma(h)$. L'ensemble Σ_n est alors obtenu en choisissant des représentants modulo Γ de la réunion des $\mathcal{C}_{d(N)-n,h}$, $h \in \mathcal{P}$.

2.4. – Pour calculer la différentielle de V on procède comme suit. Pour chaque cellule σ de Σ_n, $n \geqslant 0$, on choisit un ordre sur l'ensemble $m(\sigma)$ de ses vecteurs minimaux. Pour toute cellule $\tau' \subset \sigma$ cet ordre fournit un ordre sur $m(\tau')$ et donc une orientation du sous-espace vectoriel réel $\mathbb{R}\langle\tau'\rangle$ engendré par $m(\tau')$ dans l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles. Si τ' est une face de σ on obtient une base orientée B de $\mathbb{R}\langle\sigma\rangle$ en adjoignant à la suite d'une base positive de $\mathbb{R}\langle\tau'\rangle$ l'élément $\widehat{v}$, où v est l'élément minimal de $m(\sigma) - m(\tau')$ (pour l'ordre choisi ci-dessus). Notons $\varepsilon(\tau', \sigma) = \pm 1$ l'orientation de B dans $\mathbb{R}\langle\sigma\rangle$.

Si $\tau \in \Sigma_{n-1}$ est équivalente à la face $\tau' = \tau \cdot \gamma$ de $\sigma \in \Sigma_n$, on pose $\eta(\tau, \tau') = 1$ (resp. $\eta(\tau, \tau') = -1$) selon que γ est compatible (ou non) aux orientations choisies de $\mathbb{R}\langle\tau\rangle$ et $\mathbb{R}\langle\tau'\rangle$. On a alors $d_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} \sum_{\tau'} \eta(\tau, \tau')\varepsilon(\tau', \sigma)\tau$, où τ' parcourt l'ensemble des faces de σ équivalentes à τ. On notera que l'identité $d_{n+1} \circ d_n = 0$, $n \geqslant 0$, est un bon test pour vérifier les calculs effectués par l'ordinateur.

3. Cohomologie des groupes modulaires

Si St_N est le module de Steinberg de $\mathrm{SL}_{N,\mathbb{Q}}$ on a

$$H_n^{\Gamma}(X_N^*, \partial X_N^*; \mathbb{Z}) = H_{n-N+1}(\Gamma, \mathrm{St}_N) \tag{3.1}$$

(*cf.* [14]). Le théorème de dualité de Borel et Serre [3] dit que

$$H_m(\Gamma, \mathrm{St}_N) = H^{d-m}(\Gamma, \widetilde{\mathbb{Z}}) \ (\mathrm{mod}\, \mathcal{S}_{N+1}),$$

où $d = N(N-1)/2$ est la dimension cohomologique virtuelle de Γ et $\widetilde{\mathbb{Z}}$ est le Γ-module trivial $\mathbb{Z}$ sauf quand $\Gamma = \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$ et N est pair, auquel cas $\gamma \in \Gamma$ agit par multiplication par $\det(\gamma)$ sur $\widetilde{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Enfin, le lemme de Shapiro montre que, modulo $\mathcal{S}_2$,

$$H^m\big(\mathrm{SL}_N(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\big) = H^m\big(\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\big) \oplus H^m\big(\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}), \widetilde{\mathbb{Z}}\big).$$

La Proposition 2.2 implique donc le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. – (i) *Modulo $\mathcal{S}_5$ on a*

$$H^m\big(\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\big) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, 5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Modulo $\mathcal{S}_7$ on a*

$$H^m\big(\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\big) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, 5, 8, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad H^m\big(\mathrm{SL}_6(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \text{si } m = 5, \\ \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, 8, 9, 10, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. K-théorie des entiers

4.1. – Rappelons que $K_1(\mathbb{Z}) = K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, $K_3(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/48$ et $K_4(\mathbb{Z}) = 0$ [10].

THÉORÈME 4.1. – *On a $K_5(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs, l'ordre de $K_6(\mathbb{Z})$ est une puissance de* 3.

Notons Q (resp. Q_N) la catégorie définie par Quillen [8] à partir des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini (resp. de rang au plus N). Si BQ est le classifiant de Q, on a $K_m(\mathbb{Z}) = \pi_{m+1} BQ$, et l'on dispose de suites exactes [9]

$$\cdots \to H_m(BQ_{N-1}, \mathbb{Z}) \to H_m(BQ_N, \mathbb{Z}) \to H_{m-N}\big(\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}), \mathrm{St}_N\big) \to H_{m-1}(BQ_{N-1}, \mathbb{Z}) \to \cdots \tag{4.1}$$

On sait aussi que $H_0(\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}), \mathrm{St}_N) = 0$ si $N \geqslant 1$.

PROPOSITION 4.2. – (i) *Modulo* $\mathcal{S}_2$ *on a*

$$H_3\big(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_3\big)=\mathbb{Z}$$

et

$$H_1\big(\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_5\big)=H_2\big(\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_4\big)=H_4\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_2\big)=0.$$

(ii) *Modulo* $\mathcal{S}_3$ *on a*

$$H_3\big(\mathrm{GL}_4(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_4\big)=\mathbb{Z}$$

et

$$H_1\big(\mathrm{GL}_6(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_6\big)=H_2\big(\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_5\big)=H_4\big(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_3\big)=H_5\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_2\big)=0.$$

Pour démontrer cette proposition on utilise les résultats du calcul menant à la Proposition 2.1 et les résultats de [12,6,13] et [14]. D'après (3.1) et [4] ou [14], on peut calculer les groupes $H_m(\mathrm{GL}_N(\mathbb{Z}),\mathrm{St}_N)$ à l'aide d'une suite spectrale dont le terme E_1 est une somme de groupes d'homologie des stabilisateurs des cellules des Σ_n. L'analyse de ces groupes conduit à la Proposition 4.2.

4.2. – A l'aide de (4.1) et de [6] on déduit de la Proposition 4.2 que $H_6(BQ,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ modulo $\mathcal{S}_2$ et que $H_7(BQ,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ modulo $\mathcal{S}_3$. Par ailleurs on démontre, en utilisant [1], que le noyau du morphisme d'Hurewicz $K_5(\mathbb{Z})\to H_6(BQ,\mathbb{Z})$ (resp. $K_6(\mathbb{Z})\to H_7(BQ,\mathbb{Z})$) est dans $\mathcal{S}_2$ (resp. $\mathcal{S}_3$). Enfin, on sait que $K_6(\mathbb{Z})$ est fini, que $K_5(\mathbb{Z})$ est de rang un, et qu'aucun d'eux n'a de la 2-torsion [11]. Le Théorème 4.1 en résulte.

4.3. – La plupart des programmes ont été développés en utilisant le logiciel PARI-GP [2]. Nous utilisons aussi les programmes de [7] pour décider si deux formes de C_N^* sont équivalentes sous l'action de Γ. Enfin, le logiciel GAP [16] permet de produire tous les éléments des groupes finis Γ_h, $h\in\mathcal{P}$, à partir de leurs générateurs et de calculer certains de leurs groupes d'homologie.

Les calculs ont été réalisés sur les ordinateurs de l'UMS Médicis, ceux du MPI Bonn, et ceux du pôle arithmétique du GTA.

Références bibliographiques

[1] D. Arlettaz, The Hurewicz homomorphism in algebraic K-theory, J. Pure Appl. Algebra 71 (1991) 1–12.
[2] C. Batut, K. Belabas, D. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier, The PARI/GP package, 1989–2001, Laboratoire A2X, Université Bordeaux I. Primary ftp site: ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari. Home Page: http://www.parigp-home.de.
[3] A. Borel, J.-P. Serre, Corners and arithmetic groups, Comment. Math. Helv. 48 (1973) 436–491.
[4] K. Brown, Cohomology of Groups, Graduate Texts in Math., Vol. 87, Springer, New York, 1982.
[5] D.-O. Jaquet, Énumération complète des classes de formes parfaites en dimension 7, Thèse de doctorat, Université de Neuchâtel, 1991.
[6] R. Lee, R.H. Szczarba, On the torsion in $K_4(\mathbb{Z})$ and $K_5(\mathbb{Z})$, Duke Math. J. 45 (1978) 101–129.
[7] W. Plesken, B. Souvignier, Computing isometries of lattices, J. Symbolic Comput. 24 (1997) 327–334.
[8] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, in: Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, 1973, pp. 85–147.
[9] D. Quillen, Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers, in: Lecture Notes in Math., Vol. 341, Springer, 1973, pp. 179–198.
[10] J. Rognes, $K_4(\mathbb{Z})$ is the trivial group, Topology 39 (2000) 267–281.
[11] J. Rognes, C. Weibel, Two-primary algebraic K-theory of rings of integers in number fields (with an appendix by M. Kolster), J. Amer. Math. Soc. 13 (2000) 1–54.
[12] C. Soulé, The cohomology of $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, Topology 17 (1978) 1–22.
[13] C. Soulé, Addendum to the article [6] "On the torsion in $K_*(\mathbb{Z})$", Duke Math. J. 45 (1978) 131–132.
[14] C. Soulé, On the 3-torsion in $K_4(\mathbb{Z})$, Topology 39 (2000) 259–265.
[15] G. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques I, J. Crelle 133 (1907) 97–178.
[16] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.2, 2000. http://www.gap-system.org.