C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 333–336

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Calcul des variations/*Calculus of Variations*)

Estimation d'erreur et éclatement en homogénéisation périodique

Georges Griso

Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, Laboratoire Jacques-Louis Lions (Analyse Numérique), 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu et accepté le 7 juin 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On est intéressé dans cette Note par l'obtention de l'erreur dans les problèmes d'homogénéisation périodique. Les techniques utilisées sont celles de l'éclatement périodique. L'estimation de l'erreur est obtenue sans faire d'hypothèses supplémentaires de régularité sur les correcteurs. ***Pour citer cet article : G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 333–336.***

Error estimate and unfolding for periodic homogenization

Abstract This Note deals with the error estimate in problems of periodic homogenization. The methods used are those of the periodic unfolding method. The error estimate is obtained without any supplementary hypothesis of regularity on correctors. ***To cite this article: G. Griso, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 333–336.***

Abridged English version

The error estimate in periodic homogenization problems was presented for the first time in [1] by Bensoussan, Lions and Papanicolaou, and a second time in [4] by Oleinik, Shamaev and Yosifian, and more recently again in [3] by Cioranescu and Donato. All these works consider that the correctors belong to $\mathrm{W}^{1,\infty}(Y)$ ($Y = [0,1]^n$ being the reference cell). The estimate is of order $\varepsilon^{1/2}$. The additional regularity of the correctors holds true when the coefficients of the operator are very regular, which is not necessarily the situation in homogenization.

This study follows the notations of [2].

In Theorem 1, we show, that the $\mathrm{H}^{1/2}$ periodic defect of a harmonic function on Y is equivalent to its H^1 norm. We show that the orthogonal of the space $\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y)$ is isomorphic to the direct sum of the spaces of the differences of the traces on the opposite faces of the cell Y. This theorem is the consequence of a lemma of orthogonality: the orthogonal of the periodic functions with respect to the first $k+1$ variables in the set of periodic functions with respect to the first k variables, is isomorphic to the set of traces on the $(k+1)$-face of the cell Y (i.e., on $y_{k+1} = 0$). This lemma is proved by an explicit lifting of the traces from the faces of Y.

Adresse e-mail : georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso).

S1631-073X(02)02477-9/FLA

Part 3 is dedicated to Theorem 2 which is the essential tool to obtain estimates. This theorem is related to the periodic unfolding method (*see* [2]). We show that for all ϕ in $\mathrm{H}^1(\Omega)$, where Ω is an open set of $\mathbb{R}^n$, there exists a function $\widehat{\phi}_\varepsilon$ in $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y))$, such that the distance between the unfolded $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\phi)$ and $\nabla_x\phi + \nabla_y\widehat{\phi}_\varepsilon$ is of order of ε in the space $\mathrm{H}^{-1}(\Omega, \mathrm{L}^2(Y, \mathbb{R}^n))$. In the first part of its proof, we first evaluate the differences of the traces of ϕ on all opposite faces of the cells contained in Ω. Recall that ϕ can be decomposed in the form $\phi = \mathcal{Q}_\varepsilon(\phi) + \mathcal{R}_\varepsilon(\phi)$, see [2]. Then estimates (1), are obtained by projecting each term of the decomposition on the space $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y, \mathbb{R}^n))$.

Theorem 3 gives an estimate of the error without any hypothesis on the regularity of correctors, but it requires that the solution of the homogenized problem be in $\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)$, $p > n$ (which occurs for example, if the boundary of Ω is regular and if the right hand side f of the homogenized problem is in $\mathrm{L}^p(\Omega)$). Finally, we make precise the error estimate in the case of a better regularity of the correctors. We get in particular, the classical estimate mentioned above.

The detailed demonstrations including the case of a domain of Lipschitzian boundary and of $f \in \mathrm{L}^p(\Omega)$ ($p > \frac{2n}{n+2}$) will be presented in forthcoming articles.

1. Introduction

L'estimation de l'erreur dans le problème d'homogénéisation périodique a été présentée pour la première fois dans [1] par Bensoussan, Lions et Papanicolaou, puis reprise dans [4] par Oleinik, Shamaev et Yosifian et plus récemment dans [3] par Cioranescu et Donato. Dans tous ces travaux on fait l'hypothèse que les correcteurs appartiennent à $\mathrm{W}^{1,\infty}(Y)$, l'estimation obtenue étant en $\varepsilon^{1/2}$. La régularité supposée des correcteurs peut être obtenue dans le cas où la matrice de l'opérateur est très régulière, ce qui n'est pas le cas en général en homogénéisation.

Le Théorème 1 mesure le défaut de périodicité d'une fonction appartenant à $\mathrm{H}^1(Y)$, à l'aide des différences de ses traces sur les faces opposées de Y. Le Théorème 2 est l'outil essentiel de l'éclatement périodique pour obtenir des estimations. On évalue la distance entre les éclatés des gradients des fonctions de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et la somme des gradients des éléments de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ et des gradients des éléments de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y)$. Le Théorème 3 donne une estimation de l'erreur sans hypothèse supplémentaire sur la régularité des corecteurs. Dans le cas d'une plus grande régularité de ceux-ci, on retrouve l'estimation classique.

Ce travail fait suite et utilise toutes les notations de [2].

2. Un résultat préliminaire

On munit $\mathrm{H}^1(Y)$ du produit scalaire $\langle\phi, \psi\rangle = \int_Y \nabla_y\phi\cdot\nabla_y\psi + \int_Y \phi\psi$. On note, $V_0 = \mathrm{H}^1(Y)$, $Y = [0,1]^n$, et V_k, $k \in \{1,\dots,n\}$, le sous-espace de $\mathrm{H}^1(Y)$ formé par les fonctions périodiques de périodes $\vec{e}_i$, $i \in \{1,\dots,k\}$, $V_n = \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y)$, $\widetilde{V}_{k+1}$ l'orthogonal de V_{k+1} dans V_k, $k \in \{0,\dots,n-1\}$ et $\mathrm{H}^1_\perp(Y)$ l'orthogonal de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y)$ dans $\mathrm{H}^1(Y)$. Les faces de la cellule Y sont dénotées $Y_i = \{y \in Y;\ y_i = 0\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

THÉORÈME 1. – *On a l'inégalité suivante* :

$$\forall\phi \in \mathrm{H}^1_\perp(Y), \quad \|\phi\|_{\mathrm{H}^1(Y)} \leqslant C\sum_{i=1}^n \left\|\phi(\cdot + \vec{e}_i) - \phi\right\|_{\mathrm{H}^{1/2}(Y_i)}.$$

LEMME. – *Pour toute fonction ϕ appartenant à $\widetilde{V}_{k+1}$, on a $\|\phi\|_{H^1(Y)} \leqslant C\|\phi\|_{\mathrm{H}^{1/2}(Y_{k+1})}$. La constante ne dépend que de n.*

Démonstration. – Le lemme se démontre en deux étapes. On commence par construire un relèvement dans V_k des traces sur Y_{k+1} des fonctions de $\widetilde{V}_{k+1}$. On en déduit ensuite l'estimation des éléments de $\widetilde{V}_{k+1}$ par projection.

Etape 1. On se donne une fonction θ appartenant à $\mathcal{D}(-1/2, 1/2)$ égale à 1 au voisinage de zéro. On rappelle que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$ il existe un relèvement continu $\tilde{r}_k$ dans V_k des traces sur Y_{k+1} des éléments de V_k.

Soient $\Psi \in \widetilde{V}_{k+1}$ et ψ sa trace sur Y_{k+1}. Les éléments de $\widetilde{V}_{k+1}$ vérifient $\Psi(y_1, \dots, 1-y_{k+1}, \dots, y_n) = -\Psi(y)$. La fonction $\overline{\Psi}(y) = \theta(y_{k+1})\tilde{r}_k(\psi)(y) - \theta(1-y_{k+1})\tilde{r}_k(\psi)(y_1, \dots, 1-y_{k+1}, \dots, y_n)$ appartient à V_k et a les mêmes traces que Ψ sur les faces Y_{k+1} et $\vec{e}_{k+1} + Y_{k+1}$. Par ailleurs $\|\overline{\Psi}\|_{\mathrm{H}^1(Y)} \leqslant C\|\psi\|_{\mathrm{H}^{1/2}(Y_{k+1})}$.

Etape 2. La différence $\Psi - \overline{\Psi}$ appartient à V_{k+1}. La projection orthogonale de $\overline{\Psi}$ sur $\widetilde{V}_{k+1}$ est donc égale à Ψ, d'où le lemme. □

Démonstration du Théorème 1. – On a $\mathrm{H}^1_\perp(Y) = \widetilde{V}_n \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_1$. On décompose $\phi \in \mathrm{H}^1_\perp(Y)$ dans cette somme directe et on évalue les normes des projections grâce au lemme. □

3. Un résultat complémentaire

Ω est un domaine borné de frontière lipschitzienne, Ω_ε est la réunion des cellules $\varepsilon(\xi + Y)$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$, rencontrant Ω. Pour toute fonction $\phi \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ on note

$$M_Y^\varepsilon(\phi)(x) = \int_Y \mathcal{T}_\varepsilon(\phi)(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\{\varepsilon[x/\varepsilon]_Y + \varepsilon Y\}} \phi(z)\,\mathrm{d}z.$$

THÉORÈME 2. – *Soit* $\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, *on a* :

$$\big\|\mathcal{T}_\varepsilon(\phi) - \phi\big\|_{\mathrm{L}^2(\Omega\times Y)} \leqslant C\varepsilon\|\phi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}. \tag{1}$$

De plus, il existe $\widehat{\phi}_\varepsilon \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y))$ *tel que*

$$\|\widehat{\phi}_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y))} \leqslant C\|\phi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}, \qquad \big\|\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\phi) - \nabla_x\phi - \nabla_y\widehat{\phi}_\varepsilon\big\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathrm{L}^2(Y,\mathbb{R}^n))} \leqslant C\varepsilon\|\phi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}. \tag{2}$$

Les constantes ne dépendent que de n *et* $\partial\Omega$.

Démonstration. – L'estimation (1) s'obtient en évaluant $\mathcal{T}_\varepsilon(\phi) - M_Y^\varepsilon(\phi)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon \times Y)$ puis $M_Y^\varepsilon(\phi) - \phi$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon)$ grâce à l'inégalité de Poincaré–Wirtinger.

On démontre ensuite (2) en deux étapes.

Etape 1. Notons $K_i = Y \cup (\vec{e}_i + Y)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. On définit l'opérateur $\mathcal{T}_{\varepsilon,K_i}$ de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon \times K_i)$ par

$$\psi \in \mathrm{L}^2(\Omega), \quad \mathcal{T}_{\varepsilon,K_i}(\psi)(x,y) = \psi\left(\varepsilon\left[\frac{x}{\varepsilon}\right]_Y + \varepsilon y\right), \quad \text{pour } x \in \Omega,\ y \in K_i,$$

où ψ est prolongé par 0 en dehors de Ω. On montre (*voir* [2])

$$\big\|\mathcal{T}_{\varepsilon,K_i}(\psi)(\cdot, \cdot + \vec{e}_i) - \mathcal{T}_{\varepsilon,K_i}(\psi)(\cdot,\cdot)\big\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathrm{L}^2(Y))} \leqslant C\varepsilon\|\psi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}. \tag{3}$$

Etape 2. Soit $\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, on a $\phi = \Phi + \varepsilon\widetilde{\phi}$, où $\Phi = \mathcal{Q}_\varepsilon(\phi)$ et $\widetilde{\phi} = \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{R}_\varepsilon(\phi)$. On a les estimations suivantes : $\|\Phi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\widetilde{\phi}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon\|\nabla_x\widetilde{\phi}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon,\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\phi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$, voir [2]. On décompose $\mathcal{T}_\varepsilon(\widetilde{\phi})$ en la somme d'un élément $\widehat{\phi}_\varepsilon$ appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon, \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y))$ et d'un élément appartenant à $\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon, \mathrm{H}^1_\perp(Y))$. On obtient de cette décomposition $\|\widehat{\phi}_\varepsilon\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{H}^1(Y))} \leqslant C\|\phi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$ et du Théorème 1 et de (3) $\|\mathcal{T}_\varepsilon(\widetilde{\phi}) - \widehat{\phi}_\varepsilon\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathrm{L}^2(Y,\mathbb{R}^n))} \leqslant C\varepsilon\|\phi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}$.

On évalue ensuite $\|\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\Phi) - \nabla_x\Phi\|_{\mathrm{H}^{-1}(\Omega,\mathrm{L}^2(Y,\mathbb{R}^n))}$. Pour cela on compare $\nabla_x\Phi$ à sa projection sur l'espace des fonctions constantes dans les cellules de Ω, puis utilisant le fait que $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\Phi)$ appartient à $\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon, \mathrm{H}^1(Y,\mathbb{R}^n))$ (car $y \mapsto \mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\Phi)(x,y)$ est linéaire) et que sa projection dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\varepsilon, \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y,\mathbb{R}^n))$ ne dépend pas de y, on aboutit à l'estimation cherchée. □

COROLLAIRE. – *Si* $\phi \in \mathrm{H}^2(\Omega)$, *en appliquant* (1) *du Théorème* 2 *à* $\nabla_x\phi$, *il vient que* $\|\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\phi) - \nabla_x\phi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega\times Y,\mathbb{R}^n)} \leqslant C\varepsilon\|\phi\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}$.

4. Estimation de l'erreur

On considère le problème d'homogénéisation suivant : trouver $\phi^\varepsilon \in \mathrm{H}^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tel que

$$\forall\psi \in \mathrm{H}^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \big\{\phi \in \mathrm{H}^1(\Omega);\ \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_0\big\}, \qquad \int_\Omega A\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\nabla\phi^\varepsilon\cdot\nabla\psi = \int_\Omega f\psi,$$

où Γ_0 est une partie de mesure non nulle de $\partial\Omega$, f appartient à $\mathrm{H}^{-1}(\Omega)$ et A est une matrice carrée d'éléments appartenant à $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{per}}(Y)$, vérifiant la condition d'uniforme ellipticité $c|\xi|^2 \leqslant A(y)\xi\cdot\xi \leqslant C|\xi|^2$ p.p. $y\in Y$, avec des constantes c et C strictement positives. On a montré, voir [2], que $\nabla_x\phi^\varepsilon - \nabla_x\Phi - \mathcal{U}_\varepsilon(\nabla_y\widehat{\phi})$ converge fortement vers 0 dans $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^n)$, où $\mathcal{U}_\varepsilon$ est l'opérateur de moyennisation et où $(\Phi,\widehat{\phi})\in \mathrm{H}^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times \mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y)/\mathbb{R})$ est la solution du problème limite d'homogénéisation éclaté

$$\int_\Omega\int_Y A\{\nabla_x\Phi+\nabla_y\widehat{\phi}\}\cdot\{\nabla_x\Psi+\nabla_y\widehat{\psi}\} = \int_\Omega f\Psi,\quad \forall(\Psi,\widehat{\psi})\in \mathrm{H}^1_{\Gamma_0}(\Omega)\times \mathrm{L}^2\big(\Omega,\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y)/\mathbb{R}\big). \tag{4}$$

On rappelle que les correcteurs χ_i, $i\in\{1,\dots,n\}$, sont les solutions des problèmes variationnels

$$\chi_i\in \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y),\qquad \int_Y A(y)\nabla_y\big(\chi_i(y)+y_i\big)\nabla_y\psi(y)\,\mathrm{d}y = 0,\qquad \forall\psi\in \mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y).$$

Ils nous permettent d'exprimer $\widehat{\phi}$ en terme de $\nabla_x\Phi$: $\widehat{\phi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\chi_i$.

THÉORÈME 3. – *On suppose que la solution Φ du problème éclaté appartient à $\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)$, $p>n$. On a alors*

$$\big\|\phi^\varepsilon-\Phi\big\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \left\|\nabla_x\phi^\varepsilon - \nabla_x\Phi - \nabla_y\widehat{\phi}\left(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} \leqslant C\varepsilon^{\inf\{1/2,1-n/p\}}. \tag{5}$$

La constante dépend de A, n, p, $\|\Phi\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)}$ et $\partial\Omega$.

Démonstration. – Soit $\Psi\in \mathrm{H}^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Par le Théorème 2, il existe $\widehat{\psi}_\varepsilon\in \mathrm{L}^2(\Omega,\mathrm{H}^1_{\mathrm{per}}(Y))$ vérifiant (2). On prend le couple $(\Psi,\widehat{\psi}_\varepsilon)$ comme fonction test dans le problème éclaté (4). Le gradient de Φ appartient à $\mathrm{H}^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$, et $\|(1-\rho_\varepsilon)\nabla_x\Phi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\Phi\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)}$, où $\rho_\varepsilon(x) = \inf\big\{\frac{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)}{\varepsilon},1\big\}$, ce qui nous donne

$$\left|\int_\Omega f\Psi - \int_{\Omega\times Y} A(y)\rho_\varepsilon(x)\left\{\nabla_x\Phi(x) + \sum_{i=1}^n\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}(x)\nabla_y\chi_i(y)\right\}\big(\nabla_x\Psi+\nabla_y\widehat{\psi}_\varepsilon\big)\right| \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\Psi\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}. \tag{6}$$

On remplace ensuite $\nabla_x\Psi+\nabla_y\widehat{\psi}_\varepsilon$ par $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\Psi)$ ($\rho_\varepsilon\nabla_x\Phi$ appartient à $\mathrm{H}^1_0(\Omega,\mathbb{R}^n)$ par (2) du Théorème 2), puis on supprime ρ_ε. On poursuit en remplaçant d'une part $\nabla_x\Phi$ par $\mathcal{T}_\varepsilon(\nabla_x\Phi)$ grâce au corollaire du Théorème 2, et d'autre part $\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$ par $\mathcal{T}_\varepsilon(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i})$, car du théorème de Morrey il vient que $\|\mathcal{T}_\varepsilon(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i})-\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^{1-n/p}\|\Phi\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)}$. On peut dès lors comparer ϕ^ε à la solution approchée $\Phi+\sum_{i=1}^n\varepsilon\rho_\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\chi_i(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ pour obtenir (5). □

Complément 1. – Les hypothèses du théorème sont vérifiées dans le cas où Ω est de frontière $\mathcal{C}^{1,1}$, $\Gamma_0=\partial\Omega$ et $f\in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $p>n$. En effet, la solution Φ du problème éclaté appartient à $\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)$ (avec $\|\Phi\|_{\mathrm{W}^{2,p}(\Omega)}\leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$).

Complément 2. – Si $\Phi\in \mathrm{W}^{2,p}(\Omega)$ $(2\leqslant p)$, $\chi_i\in \mathrm{W}^{1,r}_{\mathrm{per}}(Y)$ $(2\leqslant r)$, avec p et r vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}<\frac{1}{2}+\frac{1}{n}$, l'exposant de ε devient $\inf\big\{\frac{1}{2},1-n\big(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\big)\big\}$. Cet exposant est égal à $\frac{1}{2}$ si $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$.

THÉORÈME 4. – *On suppose que Ω est de frontière $\mathcal{C}^{1,1}$, $\Gamma_0=\partial\Omega$ et $f\in \mathrm{L}^p(\Omega)$, avec $p>\frac{2n}{n+2}$. On a alors $\|\phi^\varepsilon-\Phi\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\nabla_x\phi^\varepsilon-\nabla_x\Phi-\mathcal{U}_\varepsilon(\nabla_y\widehat{\phi})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^n)} \leqslant C\varepsilon^{\inf\{1/2,\frac{1/2+1/n-1/p}{1+1/n}\}}\|f\|_{\mathrm{L}^p(\Omega)}$. La constante dépend de p, n, A et $\partial\Omega$.*

Références bibliographiques

[1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam, 1978.
[2] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, Periodic unfolding and homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, to appear.
[3] D. Cioranescu, P. Donato, An Introduction to Homogenization, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., Vol. 17, Oxford University Press, 1999.
[4] O.A. Oleinik, A.S. Shamaev, G.A. Yosifian, Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization, North-Holland, Amsterdam, 1992.