C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 177–182

Probabilités/*Probability Theory*

Une caractérisation de champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^d)$

David Dereudre

Centre de mathématiques appliquées, UMR 7641, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 25 mars 2002 ; accepté le 31 mai 2002

Note présentée par Paul Malliavin.

Résumé Nous caractérisons d'abord les champs de Gibbs canoniques de $\mathbb{R}^d$ grâce à une équation de dualité satisfaite sous leur mesure de Campbell. Puis, nous généralisons à l'espace des trajectoires $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^d)$ en y caractérisant les champs de Gibbs au moyen d'une formule d'intégration par parties satisfaite par leur mesure de Campbell. ***Pour citer cet article : D. Dereudre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 177–182.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A characterization of canonical Gibbs fields on $\mathbb{R}^d$ and $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^d)$

Abstract We characterize canonical Gibbs fields on $\mathbb{R}^d$ thanks to a duality equation under their Campbell measure. Then, we generalize to the path space $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}^d)$, for which a characterization of canonical Gibbs fields is given by an integration by parts formula satisfied by their Campbell measures. ***To cite this article: D. Dereudre, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 177–182.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In [6], Rœlly and Zessin characterize the Gibbs measures on $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}$ by a integration by parts formula. Moreover, they give in [7] a characterization of Gibbs fields on $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ with a new integration by parts formula satisfied by the Campbell measure. In this note, we extend this work giving a characterization of canonical Gibbs fields on $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}^d)$, which is the subject of Theorem 3. This characterization uses and completes the Theorem 1, which concerns Gibbs fields on $\mathbb{R}^d$. Theorem 2 deals with a case without interaction.

We use these results in [3] to prove the Gibbsian nature of the law of continuous particle systems with a gradient interaction.

Notations. — If $\mathbb{X}$ is a Polish space, $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ denotes the space of integer-valued measures on $\mathbb{X}$ and we denote by $\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ the set of probability measures on $\mathcal{M}(\mathbb{X})$. Π_μ denotes the Poisson process on $\mathbb{X}$ with intensity measure μ, a locally finite measure on $\mathbb{X}$. For $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$, the definition of the Campbell measure $C_P^!$ is given in Definition 1.

The space $\mathcal{G}_c(H,\mu)$ of canonical Gibbs fields with local Hamiltonian H and reference measure μ is given by Definitions 2 and 3. For more details, one can see [4].

Adresse e-mail : dereudre@cmapx.polytechnique.fr (D. Dereudre).

S1631-073X(02)02452-4/FLA

In what follows, $\mathbb{X}$ will be $\mathbb{R}^d$ or $\mathcal{C}$, the space of continuous paths from [0, 1] into $\mathbb{R}^d$. In the case of $\mathbb{R}^d$, we substitute the notations X, Γ, Π, H by x, γ, π, h. The Lebesgue measure on $\mathbb{R}^d$ is denoted by λ, ρ_m is the Wiener measure with the initial law m on $\mathbb{R}^d$ and we substitute ρ_{δ_x} by ρ_x.

We denote by D the derivation Malliavin operator on $\mathcal{C}$. $\mathcal{E}$ is the space of step-functions. ξ is a localization function from $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ to $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ which is used to define bounded regions of $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ – for example we can take $\xi(\gamma) = \sup_{\Lambda \text{ bounded}} \gamma(\Lambda)/\lambda(\Lambda)$. The spaces $\mathcal{F}$ and $\overline{\mathcal{W}}$, defined at the end of Section 1, are the classes of test functions which appear in the duality equations. We can now present our results.

Using the characterization of Gibbs fields via their Campbell measures (4), and the fact that the Lebesgue measure is the unique shift invariant σ-finite measure on $\mathbb{R}^d$, we can prove the following result:

THEOREM 1. – *Let $h(x,\gamma)$ be a local Hamiltonian on $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ which is differentiable with respect to the first variable x at each (x,γ) satisfying $\xi(\gamma) < +\infty$. Let P a probability measure on $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ which verifies $P(\xi(\gamma) < +\infty) = 1$ and $C^!_P\big((1+\mathrm{e}^{h(x,\gamma)})(1+|\nabla_x h(x,\gamma)|)\mathbb{1}_{[0,K]^2}(|x|,\xi(\gamma))\big) < +\infty$ for all $K > 0$; then $P \in \mathcal{G}_c(h,\lambda)$ if and only if*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad C^!_P(\nabla_x f) = C^!_P(f \nabla_x h). \tag{1}$$

We now turn to the space $\mathcal{C}$. A first step is the analysis of Gibbs fields is the case without interaction. Let us give below a characterization of a Brownian path field, defined in Section 3, Definition 4.

THEOREM 2. – *Let $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$. We suppose that $|X(t)|\mathbb{1}_{[0,K]^2}(X(0),\xi(\Gamma(0))$ is $C^!_P$-integrable for all $K > 0$ and $t \in [0,1]$ and that P_0, the projection on $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ of P at time 0 satisfies $P_0(\xi(\cdot) < +\infty) = 1$; then P is a Brownian path field if and only if*:

$$\forall g \in \mathcal{E},\ \forall F \in \overline{\mathcal{W}} \quad C^!_P\left(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X(s)\right) = C^!_P\big(D_g F(X,\Gamma)\big). \tag{2}$$

Remark. – The duality equation (2) does not give any information about P_0. So, a Brownian path field with general initial law is not necessarily a canonical Gibbs field in $\mathcal{G}_c(0,\rho_\lambda)$ because in this case, P_0 would automatically be in $\mathcal{G}_c(0,\lambda)$. Consequently, the set $\mathcal{G}_c(0,\rho_\lambda)$ is strictly included in the set of Brownian path fields.

We deduce from Theorem 2 the Corollary 1 (*see* Section 3), which gives a new elegant proof of the equivalence between Gibbs field and reversible measure for the Brownian dynamics without interaction. In [3], we present an extension of this result to the case with a gradient interaction.

To characterize canonical Gibbs fields on $\mathcal{C}$ we use a new differential operator $\mathcal{D}$, whose definition is in Section 4. $\mathcal{D}$ differentiates paths not only along their dynamics but also at time 0. It then furnishes more informations on the full variations of paths.

THEOREM 3. – *Let $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ and H a local Hamiltonian on $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ which is $\mathcal{D}$-differentiable in the first variable for P-almost all Γ. We suppose that $P_0(\xi(\cdot) < +\infty) = 1$ and $\forall K > 0$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall g \in \mathcal{E}$, $C^!_P\big((1+\mathrm{e}^{H(X,\Gamma)})(1+|X(t)|+|\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)|)\mathbb{1}_{[0,K]^2}(|X(0)|,\xi(\Gamma(0)))\big) < +\infty$.*

Then $P \in \mathcal{G}_c(H,\Pi_{\rho_\lambda})$ if and only if for all $x \in \mathbb{R}^d$, $g \in \mathcal{E}$ and $F \in \overline{\mathcal{W}}$,

$$C^!_P\left(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X(s)\right) = C^!_P\big(\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma) - F(X,\Gamma)\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)\big). \tag{3}$$

0. Introduction

Dans [6], Rœlly et Zessin caractérisent les mesures de Gibbs sur $C([0,1],\mathbb{R})^{\mathbb{Z}^d}$ comme solutions d'une formule d'intégration par parties provenant du calcul de Malliavin. Par la suite, dans [7], ils donnent une caractérisation des champs de Gibbs sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ au moyen d'une nouvelle formule d'intégration par parties sous la mesure de Campbell. Dans cette note, nous étendons ce travail en donnant une caractérisation des champs de Gibbs canoniques sur $C([0,1],\mathbb{R}^d)$, ce qui fait l'objet de la partie 4. Cette caractérisation utilise et généralise celle que nous présentons en partie 2 des champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$. La partie 3, quant à elle, est une étude d'un cadre sans interaction.

Nous utilisons ces résultats dans [3] pour prouver la nature gibbsienne de la loi d'un système continu de particules soumises à une interaction de type gradient.

1. Notations et cadre du problème

1.1. *Les espaces d'états et leurs probabilités.* – Si $\mathbb{X}$ désigne un espace polonais muni de sa tribu borélienne $\sigma(\mathbb{X})$, $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ un sous-ensemble de $\sigma(\mathbb{X})$ que l'on précisera plus tard selon $\mathbb{X}$, alors $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ est l'ensemble des mesures ponctuelles sur $\mathbb{X}$ – c'est à dire l'ensemble des mesures Γ sur $\mathbb{X}$ telle que $\Gamma(\Lambda)\in\mathbb{N}$ pour tout $\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$ – muni de la tribu $\sigma(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ engendrée par les ensembles $\{\Gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{X}),\Gamma(\Lambda)=n\}$, $n\in\mathbb{N}$, $\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$. On note $\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$, l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$.

Pour tout $\Gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{X})$, $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ et $\Lambda\in\sigma(\mathbb{X})$, on note Γ_Λ la projection sur Λ de Γ et P_Λ la projection sur $\mathcal{M}(\Lambda)$ de P. On note Π_μ le processus de Poisson sur $\mathbb{X}$ d'intensité μ, une mesure σ-finie sur $\mathbb{X}$. Rappelons la notion de mesure de Campbell associée à un processus ponctuel.

DÉFINITION 1. – Soit $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$. La mesure de Campbell réduite associée $C^!_P$ est définie sur $\mathbb{X}\times\mathcal{M}(\mathbb{X})$ par $\int_{\mathbb{X}\times\mathcal{M}(\mathbb{X})}F(X,\Gamma)C^!_P(\mathrm{d}X,\mathrm{d}\Gamma)=\int_{\mathcal{M}(\mathbb{X})}\int_{\mathbb{X}}F(X,\Gamma-\delta_X)\Gamma(\mathrm{d}X)P(\mathrm{d}\Gamma)$.

Par la suite, $\mathbb{X}$ désigne $\mathbb{R}^d$ ou $\mathcal{C}$, l'ensemble des fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme uniforme. On choisit pour $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble usuel des bornés de $\mathbb{R}^d$ et on particularise les notations X, Γ, Π en x, γ, π. Dans le cas de $\mathcal{C}$, on pose $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ l'ensemble des éléments B de $\sigma(\mathcal{C})$ dont la projection au temps 0 est un borné de $\mathbb{R}^d$. Pour $\Gamma\in\mathcal{M}(\mathcal{C})$, on note $\Gamma(0)$ la projection au temps 0 de Γ sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, pour $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$, on note $P_0\in\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ (respectivement $\mathcal{P}^\gamma\in\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$) la probabilité $P\circ\Gamma(0)^{-1}$ (respectivement $P(\ |\Gamma(0)=\gamma)$). λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, ρ_m la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}$ de loi initiale la mesure m sur $\mathbb{R}^d$ et on note ρ_x à la place de ρ_{δ_x}.

1.2. *Les champs de Gibbs canoniques.* – Notre Définition 3 de champ de Gibbs canonique repose sur celle d'un hamiltonien $(H_\Lambda)_{\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{X})}$, provenant d'un hamiltonien local H.

DÉFINITION 2. – Un hamiltonien local H est une fonction de $\mathbb{X}\times\mathcal{M}(\mathbb{X})$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie
(i) Pour tout $X\in\mathbb{X}$, l'application $\Gamma\to H(X,\Gamma)$ est $\sigma(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$-mesurable.
(ii) $\forall X_1,X_2\in\mathbb{X}$, $\forall\Gamma\in\mathcal{M}(\mathbb{X})$, $H(X_1,\Gamma)+H(X_2,\Gamma+\delta_{X_1})=H(X_2,\Gamma)+H(X_1,\Gamma+\delta_{X_2})$.

On construit alors l'hamiltonien H_Λ pour tout Λ de $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ de la façon suivante : si $\Gamma_\Lambda=\sum_{i=1}^n\delta_{X_i}$, $H_\Lambda(\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c})=H(X_1,\Gamma_{\Lambda^c})+H(X_2,\Gamma_{\Lambda^c}+\delta_{X_1})+\cdots+H(X_n,\Gamma_{\Lambda^c}+\delta_{X_1}+\delta_{X_2}+\cdots+\delta_{X_{n-1}})$.

DÉFINITION 3. – $\mathcal{G}_c(H,\mu)$, l'ensemble des champs de Gibbs canoniques d'hamiltonien local H et de mesure de référence Π_μ, est l'ensemble des probabilités $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$ telles que : $\forall\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $P(\mathrm{d}\Gamma_\Lambda|\Gamma_{\Lambda^c},\Gamma(\Lambda)=n)=Z(\Lambda,n,\Gamma_{\Lambda^c})^{-1}\exp(-H_\Lambda(\Gamma_\Lambda,\Gamma_{\Lambda^c}))\Pi_{\mu_\Lambda}(\mathrm{d}\Gamma_\Lambda|\Gamma_\Lambda(\Lambda)=n)$, pour P-p.t. Γ_{Λ^c}, où $Z(\Lambda,n,\Gamma_{\Lambda^c})$ est une constante de normalisation supposée finie.

Pour plus de détails sur la théorie générale des champs de Gibbs, on pourra consulter [4]. La caractérisation des champs de Gibbs via leurs mesures de Campbell proposée en [5] se généralise facilement aux champs de Gibbs canoniques de la façon suivante : soit $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{X}))$; alors $P\in\mathcal{G}_c(H,\mu)$ si et seulement si il existe une mesure Q σ-finie sur $\mathcal{M}(\mathbb{X})$ telle que

$$C^!_P=\exp(-H)\,\mu\otimes Q. \tag{4}$$

1.3. *Les espaces de fonctionnelles.* – On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions en escalier de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$. Soit ξ une fonction localisante de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ qui contrôle le support des mesures de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ (par exemple, $\xi(\gamma)=\sup_{\Lambda\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}\gamma(\Lambda)/\lambda(\Lambda)$), et palie à l'absence de norme sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$.

$\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ nulles pour $|x|$ et $\xi(\gamma)$ au voisinage de l'infini, et dont la dérivée en x existe et est bornée. $\mathcal{W}$ désigne l'ensemble des fonctionnelles de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}$ du type $f(X(0), X(t_1), \dots, X(t_n))$, où f est une fonction de classe C^1 à support compact. Plus généralement, $\overline{\mathcal{W}}$ est l'ensemble des fonctionnelles de $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ dans $\mathbb{R}$ du type $\bar{f}(X(0), X(t_1), \dots, X(t_n), \Gamma)$ où $\bar{f}$ est une fonction bornée, nulle pour $|X(0)|, |X(t_1)|, \dots, |X(t_n)|, \xi(\Gamma(0))$ au voisinage de l'infini, et dont les dérivées par rapport à ses $n+1$ premières variables existent et sont bornées. On note D l'opérateur de dérivation de Malliavin sur $\mathcal{C}$, et D_g la dérivation dans la direction $g \in \mathcal{E}$. Ainsi, pour $F \in \overline{\mathcal{W}}$, on a $D_g F = \sum_{i=1}^n \partial \bar{f} / \partial x_i (X(0), X(t_1), \dots, X(t_n), \Gamma) \cdot \int_0^{t_i} g(s)\,\mathrm{d}s$. $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{W}}$ sont les classes de fonctions test des équations de dualité (5), (7) et (9).

2. Caractérisation des champs de Gibbs canoniques sur $\mathbb{R}^d$

THÉORÈME 1. – *Soit h un hamiltonien local sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ différentiable en sa première variable pour tout (x, γ) tel que $\xi(\gamma) < +\infty$. Soit $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ telle que $P(\xi(\gamma) < +\infty) = 1$ et, pour tout $K > 0$, $C_P^!\big((1 + \mathrm{e}^{h(x,\gamma)})(1 + |\nabla_x h(x, \gamma)|)\mathbb{1}_{[0,K]^2}(|x|, \xi(\gamma))\big) < +\infty$; alors $P \in \mathcal{G}_c(h, \lambda)$ si et seulement si :*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad C_P^!(\nabla_x f) = C_P^!(f \nabla_x h). \tag{5}$$

Démonstration. – Tout d'abord remarquons que les hypothèses sur P et h donnent un sens aux termes de l'équation de dualité (5). Démontrons le sens direct. Soit $P \in \mathcal{G}_c(h, \lambda)$; P satisfait donc l'équation (4) pour une certaine mesure $Q = \widetilde{P}$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$C_P^!\big(\nabla_x f(x, \gamma) - \nabla_x h(x, \gamma) f(x, \gamma)\big) = \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \big(f(x, \gamma)\,\mathrm{e}^{-h(x,\gamma)}\big) \lambda(\mathrm{d}x) \otimes \widetilde{P}(\mathrm{d}\gamma) = 0.$$

Pour la réciproque, on pose $\widetilde{C}_P^!(\mathrm{d}x, \mathrm{d}\gamma) = \mathrm{e}^{h(x,\gamma)} C_P^!(\mathrm{d}x, \mathrm{d}\gamma)$. Grâce aux hypothèses faites sur h, $\widetilde{C}_P^!$ est σ-finie et e^h ainsi que $\mathrm{e}^h \nabla_x h$ sont $\mathbb{1}_{[0,K]^2}(|x|, \xi(\gamma)) \widetilde{C}_P^!(\mathrm{d}x, \mathrm{d}\gamma)$-intégrables. Ainsi, on déduit de (5) l'équation de dualité : $\forall f \in \mathcal{F}$, $\widetilde{C}_P^!(\nabla_x f) = 0$.

La mesure de Lebesgue étant, à un multiple près, l'unique mesure invariante par translation sur $\mathbb{R}^d$, on déduit de l'équation ci-dessus l'existence d'une mesure $\tilde{m}$ sur $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widetilde{C}_P^! = \lambda \otimes \tilde{m}$, et l'on conclut la preuve grâce à la caractérisation (4). □

Remarquons que si ξ est choisi comme ci-dessus, $\xi(\gamma) = \sup_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \gamma(\Lambda)/\lambda(\Lambda)$, les hypothèses faites sur l'hamiltonien h sont vérifiées dès qu'il provient d'une interaction par paires régulière à portée finie.

Dans [1], Theorem 4.3, des champs de Gibbs canoniques associés à une interaction par paires sont caractérisés par une dualité plus complexe que (5), l'opérateur de derivation considéré étant sur les fonctions de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$. Notre approche via la mesure de Campbell permet de n'utiliser que des techniques élémentaires sur $\mathbb{R}^d$, et ce pour des interactions plus générales.

3. Caractérisation d'un champ de trajectoires browniennes

DÉFINITION 4. – $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ est un champ de trajectoires browniennes si pour P_0-presque tout $\gamma = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{x_i}$, la probabilité P^γ est la loi de $\sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{x_i + X_i}$, où $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille infinie de mouvements browniens indépendants d-dimensionnels partant de 0.

Le Théorème 2 qui suit caractérise les champs de trajectoires browniennes et s'appuie sur la caractérisation suivante de la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}$, dont la preuve est dans [6], Théorème 1.2.

LEMME 1. – *Soit μ une mesure sur $\mathcal{C}$ telle que $E_\mu(|X(t)|) < \infty$ pour tout $t \in [0, 1]$ et telle que sa marginale au temps 0 est δ_{x_0}, $x_0 \in \mathbb{R}^d$; alors μ est la mesure de Wiener ρ_{x_0} si et seulement si :*

$$\forall g \in \mathcal{E},\ \forall F \in \mathcal{W} \quad E_\mu\left(F(X) \int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X(s)\right) = E_\mu\big(D_g F(X)\big). \tag{6}$$

Remarque. – L'équation d'équilibre (6) étant linéaire en μ, elle reste valable sous la mesure de Wiener de loi initiale une mesure σ-finie quelconque sur $\mathbb{R}^d$. Par conséquent, la formule (6) ne caractérise en aucun cas la projection au temps 0 de la mesure μ mais seulement la dynamique brownienne.

THÉORÈME 2. – *Soit* $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ *satisfaisant* $P(\xi(\Gamma(0)) < +\infty) = 1$; *on suppose de plus que* $|X(t)|\mathbb{1}_{[0,K]^2}(X(0), \xi(\Gamma(0)))$ *est* $C^!_P$*-intégrable pour tout* $K > 0$ *et* $t \in [0,1]$. *Alors* P *est un champ de trajectoires browniennes si et seulement si* :

$$\forall g \in \mathcal{E},\ \forall F \in \overline{\mathcal{W}} \quad C^!_P\left(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X(s)\right) = C^!_P\big(D_g F(X,\Gamma)\big). \tag{7}$$

Démonstration. – Remarquons tout d'abord que les hypothèses faites sur P et H donnent un sens aux termes de l'équation (7). En écrivant $\Gamma = \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_{X_i}$ et en désintégrant la mesure de Campbell, on a

$$C^!_P\left(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X(s)\right) = \int_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathcal{M}(\mathcal{C})}\sum_{i\in\mathbb{N}} F(X_i, \Gamma - \delta_{X_i})\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X_i(s) P^\gamma(\mathrm{d}\Gamma) P_0(\mathrm{d}\gamma).$$

Le sens direct est alors évident car il suffit d'appliquer pour chaque i la formule (6) du Lemme 1 et de réintégrer. Pour la réciproque, on désintègre le second membre de l'équation (7) et par un argument de séparabilité on montre que pour P_0-presque tout γ, et tout entier i

$$E_{P^\gamma}\left(F(X_i, \Gamma - \delta_{X_i})\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X_i(s)\right) = E_{P^\gamma}\big(D_g F(X_i, \Gamma - \delta_{X_i})\big).$$

Le Théorème 2.11 de [2] prouve alors que P^γ est un produit dénombrable de mouvements browniens indépendants. □

Remarque. – Si P vérifie (7) alors P n'est pas nécessairement dans $\mathcal{G}_c(0, \rho_\lambda)$ car sinon P_0 serait dans $\mathcal{G}_c(0, \lambda)$, or l'équation (7) ne donne aucune information sur P_0. Donc, l'ensemble des champs de trajectoires browniennes contient strictement l'ensemble $\mathcal{G}_c(0, \rho_\lambda)$.

COROLLAIRE 1. – *Soit* $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ *telle que* $\nu(\xi(\gamma) < +\infty) = 1$ *la marginale au temps* 0 *d'un champ de trajectoires browniennes* P *satisfaisant* $C^!_P\big((|X(t)|\mathbb{1}_{[0,K]^2}(|X(0)|, \xi(\Gamma(0)))\big) < +\infty$. *Alors* P *est invariant par retournement du temps si et seulement si* $\nu \in \mathcal{G}_c(0, \lambda)$.

Démonstration. – La condition est clairement suffisante. Pour prouver le sens direct on remarque que P satisfait (7) ; en l'appliquant d'une part à $g \equiv u \in \mathbb{R}^d$, $F(X,\Gamma) = f(X(1), \Gamma(1))$ et d'autre part à $g \equiv -u$, $F(X,\Gamma) = f(X(0), \Gamma(0))$ puis en retournant le temps dans la première équation on obtient que $C^!_P(\nabla_u f(X(0), \Gamma(0))) = 0$. On conclut la preuve grâce au Théorème 1. □

Remarquons que l'on peut généraliser le Théorème 2 à des champs de diffusions avec interaction et retrouver ainsi les mesures réversibles pour ces dynamiques.

4. Caractérisation des champs de Gibbs canoniques sur $\mathcal{C}$

On introduit un nouvel opérateur de dérivation sur l'espace des fonctionnelles de $\mathcal{C}$ afin de palier à l'absence d'informations que donne l'équation (6) sur la condition initiale.

DÉFINITION 5. – Pour tout $g \in \mathrm{L}^2([0,1], \mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'opérateur de dérivation $\mathcal{D}_{x,g}$ est défini sur $F(X) = f(X(0), \dots, X(t_n)) \in \mathcal{W}$ par

$$\mathcal{D}_{x,g} F(X) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(X + \varepsilon x + \varepsilon\int_0^{\cdot} g(t)\,\mathrm{d}t) - F(X)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x_0}\big(X(0), \dots, X(t_n)\big)\cdot x + D_g F.$$

On peut $\mathcal{D}_{x,g}$-différentier des fonctionnelles régulières plus générales en les approximant par des fonctionnelles de $\mathcal{W}$. Les fonctionnelles gâteaux-différentiables en sont un exemple.

Le Lemme 2 est une étape clé de la caractérisation des champs de Gibbs canoniques sur $\mathcal{C}$.

LEMME 2. – *Soit μ une mesure sur $\mathcal{C}$ telle que $E_\mu\big(|X(t)| \,\big|\, |X(0)| \leqslant K\big) < +\infty$ pour tout $K > 0$ et tout $t \in [0,1]$; alors μ est proportionnelle à ρ_λ si et seulement si :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall g \in \mathcal{E} \text{ et } \forall F \in \mathcal{W},\quad E_\mu\left(F(X)\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X(s)\right) = E_\mu\big(\mathcal{D}_{x,g}F(X)\big). \tag{8}$$

Démonstration. – Par linéarité de l'opérateur $\mathcal{D}$, le sens direct est évident en compilant le Lemme 1 et la caractérisation infinitésimale de la mesure de Lebesgue. Pour la réciproque, il suffit de tester l'équation (8) pour (x, g) de la forme $(0, g)$ et $(x, 0)$ et d'appliquer de nouveau le Lemme 1. □

THÉORÈME 3. – *Soit $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(\mathcal{C}))$ et H un hamiltonien local sur $\mathcal{C} \times \mathcal{M}(\mathcal{C})$ $\mathcal{D}$-différentiable en sa première variable pour P-presque tout Γ. On suppose que $\forall K > 0$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall g \in \mathcal{E}$,*

$$P\big(\xi(\Gamma(0)) < +\infty\big) = 1 \quad \text{et}$$
$$C_P^!\Big(\big(1 + \mathrm{e}^{H(X,\Gamma)}\big)\big(1 + |X(t)| + |\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)|\big)\mathbb{1}_{[0,K]^2}\big(|X(0)|, \xi\big(\Gamma(0)\big)\big)\Big) < +\infty.$$

Alors $P \in \mathcal{G}_c(H, \Pi_{\rho_\lambda})$ si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall g \in \mathcal{E}$, $\forall F \in \overline{\mathcal{W}}$

$$C_P^!\left(F(X,\Gamma)\int_0^1 g(s)\,\mathrm{d}X(s)\right) = C_P^!\big(\mathcal{D}_{x,g}F(X,\Gamma) - F(X,\Gamma)\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)\big). \tag{9}$$

Démonstration. – C'est une synthèse de la preuve du Théorème 1 et du Lemme 2. La mesure $\widetilde{C}_P^! := \mathrm{e}^H C_P^!$ satisfait l'équation (9) dans laquelle le dernier terme a disparu car les hypothèses faites sur H prouve que $\widetilde{C}_P^!$ est σ-finie et que $\mathrm{e}^{H(X,\Gamma)}|X(t)|$ et $\mathrm{e}^{H(X,\Gamma)}|\mathcal{D}_{x,g}H(X,\Gamma)|$ sont $\mathbb{1}_{[0,K]^2}(|X(0)|, \xi(\Gamma(0)))C_P^!$-intégrables; il suffit donc d'appliquer l'équation (9) aux fonctionnelles du type $\mathrm{e}^{H(X,\Gamma)}F(X,\Gamma)$. Du Lemme 2, on déduit que $\widetilde{C}_P^!(\cdot|\Gamma) = cte(\Gamma)\rho_\lambda$. L'équation (4) permet alors d'identifier P. □

Remerciements. L'auteur remercie chaleureusement Sylvie Rœlly pour ses précieux conseils au cours de l'élaboration de cette Note. Il remercie égalment le Laboratoire de Statistique et Probabilités de l'Université des Sciences et Technologies de Lille pour son accueil et pour les infrastructures mises à sa disposition.

Références bibliographiques

[1] S. Albeverio, Yu.G. Kondratiev, M. Röckner, Analysis and geometry on configuration spaces: The Gibbsian case, J. Funct. Anal. 157 (1998) 242–291.
[2] P. Cattiaux, S. Rœlly, H. Zessin, Une approche gibbsienne des diffusions browniennes infini-dimensionnelles, Probab. Theory Related Fields 104 (2) (1996) 223–248.
[3] D. Dereudre, Système de particules browniennes en interaction en tant que champ de Gibbs sur l'espace des trajectories, Preprint CMAP 2000.
[4] H.-O. Georgii, Canonical Gibbs Measures, Lecture Notes in Math., Vol. 760, Springer-Verlag, 1979.
[5] X.X. Nguyen, H. Zessin, Integral and differential characterizations of Gibbs process, Math. Nachr. 88 (1979) 105–115.
[6] S. Rœlly, H. Zessin, Une caractérisation des mesures de Gibbs sur $\mathrm{C}(0,1)^{\mathbb{Z}^d}$ par le calcul des variations stochastiques, Ann. Inst. H. Poincaré 29 (3) (1993) 327–338.
[7] S. Rœlly, H. Zessin, Une caractérisation de champs gibbsiens sur un espace de trajectoires, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 321 (1995) 1377–1382.