

# On the envelope of 1-parameter families of curves tangent to a semicubic cusp

Gianmarco Capitanio<sup>1</sup>

Équipe de géométrie et dynamique, Université Paris VII, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Received 16 May 2002; accepted 3 June 2002

Note presented by Vladimir Arnold.

---

## Abstract

In this Note we study the envelope of 1-parameter family of smooth curves tangent to a curve having a semicubic cusp, such that the radius of curvature at the tangency point vanishes when this point approaches the cusp. We show that, generically, the closure of the envelope has two semicubic cusps at the same point, one of which is the given cusp, tangent to the same straight line. *To cite this article: G. Capitanio, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 249–254.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Sur l'enveloppe des familles à un paramètre de courbes tangentes à un cusp semicubique

## Résumé

Dans cette Note on étudie l'enveloppe d'une famille à un paramètre de courbes lisses tangentes à une courbe ayant un cusp semicubique, telles que le rayon de courbure au point de tangence tende vers zéro lorsque ce point approche le cusp. On montre que, génériquement, l'adhérence de cette enveloppe a deux cusps semicubiques au même point, dont l'un est le cusp donné, tangents à une même droite. *Pour citer cet article : G. Capitanio, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 249–254.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Version française abrégée

Soit  $\gamma$  une courbe plane réelle, ayant un cusp semicubique en  $O$ . En tout point  $q \neq O$  de  $\gamma$  on se donne une courbe lisse  $P_q$ , tangente à  $\gamma$  en  $q$ . Dans cette Note on étudie l'enveloppe près de l'origine d'une telle famille à un paramètre, lorsque le rayon de courbure de  $P_q$  au point de tangence s'annule pour  $q \rightarrow O$ .

Ce problème est inspiré de l'exemple suivant, dû à V.I. Arnold [1] : l'enveloppe des paraboles tangentes à l'astroïde, de rayon de courbure  $2/3$  de celui de l'astroïde au point de tangence, est la réunion de l'astroïde et de la partie des droites tangentes aux cusps à l'extérieur de l'astroïde.

Le résultat principal de ce travail est le suivant.

**THÉORÈME 1.** – *Génériquement, l'adhérence de l'enveloppe d'une famille vérifiant les hypothèses ci-dessus a deux cusps semicubiques en  $O$ , dont l'une est  $\gamma$ , tangents à une même droite.*

Les cas non génériques et celui des courbes duales sont aussi traités ; notamment, on obtient un théorème analogue (les inflexions remplaçant les cusps) pour des familles de courbes tangentes à une courbe ayant un point d'inflexion.

Soit  $s \mapsto \gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  une paramétrisation lisse de  $\gamma$ , définie dans un voisinage de  $s = 0$  ; on peut supposer  $\alpha(s) = \alpha_2 s^2 + o(s^2)$  et  $\beta(s) = \beta_3 s^3 + o(s^3)$ , avec  $\alpha_2 \beta_3 \neq 0$ . Le rayon de courbure de  $\gamma$  s'annule

---

*E-mail address:* Gianmarco.Capitanio@math.jussieu.fr (G. Capitanio).

au cusp, notamment  $R_\gamma(s) = r_0|s| + o(|s|)$ , où  $r_0 = 4\sigma\alpha_2^2/(3\beta_3)$  et  $\sigma$  est le signe de  $\alpha_2$ . Le champ de vecteurs tangents à  $\gamma$ ,  $\tau(s) := \frac{1}{s}\dot{\gamma}(s)$  est lisse (lemme d’Hadamard) et partout non nul ; on note  $n$  sa norme et  $u, v$  ses composantes.

On suppose que le rayon de courbure de  $P_{\gamma(s)}$  au point de tangence soit une fonction lisse s’annulant en  $s = 0$  ; d’après le lemme de Hadamard, il existe une fonction lisse  $\rho$  telle que ce rayon est égal à  $s\rho(s)$ . Choisissons une paramétrisation  $t \mapsto (x_s(t), y_s(t))$  de  $P_{\gamma(s)}$ , telle que en  $t = 0$  la courbe passe par le point  $\gamma(s)$  avec vitesse  $\tau(s)$ . Les courbes tangentes s’écrivent alors :

$$P_{\gamma(s)} : \begin{cases} x_s(t) = \alpha(s) + u(s)t - \frac{v(s)n(s)}{2s\rho(s)}t^2 + f_1(s, t)t^3, \\ y_s(t) = \beta(s) + v(s)t + \frac{u(s)n(s)}{2s\rho(s)}t^2 + f_2(s, t)t^3, \end{cases}$$

où les *termes cubiques*,  $f_1, f_2$ , sont des fonctions définies dans un voisinage de  $(s = 0, t = 0)$ . On a ainsi une famille à un paramètre  $\{P_{\gamma(s)} : s \neq 0\}$ , lisse dans le sens que l’on suppose  $f_1, f_2$  et  $\rho$  lisses (en particulier en  $s = 0$ ).

Le *graphe* d’une telle famille est la surface singulière  $\{(p, s) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) : s \neq 0, p \in P_{\gamma(s)}\}$ . Considérons ses projections naturelles  $\pi_1(p, s) = p$  et  $\pi_2(p, s) = s$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}$  ;  $\pi_2$  est une fibration au dessus de  $s \neq 0$  et  $\pi_1$  est injective (pour  $t$  petit) sur chaque fibre  $\pi_2^{-1}(s) = P_{\gamma(s)}$ . L’enveloppe de la famille est l’ensemble des valeurs critiques de  $\pi_1$  (cf. [2]).

Notons  $F(s, t) := (x_s(t), y_s(t))$ . Le graphe étant paramétré par  $(s, t) \mapsto (F(s, t), \gamma(s))$ , les valeurs critiques de  $F$  et de  $\pi_1$  coïncident, donc l’enveloppe est l’image par  $F$  des solutions de  $\det F_*(s, t) = 0$ , où  $F_*$  est la matrice Jacobienne de  $F$ . Par un calcul explicite, on montre que  $\det F_* = tG(s, t)/(s\rho(s))^2$ ,  $G$  étant une fonction lisse en  $(s = 0, t = 0)$ . On en déduit que  $\gamma$  fait partie de l’enveloppe. Si  $t(s)$  est une solution de  $G = 0$ ,  $s \mapsto F(s, t(s))$  est une branche de l’enveloppe, paramétrée par  $s \neq 0$ , que l’on peut prolonger par continuité en  $s = 0$  dès que la limite pour  $s \rightarrow 0$  de  $t(s)^2/(s\rho(s))$  existe et est finie. Dans ce cas, on dit que cette branche *passse par l’origine*, parce que son adhérence contient  $O$ .

**THÉORÈME 2.** – Si  $\rho_0 \neq 0$ , l’enveloppe a deux branches passant par l’origine,  $\gamma$  et  $\delta : s \mapsto (\xi s^2 + o(s^2), \eta s^3 + o(s^3))$ , où  $\xi = 3(\beta_3\rho_0 - \sigma\alpha_2^2)/|\alpha_2|$  et  $\eta = (9\beta_3\rho_0 - 8\sigma\alpha_2^2)(\beta_3\rho_0 - \sigma\alpha_2^2)/(\sigma\alpha_2^2\rho_0)$ .

La démonstration de ce théorème (ainsi que des théorèmes suivants) se base sur l’étude, par le polygone de Newton, des solutions de  $G = 0$  s’annulant en  $s = 0$ , en particulier sur le calcul explicite du premier terme non nul dans le développement en série.

*Remarque 1.* – (1) Le Théorème 1 suit du Théorème 2. Les conditions de généricité,  $\rho_0 \neq 0, 9\beta_3\rho_0 \neq 8\sigma\alpha_2^2$  et  $\beta_3\rho_0 \neq \sigma\alpha_2^2$ , sont indépendantes des termes cubiques de la famille.

(2) Ces conditions de généricité s’écrivent  $\rho_0 \neq 0$  et  $\rho_0 \neq \frac{2}{3}r_0, \frac{3}{4}r_0$ . Cela montre que la famille de paraboles tangentes à l’astroïde, de rayon de courbure  $2/3$  de celui de l’astroïde, n’est pas générique.

(3) Les courbes  $\gamma$  et  $P_{\gamma(s)}$  ont le même rayon de courbure en  $\gamma(s)$  pour  $\rho(s) = R_\gamma(s)/|s| = r_0 + o(1)$ . Dans ce cas  $\delta = \gamma$  et l’enveloppe d’une telle famille est  $\gamma$  comptée deux fois.

On appelle *discriminant* l’hypersurface des familles non génériques (c’est-à-dire celles qui ne vérifient pas le Théorème 1). D’après le Théorème 2, dans l’espace  $\mathbb{R}^3$  de ces coefficients  $\alpha_2, \beta_3, \rho_0$ , le discriminant est la réunion des trois plans d’équation  $\alpha_2 = 0, \beta_3 = 0, \rho_0 = 0$  et des surfaces  $S_{2/3}, S_{3/4}$  d’équations  $9\beta_3\rho_0 = 8\sigma\alpha_2^2$  et  $\beta_3\rho_0 = \sigma\alpha_2^2$ . Dans le demi-espace  $\alpha_2 \geq 0, S_{2/3}$  et  $S_{3/4}$  coïncident avec deux cônes, dans  $\alpha_2 \leq 0$ , avec les mêmes cônes, tournés autour de l’axe des  $\alpha_2$  de  $90^\circ$ .

Le Théorème 2 permet de décrire l’allure de l’enveloppe à l’origine des familles génériques. Les résultats sont montrés en Fig. 1, où l’on considère aussi la surface  $S_1$ , d’équation  $3\beta_3\rho_0 = 4\sigma\alpha_2^2$ , qui ne fait pas partie du discriminant, au travers de laquelle  $\gamma$  et  $\delta$  échangent leurs positions. On peut se réduire au cas  $\beta_3 \geq 0$ , car  $(\alpha_2, \beta_3, \rho_0) \rightarrow (\alpha_2, -\beta_3, -\rho_0)$  a pour seul effet de renverser les orientations des enveloppes correspondantes.

On va maintenant étudier l’enveloppe des familles non génériques.

THÉORÈME 3. – *La branche  $\delta$  de toute famille appartenant à  $S_{2/3} \cup S_{3/4}$ , mis à part un sous ensemble de  $S_{3/4}$  de codimension infinie, est tangente à l'origine à l'axe des  $x$ .*

Un cusp est *symétrique* si la droite tangente au cusp le sépare en deux parties.

THÉORÈME 4. – *La branche  $\delta$  de l'enveloppe d'une famille typique de la strate  $S_{2/3}$  a un cusp non symétrique  $5/2$  à l'origine, opposé à celui de  $\gamma$ ; pour une famille typique de la strate  $S_{3/4}$ , cette branche a une singularité  $4/3$  à l'origine. Pour une famille typique de la strate  $\{\rho_0 = 0\}$ ,  $\delta$  a un cusp semicubique, non tangent à l'axe des  $x$ .*

De plus, on peut montrer que, pour tout nombre entier  $\ell$ , il existe des familles de  $S_{2/3}$  pour lesquelles  $\delta$  a un cusp  $(2\ell + 3)/2$  (symétrique et non symétrique), et il existe des familles de  $S_{3/4}$  pour lesquelles  $\delta$  a une singularité  $(2\ell + 2)/(2\ell + 1)$  ou un cusp symétrique  $(2\ell + 3)/(2\ell + 2)$ . Des formules explicites sont données dans la version anglaise de la Note.

Considérons le plan dual du plan initial, dont le point  $(\xi, \eta)$  représente la droite  $y + \xi x + \eta = 0$ . L'ensemble des droites tangentes à une courbe du plan définit une courbe dans le plan dual, sa *courbe duale*. Puisque la courbe duale d'une enveloppe de courbes est l'enveloppe des courbes duales, la théorie précédente admet une version duale.

Soit  $\check{\gamma}$  une courbe plane réelle lisse ayant un point d'inflexion à l'origine,  $s \mapsto \check{\gamma}(s) = (a_1s + o(s), b_3s^3 + o(s^3))$  une paramétrisation de  $\check{\gamma}$  avec  $a_1b_3 \neq 0$ . La courbure de  $\check{\gamma}$  est  $K_0s + o(s)$ ,  $K_0 = 6\sigma_1b_3/a_1^2$  ( $\sigma_1$  est le signe de  $a_1$ ). Considérons une famille lisse à un paramètre de courbes lisses  $\{Q_{\check{\gamma}(s)}\}_s$  telle que chaque  $Q_{\check{\gamma}(s)}$  soit tangente à  $\check{\gamma}$  au point  $\check{\gamma}(s)$  et sa courbure en ce point soit une fonction lisse s'annulant en  $s = 0$ , donc de la forme  $k_0s + o(s)$ . On suppose aussi que  $Q_O$  coïncide, dans un voisinage de l'origine, avec l'axe des  $x$ .

THÉORÈME 5. – *Pour  $k_0 \neq 0$ , l'enveloppe d'une telle famille a deux branches lisses passant par l'origine, dont l'une est  $\check{\gamma}$  et l'autre est  $\check{\delta} : s \mapsto (\xi s + o(s), \eta s^3 + o(s^3))$ , où  $\xi = 3(a_1^2k_0 - 4\sigma_1b_3)/(a_1k_0)$  et  $\eta = (a_1^2k_0 - 4\sigma_1b_3)(2a_1^2k_0 - 9\sigma_1b_3)/(\sigma_1a_1^2)$ .*

COROLLAIRE 6. – *Génériquement, la branche  $\check{\delta}$  de l'enveloppe d'une famille vérifiant les hypothèses ci-dessus est tangente en l'origine à  $\check{\gamma}$ , et elle a un point d'inflexion au point de tangence. Les conditions de généricité sont  $k_0 \neq 0$ ,  $\frac{2}{3}K_0$ ,  $\frac{3}{4}K_0$ .*

La branche  $\check{\delta}$  d'une famille générique parmi celles vérifiant  $k_0 = 4\sigma_1b_3/a_1^2$  a un cusp non symétrique  $5/2$  à l'origine, tandis que pour une famille générique parmi celles vérifiant  $k_0 = 9\sigma_1b_3/(2a_1^2)$  elle est le graphe d'une fonction en  $x$  ayant un point de maximum ou minimum dégénéré en  $x = 0$ .

## 1. Introduction

Let  $\gamma$  be a real plane curve, with a semicubic cusp at  $O$ . For any point  $q \neq O$  of  $\gamma$ , consider a smooth curve  $P_q$ , tangent to  $\gamma$  at  $q$ . In this Note we study the envelope, near the origin, of such a 1-parameter family, when the curvature radius of  $P_q$  at the tangency point vanishes as  $q \rightarrow O$ .

The following example, due to Arnold [1], has inspired this problem: the envelope of parabolae tangent to the astroid, having as curvature radius  $2/3$  of that one of the astroid at the tangency point, is the union of the astroid and of the part of tangent lines at the cusp points outside it.

The main result of this Note is the following.

THEOREM 1.1. – *Generically, the closure of the envelope of a family, verifying the hypothesis above, has two semicubic cusps at  $O$ , tangent to the same straight line, one of which is  $\gamma$ .*

Nongeneric and dual cases are also treated; in particular, we obtain a similar theorem (the inflection points replacing the cusp points) for families of curves tangent to a smooth curve with an inflection point.

## 2. The generic case

Let  $s \mapsto \gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s))$  be a smooth parameterization of  $\gamma$ ; we can suppose  $\alpha(s) = \alpha_2s^2 + o(s^2)$  and  $\beta(s) = \beta_3s^3 + o(s^3)$ , with  $\alpha_2\beta_3 \neq 0$ . Its curvature radius can be written as  $r_0|s| + o(|s|)$ , where

$r_0 = 4\sigma\alpha_2^2/(3\beta_3)$  and  $\sigma$  is the sign of  $\alpha_2$ . The nonzero field  $\tau(s) := \frac{1}{s}\dot{\gamma}(s)$  of vectors tangent to  $\gamma$ , is smooth by Hadamard lemma; we will note  $n$  its length and  $u, v$  its components.

For  $s \neq 0$ , let  $P_{\gamma(s)}$  be a smooth curve, tangent to  $\gamma$  at  $\gamma(s)$ , such that its curvature radius vanishes when  $s \rightarrow 0$ , as the curvature radius of  $\gamma$ . According to Hadamard lemma, this radius equals  $s\rho(s)$  for a smooth function  $\rho$ , defined near  $s = 0$ . Let us choose a parameterization  $t \mapsto (x_s(t), y_s(t))$  of  $P_{\gamma(s)}$ , such that it meets  $\gamma$  for  $t = 0$  with velocity  $\tau(s)$ . Then the tangent curves are:

$$P_{\gamma(s)} : \begin{cases} x_s(t) = \alpha(s) + u(s)t - \frac{v(s)n(s)}{2s\rho(s)}t^2 + f_1(s, t)t^3, \\ y_s(t) = \beta(s) + v(s)t + \frac{u(s)n(s)}{2s\rho(s)}t^2 + f_2(s, t)t^3, \end{cases} \quad (1)$$

where the *cubic terms*,  $f_1$  and  $f_2$ , are defined near  $(s = 0, t = 0)$ . Thus,  $\{P_{\gamma(s)} : s \neq 0\}$  is a 1-parameter family, smooth in the sense that  $f_1, f_2$  and  $\rho$  are supposed smooth, in particular at  $s = 0$ .

The *graph* of such a family is the singular surface  $\{(p, s) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) : s \neq 0, p \in P_{\gamma(s)}\}$ . Consider its natural projections  $\pi_1(p, s) = p$  and  $\pi_2(p, s) = s$  on  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}$ ;  $\pi_2$  is a fibration over  $s \neq 0$  and  $\pi_1$  is injective (for  $t$  small) on every fiber  $\pi_2^{-1}(s) = P_{\gamma(s)}$ . The *envelope* of the family is the set of critical values of  $\pi_1$  (cf. [2]).

Let us note  $F(s, t) := (x_s(t), y_s(t))$ . The graph is parametrized by  $(t, s) \mapsto (F(s, t), \gamma(s))$ , hence the critical values of  $F$  and  $\pi_1$  are the same. Therefore, the envelope is the image by  $F$  of the solutions of the equation  $\det F_*(s, t) = 0$  ( $F_*$  is the Jacobian matrix of  $F$ ). An explicit calculation shows that  $\det F_*(s, t) = t(A(s) + B(s)t + g(s, t)t^2)/(s\rho(s))^2$ , where  $A(s) = 2\alpha_2\rho_0(4\sigma\alpha_2^2 - 3\beta_3\rho_0)s^2 + o(s^2)$ ,  $B(s) = 4\sigma\alpha_2^3\rho_0$ ,  $g$  is a smooth function in  $(s = 0, t = 0)$  and  $\rho_0 := \rho(0)$ .

Since  $\det F_*(s, 0) \equiv 0$ , the envelope contains  $\gamma$ . For each solution  $t(s)$  of  $A(s) + B(s)t + g(s, t)t^2 = 0$ , we get a branch of the envelope,  $s \mapsto F(s, t(s))$ , parametrized by  $s \neq 0$ , that we can extend by continuity to  $s = 0$  when the limit as  $s \rightarrow 0$  of  $t(s)^2/(s\rho(s))$  is finite. If it equals zero, we say that this branch *meets the origin*, because  $O$  is in its closure.

**THEOREM 2.1.** – For  $\rho_0 \neq 0$ , the envelope has two branches meeting the origin:  $\gamma$  and  $\delta : s \mapsto (\xi s^2 + o(s^2), \eta s^3 + o(s^3))$ , where  $\xi = 3(\beta_3\rho_0 - \sigma\alpha_2^2)/|\alpha_2|$  and  $\eta = (9\beta_3\rho_0 - 8\sigma\alpha_2^2)(\beta_3\rho_0 - \sigma\alpha_2^2)/(\sigma\alpha_2^2\rho_0)$ .

For the proof of this theorem (as the following ones), we get by the Newton’s polygon of  $A(s) + B(s)t + g(s, t)t^2 = 0$  the first nonzero term in the expansion of the solution vanishing at  $s = 0$ . For instance, in this case we find  $t(s) = [3\beta_3\rho_0/(2\sigma\alpha_2^2) - 2]s^2 + o(s^2)$ .

*Remark 1.* – (1) Theorem 1.1 follows from Theorem 2.1; the genericity conditions,  $\rho_0 \neq 0$ ,  $9\beta_3\rho_0 \neq 8\sigma\alpha_2^2$  and  $\beta_3\rho_0 \neq \sigma\alpha_2^2$ , do not depend on the cubic terms of the family.

(2) These conditions can be written as  $\rho_0 \neq 0$  and  $\rho_0 \neq \frac{2}{3}r_0, \frac{3}{4}r_0$ . Therefore, the family of parabolae tangent to the astroid considered above is not generic.

(3) The curves  $\gamma$  and  $P_{\gamma(s)}$  have the same curvature radius at the tangency point if  $\rho(s) = R_{\gamma}(s)/|s| = r_0 + o(1)$ . In this case,  $A$  is zero:  $\delta = \gamma$  and the envelope of such a family is  $\gamma$  counted twice.

The *discriminant* is the hypersurface of nongeneric families (i.e. their envelopes are not as in Theorem 1.1). According to Theorem 3.1, the discriminant in  $\mathbb{R}^3 = \{\alpha_2, \beta_3, \rho_0\}$  is the union of the planes  $\alpha_2 = 0, \beta_3 = 0, \rho_0 = 0$  and the surfaces  $S_{2/3} := \{9\beta_3\rho_0 = 8\sigma\alpha_2^2\}$  and  $S_{3/4} = \{\beta_3\rho_0 = \sigma\alpha_2^2\}$ . In the half space  $\alpha_2 \geq 0$  these surfaces coincide with two cones, in the opposite half space, with the same cones, turned  $90^\circ$  around the  $\alpha_2$ -axis.

Theorem 2.1 shows the behavior of the envelope near the origin of generic families. Results are shown in Fig. 1, in which we consider the surface  $S_1 := \{3\beta_3\rho_0 = 4\sigma\alpha_2^2\}$  (that is not a part of the discriminant), because crossing it  $\gamma$  and  $\delta$  invert their positions. We can suppose  $\beta_3 \geq 0$  by the change  $(\alpha_2, \beta_3, \rho_0) \rightarrow (\alpha_2, -\beta_3, -\rho_0)$ , that reverse the orientation of the corresponding envelopes.

### 3. The nongeneric cases

We will now study the envelope of nongeneric families, lying in  $S_{2/3}$  and  $S_{3/4}$ . For that, we start defining some maximally nongeneric families.

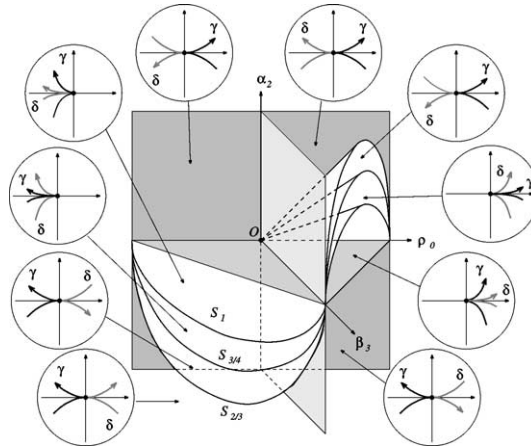


Figure 1. – The discriminant of nongeneric families.

Figure 1. – Le discriminant des familles non génériques.

For given  $\gamma$  and cubic terms as above, consider the solutions  $(\rho^*, t^*)$ ,  $*$  = A, B of the systems  $y_s(t) = \frac{d}{dt}y_s(t) = 0$  (for  $*$  = A) and  $x_s(t) = y_s(t) = 0$  (for  $*$  = B), such that  $t^*(0) = 0$ . Let us note  $\mathcal{F}^*$  the special family corresponding to the given  $\gamma$  and cubic terms defined by (1) for  $\rho = \rho^*$ . By construction, the envelope of  $\mathcal{F}^A$  is, near the origin, the half line  $\{(x, 0) : \sigma x \leq 0\}$ , opposed to the cusp of  $\gamma$ , while the envelope of  $\mathcal{F}^B$  is the origin. As a calculation shows, we have  $\rho_0^A = 8\sigma\alpha_2^2/(9\beta_3)$ ,  $\rho_0^B = \sigma\alpha_2^2/\beta_3$ , and  $t^*(s) = c^*s^2 + o(s^2)$ , with  $c^A = -2/3$  and  $c^B = -1/2$ . Hence, special families  $\mathcal{F}^A$  are in  $S_{2/3}$  and special families  $\mathcal{F}^B$  are in  $S_{3/4}$  (for any choice of the curve  $\gamma$  and the cubic terms).

Let us consider a family in  $S_{2/3}$ , and the special family  $\mathcal{F}^A$ , defined by the same curve and cubic terms. For all such family, except an infinite codimension set, there exists  $\ell \in \mathbb{N}$  such that  $\rho(s) - \rho^A(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$ , with  $\lambda \neq 0$ .

**THEOREM 3.1.** – For such a family, the branch  $\delta$  of its envelope is  $s \mapsto (\xi s^2 + o(s^2), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$ , where  $\xi = -\alpha_2/3$  and  $\eta = -9\lambda\beta_3^2/(8\sigma\alpha_2^2)$ .

We will say that a cusp is symmetric if the tangent line at the cusp point split it off into two parts.

**Remark 2.** – For  $\ell$  even,  $\delta$  has a symmetric  $(\ell + 3)/2$  cusp, for  $\ell$  odd,  $\delta$  has, generically, a nonsymmetric  $(\ell + 4)/2$  cusp (but it may have a more degenerate cusp).

**COROLLARY 3.2.** – The envelope of a typical family lying in  $S_{2/3}$  has a nonsymmetric  $5/2$  cusp at  $O$ .

**COROLLARY 3.3.** – For any family in  $S_{2/3}$ , the corresponding branch  $\delta$  of the envelope has a cusp at the origin (that can be infinitely degenerate, as, for instance, a half line), tangent to the  $x$ -axis and opposed to the cusp of  $\gamma$ .

Let us consider now a family in  $S_{3/4}$ , and the corresponding special family  $\mathcal{F}^B$ . For all such family, except an infinite codimension set, there exists  $\ell \in \mathbb{N}$  such that  $\rho(s) - \rho^B(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$ , with  $\lambda \neq 0$ .

**THEOREM 3.4.** – For such a family, the branch  $\delta$  of its envelope is  $s \mapsto (\xi s^{\ell+2} + o(s^{\ell+2}), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$ , where  $\xi = (\ell + 3)\lambda\beta_3/|\alpha_2|$  and  $\eta = (\ell + 2)\lambda\beta_3^2/(2\sigma\alpha_2^2)$ .

**Remark 3.** – For  $\ell$  even,  $\delta$  has a symmetric  $(\ell + 3)/(\ell + 2)$  cusp; for  $\ell$  odd it has a  $(\ell + 3)/(\ell + 2)$  singularity. In both cases  $\delta$  is tangent at the origin to the  $x$ -axis.

**COROLLARY 3.5.** – The envelope of a typical family lying in  $S_{3/4}$  has a  $4/3$  singularity at the origin.

Let  $t(s)$  be the solution vanishing at  $s = 0$  of the equation  $A + Bt + gt^2 = 0$ , corresponding to the given family in  $S_{2/3}$  or  $S_{3/4}$ , as explained in Section 2. Theorems 3.1 and 3.4 result from the following.

**LEMMA 3.6.** – Suppose that  $\rho(s) - \rho^*(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$ , with  $*$  = A or B,  $\lambda \neq 0$  and  $\ell \in \mathbb{N}$ . Then we have  $t(s) - t^*(s) = \mu^* s^{\ell+2} + o(s^{\ell+2})$ , where  $\mu^* = \lambda(3\sigma\beta_3/\alpha_2^2 - (2 + (\ell + 1)c^*)/\rho_0)$ .

For families lying in  $\{\rho_0 = 0\}$ , it is still possible to find explicit formulae for the branches of their envelopes. For instance, the envelope of a generic family of this stratum, has one branch (except  $\gamma$ ) meeting the origin, that has a semicubic cusp tangent to the straight line of slope  $2\alpha_2/\dot{\rho}(0)$ . For more particular families (such that  $\rho_0 = \dot{\rho}(0) = 0$ ) the number of branches meeting the origin depends on the first nonzero term in the Newton expansion of  $\rho$ . Moreover, all the branches of the envelope (except  $\gamma$ ) of these families are tangent at the origin to the  $y$ -axis.

**4. The dual case**

Given a curve in the plane, let us consider in the dual plane the *dual curve* (the set of tangent lines of the given curve). If the given curve has a semicubic cusp, the dual curve has a corresponding inflection point; if the given curve is smooth and convex, the dual curve is smooth and convex. Since the dual curve of an envelope of curves is the envelope of the dual curves, the preceding theory admits a dual version.

Let  $\check{\gamma}$  be a smooth real plane curve, with an inflection point at the origin,  $s \mapsto \check{\gamma}(s) = (a_1s + o(s), b_3s^3 + o(s^3))$  its parameterization, with  $a_1b_3 \neq 0$ . Its curvature at  $\check{\gamma}(s)$  is  $K_0s + o(s)$ , where  $K_0 = 6\sigma_1b_3/a_1^2$  ( $\sigma_1$  is the sign of  $a_1$ ). Let us consider a smooth 1-parameter family  $\mathcal{G} = \{Q_{\check{\gamma}(s)}\}_s$  of smooth curves, such that each curve  $Q_{\check{\gamma}(s)}$  is tangent to  $\check{\gamma}$  at  $\check{\gamma}(s)$ , its curvature at the tangency point is a smooth function vanishing at  $s = 0$ , hence of the form  $sk(s) = k_0s + o(s)$ . Moreover, we suppose that  $P_O$  coincide, locally at the origin, with the  $x$ -axis.

The dual curve  $P_{\check{\gamma}(s)}$  of  $Q_{\check{\gamma}(s)}$  is, for  $s \neq 0$ , tangent at the dual curve  $\gamma$  of  $\check{\gamma}$ , that can be parametrized as  $\gamma(s) = (-3b_3/a_1s^2 + o(s^2), 2b_3s^3 + o(s^3))$ . The curvature radius of  $P_{\check{\gamma}(s)}$  at the tangency point is  $-\sigma(b_3)k_0s + o(s)$  ( $\sigma(b_3)$  is the sign of  $b_3$ ). Therefore,  $\{P_{\check{\gamma}(s)} : s \neq 0\}$  is a 1-parameter family as those studied in the preceding sections. Hence we get from Theorem 2.1 the following.

**THEOREM 4.1.** – *The envelope of a family  $\mathcal{G}$  such that  $k_0 \neq 0$  has two smooth branches passing by the origin,  $\check{\gamma}$  and  $\check{\delta} : s \mapsto (\xi s + o(s), \eta s^3 + o(s^3))$ , where  $\xi = 3(a_1^2k_0 - 4\sigma_1b_3)/(a_1k_0)$  and  $\eta = (a_1^2k_0 - 4\sigma_1b_3)(2a_1^2k_0 - 9\sigma_1b_3)/(\sigma_1a_1^2)$ .*

**COROLLARY 4.2.** – *The branch  $\check{\delta}$  of  $\mathcal{G}$  has generically an inflection point at the origin, where it is tangent at the  $x$ -axis. The genericity conditions are  $k_0 \neq 0, \frac{2}{3}K_0, \frac{3}{4}K_0$ .*

Let  $\mathcal{G}^A$  and  $\mathcal{G}^B$  be the dual of the special families  $\mathcal{F}^A$  and  $\mathcal{F}^B$ , corresponding to  $P_{\check{\gamma}(s)}$ . The envelopes of  $\mathcal{G}^A$  and  $\mathcal{G}^B$  are, respectively, the origin and the  $x$ -axis; their curvatures  $sk^A$  and  $sk^B$  verify  $k_0^A = 4\sigma_1b_3/a_1^2$  and  $k_0^B = 9\sigma_1b_3/(2a_1^2)$ .

**THEOREM 4.3.** – *Suppose that  $k(s) - k^A(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$ , with  $\lambda \neq 0$  and  $\ell \in \mathbb{N}$ , the branch  $\check{\delta}$  of the envelope of  $\mathcal{G}$  is  $s \mapsto (\xi s^{\ell+1} + o(s^{\ell+1}), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$ , where  $\xi = (\ell + 3)\lambda\sigma_1a_1^3/(4b_3)$  and  $\eta = -(\ell + 1)\lambda\sigma_1a_1^2/4$ .*

**Remark 4.** – The envelope of such a family  $\mathcal{G}$  has at the origin an inflection point for even  $\ell$  or a  $(\ell + 3)/(\ell + 1)$  cusp for odd  $\ell$ . In both cases,  $\check{\delta}$  is tangent to the  $x$ -axis at  $O$ . A typical family  $\mathcal{G}$  among those verifying  $k_0 = 4\sigma_1b_3/a_1^2$  has a non symmetric  $5/2$  cusp at  $O$ .

**THEOREM 4.4.** – *Suppose that  $k(s) - k^B(s) = \lambda s^\ell + o(s^\ell)$ , with  $\lambda \neq 0$  and  $\ell \in \mathbb{N}$ , the branch  $\check{\delta}$  of the envelope is  $s \mapsto (\xi s + o(s), \eta s^{\ell+3} + o(s^{\ell+3}))$ , where  $\xi = a_1/3$  and  $\eta = 2\lambda\sigma_1a_1^2/9$ .*

**Remark 5.** – For such a family  $\mathcal{G}$ , the branch  $\check{\delta}$  is, locally at the origin, the graph of a smooth function on  $x$ , having in  $x = 0$  a degenerate critical point: a maximum or a minimum point for odd  $\ell$ , an inflection point for even  $\ell$ . Moreover, in both cases  $\check{\delta}$  is tangent to the  $x$ -axis at the origin (with order of tangency greater than 2).

<sup>1</sup> Supported by INDAM (Istituto Nazionale Di Alta Matematica).

**Acknowledgements.** I am very grateful to V.I. Arnold for formulation of the problem and helpful discussions.

**References**

[1] V. Arnold, Astroidal geometry of hypocycloids and the Hessian topology of hyperbolic polynomials, Russian Math. Surveys 56 (6) (2001) 1019–1083.  
 [2] R. Thom, Sur la théorie des enveloppes, J. Math. Pures Appl. 41 (9) (1962) 177–192.