C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 237–242

Géométrie analytique/*Analytical Geometry*

Espace des modules des variétés hyperboliquement plongées

Adel Khalfallah

Faculté des sciences de Monastir, Département de mathématiques, 5019 Monastir, Tunisie

Reçu le 16 avril 2002 ; accepté après révision le 3 mai 2002

Note présentée par Jean-Pierre Demailly.

Résumé Dans cette Note, on construit l'espace des modules des variétés hyperboliquement plongées. On rappelle que l'espace des modules des variétés compactes hyperboliques a été construit par Brody et Wright. Pour construire notre espace modulaire, on utilise un critère de représentabilité des foncteurs analytiques par un espace des modules grossier dû à Schumacher. Les objets des déformations sont des couples (X, D) où X est une variété compacte et D est un diviseur à croisements normaux tels que $X \setminus D$ soit hyperboliquement plongé dans X. Ce critère est basé sur deux ingrédients. Dans notre cas le premier est l'existence d'une déformation logarithmique semi-universelle qui est dû à Kawamata. Le deuxième point du critère est une conséquence du théorème de stabilité des espaces hyperboliquement plongés à travers les déformations logarithmiques. On utilise la distance relative de Kobayashi pour simplifier la preuve. ***Pour citer cet article : A. Khalfallah, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 237–242.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The moduli space of hyperbolically imbedded manifolds

Abstract In this Note, we construct the moduli space of hyperbolically imbedded manifolds. We recall that the moduli space of compact hyperbolic manifolds has been constructed by Brody and Wright. To construct our moduli space, we use a general criterion to represent analytic functors by coarse moduli spaces due to Schumacher. The objects to deform are couples (X, D) where X is a compact manifold and D is a normal crossing divisor in X such that $X \setminus D$ is hyperbolically imbedded in X. This criterion is based on two ingredients: in our case, the first is the existence of semi-universal logarithmic deformation due to Kawamata. The second is a consequence of a theorem of stability of hyperbolically imbedded spaces through logarithmic deformations. We use the relative-distance of Kobayashi to simplify the proof. ***To cite this article: A. Khalfallah, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 237–242.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The aim of this Note is to construct the moduli space of hyperbolically imbedded manifolds. This moduli space can be considered as a 'noncompact' version of the moduli space of compact hyperbolic manifolds constructed early by Brody [1] and Wright [10]. We consider the following analytic functor F : $(An) \to (Ens)$; $F(S) =$ isomorphic classes of logarithmic deformations $(\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D})$ such that $X_s = \overline{X_s} \setminus D_s$ is hyperbolically imbedded in $\overline{X}_s$ for each $s \in S$.

Adresse e-mail : Adel.khalfallah@ujf-grenoble.fr (A. Khalfallah).

S1631-073X(02)02446-9/FLA

THEOREM 0.1. – *There exists a coarse moduli space of hyperbolically imbedded manifolds which represents the functor F.*

To construct our moduli space, we use a general criterion to represent analytic functors by coarse moduli spaces due to Schumacher [7]. This criterion is based on two points: the first is the existence of semi-universal deformations, in our case the existence of semi-universal logarithmic deformations is due to Kawamata [3]. The second is the following proposition:

PROPOSITION 0.1. – *Let $(\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D})$ and $(\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B})$ be two logarithmic deformations in $F(S)$. Then, the natural map: $k : \mathrm{Isom}_S((\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B})) \to S$ is proper.*

The proof is based on the theorem of stability of hyperbolic imbedded spaces through logarithmic deformations and we use the relative pseudo-distance of Kobayashi, which is the most adapted pseudo-distance in this situation.

L'espace des modules des applications holomorphes d'une variété compacte X dans un espace Y hyperboliquement plongé dans Z, i.e. $\mathrm{Hol}(X, Y)$, a été étudié précédemment par Noguchi [6], il a montré que cet espace est un ouvert de Zariski dans un sous espace compact de $\mathrm{Hol}(X, Z)$ et que l'application évaluation est holomorphe. Ceci peut-être vu comme une version « non compacte » du théorème de structure de Douady. Suzuki [8] a généralisé les résultats de Noguchi, il remplace l'espace de départ par $X \setminus A$ où X est une variété compacte et A est un diviseur à croisement normaux.

On construit l'espace des modules des variétés hyperboliquement plongées, cet espace est une version « non compacte » de l'espace des modules des variétés compactes hyperboliques établi par Brody [1] et Wright [10].

Les objets des déformations sont les triplets $(X, \overline{X}, D)$ où $\overline{X}$ est une variété compacte et D est un diviseur à croisement normaux simples tels que $X = \overline{X} \setminus D$ soit hyperboliquement plongé dans $\overline{X}$.

Dans ce cadre, la distance relative de Kobayashi [4] joue un rôle essentiel ainsi que la variante du théorème de Brody [1], appliquée aux espaces hyperboliquement plongés, dûe à Green [2], Urata [9] et Zaidenberg [11].

La stratégie utilise un critère de représentabilité des foncteurs analytiques par un espace des modules grossier dû à Schumacher [7]. Ce critère utilise la théorie générale de la déformation et il est basé sur deux ingrédients. Dans notre cas, le premier est l'existence d'une déformation semi-universelle logarithmique, qui est dûe à Kawamata [3], où le faisceau $T_X(\log D)$, qui est le faisceau des automorphismes infinitésimaux envoyant D sur lui même, joue le même rle que le faisceau T_X dans la théorie des déformations des variétés. Le deuxième point du critère est une conséquence du théorème de stabilité des espaces hyperboliquement plongés à travers les déformations logarithmiques.

1. Espaces hyperboliquement plongés

Dans cette section, on rappelle la définition d'un espace hyperboliquement plongé ainsi que les propriétés de la métrique relative de Kobayashi et les résultats de Urata, Green et Zaidenberg pour caractériser ces espaces.

Soient Z un espace complexe et Y un sous espace de Z d'adhérence compacte.

DÉFINITION 1.1. – On dit que Y est *hyperboliquement plongé dans* Z, si pour tous points p et q distincts dans $\overline{Y}$, il existe U_p et U_q voisinages respectivement de p et q tels que : $d_Y(U_p \cap Y, U_q \cap Y) > 0$ où d_Y dénote la pseudo-distance de Kobayashi de Y. Cette notion a été introduite par Kobayashi pour généraliser le grand théorème de Picard.

Dans [4], Kobayashi a construit une pseudo-distance relative $d_{Y,Z}$ et une pseudo-métrique $K_{Y,Z}$. Il a prouvé que $d_{Y,Z}$ est une distance si et seulement si Y est hyperboliquement plongé dans Z.

Il a définit aussi une nouvelle pseudo-distance d_Y^* qui sera utile par la suite pour construire notre espace des modules. Pour définir cette pseudo-distance, Kobayashi utilise $\mathrm{Hol}(\Delta^*, Y)$ comme chaîne munie de la distance de Poincaré du disque unité d_Δ.

On résume les propriétés qui nous intéressent dans le lemme suivant :

LEMME 1.2 ([4]). –
(1) *Si Y est un sous espace complexe de Z qui vérifie la propriété suivante* : *toute application $f \in \mathrm{Hol}(\Delta^*, Y)$ se prolonge en $\tilde{f} \in \mathrm{Hol}(\Delta, Z)$, alors $d_Z \leqslant d_{Y,Z} \leqslant d_Y$.*
C'est le cas par exemple si Y est hyperboliquement plongé dans Z.
(2) $d^*_{\Delta^{*k} \times \Delta^{m-k}} \leqslant m.d_{\Delta^m}$.

L'analogue du théorème de Brody pour les espaces hyperboliquement plongés a été prouvé par Urata [9], Green [2] et Zaidenberg [11].

THÉORÈME 1.3. – *Soient Z un espace complexe et Y un ouvert relativement compact dans Z. Alors Y est hyperboliquement plongé dans Z si et seulement s'il n'existe pas de droite complexe qui provienne de Y.*

On dit que $f : \mathbb{C} \to Z$ est une droite qui provient de Y si pour tout $r > 0$, il existe $f_n : \Delta_r \to Y$ une suite d'applications holomorphes telle que f_n converge uniformément vers $f|\Delta_r$.

La preuve est une modification légère de celle de Brody. Maintenant on s'intéresse au cas $Y = Z \setminus A$ où A est un diviseur de Cartier dans Z. Ceci a été étudié par Green et Zaidenberg :

THÉORÈME 1.4. – *Soient Z un espace complexe et Y un ouvert de Zariski tels que $A = Z \setminus Y$ soit un diviseur de Cartier. Si*
(1) *il n'existe pas de droite complexe dans Y,*
(2) *il n'existe pas de droite complexe dans A,*
alors Y est hyperboliquement plongé dans Z.

Zaidenberg [11] a prouvé l'inverse dans le cas d'une variété et d'un diviseur à croisements normaux.

THÉORÈME 1.5. – *Soient Z une variété complexe et $A = \bigcup_i A_i$ un diviseur à croisements normaux simples, A_i est une hypersurface lisse. Si Y est hyperboliquement plongé dans Z alors* :
(1) *il n'existe pas de droite complexe dans Y,*
(2) *il n'existe pas de droite complexe dans A.*

2. Critère de représentabilité des foncteurs analytiques

On donne un critère dû à Schumacher [7] pour qu'un foncteur analytique possède un espace des modules grossier. Ce critère donne même une description locale de cet espace des modules comme quotient par une opération de groupe. La preuve repose essentiellement sur la théorie de la déformation :

THÉORÈME 2.1. – *Soient $F : (An) \to (Ens)$ un foncteur analytique et $p : F \to (An)$ la catégorie fibrée associée à F. Alors F possède un espace des modules grossier si les deux conditions suivantes sont vérifiées* :
(1) *Chaque objet a tel que $p(a) = *$ possède une déformation semi-universelle* ;
(2) *Pour b et c deux objets dans F tels que $p(b) = p(c) = S$, le foncteur* $\mathrm{Isom}(b, c) : (An/S) \to (Ens)$ *est représentable par un morphisme $k : I \to S$ propre.*
I_s s'identifie comme espace topologique à $\mathrm{Isom}(b_s, c_s)$ *pour tout $s \in S$.*

Soit $a_0 \in F$ tel que $p(a_0) = *$. L'espace des modules est donné localement au voisinage de la classe de $[a_0]$ par : $\mathfrak{M} = \bigcup p(a)/\sim$ où a est un objet semi-universel. i.e. $\mathfrak{M}$ est une réunion disjointe des bases des déformations semi-universelles de a_0 et en identifiant les points à fibres isomorphes : $s_1 \sim s_2$ si $a_{s_1} \simeq a_{s_2}$.

3. Déformations logarithmiques

Dans ce paragraphe, on décrit les déformations d'un triplet $(X, \overline{X}, D)$ où $\overline{X}$ est une variété compacte et D est un diviseur à croisements normaux simples et $X = \overline{X} \setminus D$. On rappelle que la théorie des déformations des variétés compactes a été développée par Kodaira–Spencer, l'existence d'une déformation semi-universelle a été prouvée par Kuranishi.

DÉFINITION 3.1 ([3]). –

(1) Soit X une variété complexe, une *compactification non singulière de* X est une variété complexe compacte $\overline{X}$ telle que $D = \overline{X} \setminus X$ est un diviseur à croisements normaux simples.

(2) Soit le triplet $(X, \overline{X}, D)$ une compactification de X. On appelle *famille de déformations logarithmiques de* $(X, \overline{X}, D)$ un 7-uplet $\mathfrak{F} = (\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}, \bar{\pi}, S, s_0, \overline{\Psi})$ vérifiant :

  (a) $\bar{\pi} : \overline{\mathfrak{X}} \to S$ est une submersion lisse et propre,

  (b) $\mathfrak{D}$ est un diviseur de Cartier dans $\overline{\mathfrak{X}}$ et $\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{X}} \setminus \mathfrak{D}$,

  (c) $\overline{\Psi} : \overline{X} \to \bar{\pi}^{-1}(s_0)$ est un isomorphisme et $\Psi(X) = \bar{\pi}^{-1}(s_0) \cap \mathfrak{X}$,

  (d) $\bar{\pi}$ est localement une projection ainsi que sa restriction sur $\mathfrak{D}$ i.e. pour tout $p \in \overline{\mathfrak{X}}$, il existe U un voisinage de p et ϕ un V-isomophisme : $\phi : U \to V \times W$ où $V = \bar{\pi}(U)$ et $W = U \cap \bar{\pi}^{-1}(\bar{\pi}(p))$ et on a $\phi(U \cap \mathfrak{D}) = V \times (W \cap \mathfrak{D})$.

(3) Soient X une variété complexe et D un diviseur de Cartier, le *faisceau tangent logarithmique* $T_X(\log D)$ est le sous faisceau de T_X qui consiste en les dérivations de X envoyant $\mathfrak{J}_D$ sur lui même, où $\mathfrak{J}_D$ est le faisceau d'idéaux qui définit D.

Comme dans le cas classique, on montre qu'on a $\mathrm{Def}_{\mathbb{C}[\varepsilon]}(X, D) = H^1(X, T_X(\log D))$, on définit ainsi l'application de Kodaira–Spencer : $\rho_{s_0} : T_{S_{s_0}} \to H^1(X, T_X(\log D))$.

On a même une description locale du faisceau $T_X(\log D)$. On note par $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées locales de X autour de x telles que D soit donné (localement) par $D = \{z_1 \ldots z_k = 0\}$.

(1) Si $x \notin D$ alors $T_X(\log D)_x = T_{X_x}$,

(2) Si $x \in D$ alors $T_X(\log D)_x$ est engendré comme $\mathcal{O}_{X_x}$-module par $\{z_1 \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, z_k \frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$.

Maintenant on étudie la semi-continuité d'une famille de métriques de Kobayashi–Royden à travers ces déformations logarithmiques. Tout d'abord, on rappelle la définition de la métrique relative de Kobayashi : soient Y un ouvert de Zariski dans Z et $(x, \xi) \in TZ$; $K_{Y,Z}(x, \xi) = \inf\{\frac{1}{r} : f \in \mathcal{F}^r_{Y,Z}$ telle que $f_*(0) = (x, \xi)\}$ où $\mathcal{F}^r_{Y,Z} = \{f \in \mathrm{Hol}(\Delta_r, Z)$ telle que $f^{-1}(Z \setminus Y)$ est au plus un singleton$\}$.

Soient $(X, \overline{X}, D)$ une compactification non singulière de X et $\mathfrak{F} = (\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}, \bar{\pi}, S, s_0, \overline{\Psi})$ une déformation logarithmique de $(X, \overline{X}, D)$. On remarque en particulier que D_s est à croisements normaux dans $\overline{X}_s$ pour tout $s \in S$.

PROPOSITION 3.2. – $K_{X_s, \overline{X}_s}$ *est semi-continue supérieurement au sens suivant* :
Pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $(x_0, \xi_0) \in T\overline{X}_{s_0}$*, il existe un voisinage* U *de* (x_0, ξ_0) *dans* $T\overline{\mathfrak{X}}$ *tel que*

$$K_{X_s, \overline{X}_s}(x_s, \xi_s) \leqslant K_{X, \overline{X}}(x_0, \xi_0) + \varepsilon \quad \textit{pour tout } (x_s, \xi_s) \in T\overline{X}_s \cap U,$$

autrement dit : $\limsup K_{X_s, \overline{X}_s}(x, \xi) \leqslant K_{X, \overline{X}}(x_0, \xi_0)$.

Démonstration. – Ce fait repose comme dans le cas absolu sur un théorème d'extension. Dans le cas d'une famille de variétés compactes on a le Lemme 3.3 qui est la version relative du théorème d'extension de Royden.

On remarque que si $f \in \mathcal{F}^r_{X, \overline{X}}$ est une immersion, on applique le Lemme 3.3 et on constate que f se déforme en $f_s \in \mathcal{F}^r_{X_s, \overline{X}_s}$, où $\overline{X}_s$ désigne la fibre de $\overline{\mathfrak{X}}$ au dessus de s. $\square$

LEMME 3.3. – *Soit* $f : \Delta_R \to \overline{X}_{s_0}$ *une application holomorphe telle que* $f'(0) \neq 0$. *Alors pour tout* $0 < r < R$*, il existe* $0 < s < r$*,* U *un voisinage de* s_0 *et une application* ϕ *holomorphe* :

$$\phi : \Delta_r \times \Delta_s^{n-1} \times U \longrightarrow \overline{\mathfrak{X}},$$

tels que $\bar{\pi} \circ \phi = p_2$ *où* p_2 *désigne la deuxième projection sur* S, $\phi|_{\Delta_r \times 0 \times s_0} = f|\Delta_r$ *et* ϕ *est biholomorphe au voisinage de* $(0, s_0)$.

4. Espace des modules des variétés hyperboliquement plongées

On commence par rappeler le théorème de stabilité à travers les déformations logarithmiques. Ce théorème est dû à Kobayashi, voir [5], p. 149.

LEMME 4.1 (Théorème de Stabilité [5]). – *Soient* $(X, \overline{X}, D)$ *une compactification non singulière de* X *telle que* $X \setminus D$ *soit hyperboliquement plongé dans* X *et* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}, \bar{\pi}, S, s_0, \overline{\Psi})$ *une déformation logarithmique de* $(X, \overline{X}, D)$.

Alors il existe un voisinage U *de* s_0 *tel que* $\mathfrak{X}_U$ *est hyperboliquement plongé dans* $\overline{\mathfrak{X}_U}$.

En particulier, pour tout $s \in U$ *on a* X_s *est hyperboliquement plongé dans* $\overline{X}_s$.

La preuve est semblable à celle connue pour une famille d'espaces compacts hyperboliques. Elle est basée sur la caractérisation d'un espace hyperboliquement plongé donnée par Zaidenberg, voir Théorème 1.5.

Après ces résultats intermédiaires, on montre qu'il existe un espace des modules des variétés hyperboliquement plongées.

Le résultat principal de ce papier est le théorème suivant :

THÉORÈME 4.2. – *Il existe un espace des modules des variétés hyperboliquement plongées pour la famille des déformations logarithmiques.*

Cet espace des modules représente (par un espace des modules grossier) le foncteur F suivant :

$F : (An) \to (Ens)$, $F(S) =$ l'ensemble des classes d'isomorphie des déformations logarithmiques $(\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D})$ telles que $X_s = \overline{X}_s \setminus D_s$ soit hyperboliquement plongé dans $\overline{X}_s$ pour tout $s \in S$.

On applique le critère de Schumacher à notre situation : le premier point qui consiste en l'existence d'une déformation semi-universelle logarithmique a été prouvé par Kawamata [3].

Il reste à prouver que si on considère deux déformations logarithmiques et qu'on les note $(\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}, S)$ et $(\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B}, S)$, les fibres $\overline{X}_s$ de $\overline{\mathfrak{X}}$ au dessus de s sont des variétés complexes compactes de dimension m telles que $\overline{X}_s \setminus D_s$ soit hyperboliquement plongé dans $\overline{X}_s$ pour tout $s \in S$.

PROPOSITION 4.3. – *L'application naturelle* : $k : \mathrm{Isom}_S((\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B})) \to S$ *est propre.*

Démonstration. – Soit $\tilde{f}_n \in \mathrm{Isom}_S((\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B}))$ une suite d'isomorphismes entre $(\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D})$ et $(\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B})$ i.e. $\tilde{f}_n : \overline{X}_{s_n} \to \overline{Y}_{s_n}$ est un isomorphisme tel que $\tilde{f}_n(X_{s_n}) = Y_{s_n}$ (ou $\tilde{f}_n(D_{s_n}) = B_{s_n}$) et s_n une suite dans S qui converge vers s_0.

En appliquant le théorème de stabilité, on peut supposer que $\mathfrak{Y}$ est hyperboliquement plongé dans $\overline{\mathfrak{Y}}$ et de même pour $\mathfrak{X}$.

La déformation logarithmique est localement triviale sur $\overline{\mathfrak{X}}$ et sur $\mathfrak{D}$, donc pour tout $x \in \overline{X}_{s_0}$, il existe U un voisinage de x dans $\overline{\mathfrak{X}}$ tel que U est isomorphe au produit $\Delta^m \times S$ et $U \cap \mathfrak{X} = \Delta^{*^k} \times \Delta^{m-k} \times S$.

On note $f_n = \tilde{f}_n|\mathfrak{X}$. Si on restreint f_n à $U \cap \mathfrak{X}$, on aura $f_n|U \cap \mathfrak{X} : \Delta^{*^k} \times \Delta^{m-k} \to Y_{s_n} \hookrightarrow \mathfrak{Y}$. D'après le Lemme 1.2, on aura :

$$d_{\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}}\big(f_n(x), f_n(y)\big) \leqslant d_{Y_n, \overline{Y}_n}\big(f_n(x), f_n(y)\big) \leqslant d^*_{Y_n}\big(f_n(x), f_n(y)\big) \leqslant d^*_{\Delta^{*k} \times \Delta^{m-k}}(x, y) \leqslant m d_{\Delta^m}(x, y)$$

pour tout $x, y \in \Delta^{*^k} \times \Delta^{m-k}$.

À partir de cette inégalité, on déduit que la famille $\mathrm{Hol}(\Delta^{*^k} \times \Delta^{m-k}, \mathfrak{Y})$ est relativement compacte dans $\mathrm{Hol}(\Delta^m, \overline{\mathfrak{Y}})$ puisqu'elle constitue une famille équicontinue, en conséquence par passage à une sous suite on constate que f_n converge uniformément sur tout compact vers f et que f se prolonge en $\tilde{f}$ sur Δ^m et $\tilde{f}_n$ converge uniformément sur tout compact vers $\tilde{f}$. Puisque $\mathfrak{B}$ est diviseur de Cartier, on aura par le théorème de Hurwitz que $f(X) \subset Y$ ou $f(X) \subset B$.

On applique le même raisonnement à f_n^{-1}, on déduit qu'il existe g et $\tilde{g}$ tels que $g = \tilde{g}|Y$ avec $g(Y) \subset X$ ou $g(Y) \subset D$.

On aura $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}$ et $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \mathrm{id}$, donc $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont des isomorphismes tels que $f(X) = Y$ et $g(Y) = X$ i.e. $\tilde{f} \in \mathrm{Isom}_S((\mathfrak{X}, \overline{\mathfrak{X}}, \mathfrak{D}), (\mathfrak{Y}, \overline{\mathfrak{Y}}, \mathfrak{B}))$. $\square$

Remarque 1. – Si on considère des déformations plus générales que les déformations logarithmiques du triplet $(X, D, \overline{X})$, données par $\mathfrak{D} \hookrightarrow \overline{\mathfrak{X}}$ sur S où $\mathfrak{D}$ est plat sur S (non nécessairement localement triviale). On sait qu'il existe une déformation semi-universelle dans cette famille.

Pour le deuxième point, d'après ce qui précède on sait qu'il existe une application holomorphe $f_0 : \overline{X}_0 \setminus D_{\mathrm{sing}} \to \overline{Y}_0$ mais on ne peut pas prolonger une telle application holomorphiquement sur $\overline{X}_0$ en général.

Pour finir, on signale que notre espace des modules généralise l'espace des modules des courbes de genre g avec n points distingués qu'on note $\mathcal{M}_{g,n}$ dans le cas où $2g - 3 + n \geqslant 0$.

Soit $\overline{X}$ une surface de Riemann compacte de genre g et $D = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n points dans $\overline{X}$. On note $X = \overline{X} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $H^i = \dim H^i(X, T_X(\log D))$. On a X est hyperboliquement plongé dans $\overline{X}$ si et seulement si X est hyperbolique si et seulement si $2g - 3 + n \geqslant 0$. Puisque dans ce cas X a pour revêtement le disque unité Δ.

On traite deux exemples simples :

(1) $g = 0$ et $n = 3$, on a $\overline{X} \simeq \mathbb{P}^1$. Puisque $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est 3-transitive $\mathcal{M}_{0,3}$ est réduit à un point, la classe d'isomorphie de $(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, \mathbb{P}^1)$, et $H^0 = H^1 = H^2 = 0$.

(2) $g = 1$ et $n = 1$, on a $\mathcal{M}_{1,1} \simeq \mathcal{M}_1 \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}$, $H^0 = H^2 = 0$ et $H^1 = 1$.

Pour le calcul de H^i, voir Kawamata [3], p. 256.

Remerciements. Je remercie le Prof. Siegmund Kosarew qui m'a initié à la géométrie hyperbolique complexe et m'a aidé à préparer ce papier.

Références bibliographiques

[1] R. Brody, Compact manifolds and hyperbolicity, Bull. Amer. Math. Soc. 235 (1978) 213–219.

[2] M.L. Green, Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties, Amer. J. Math. 97 (1975) 43–75.

[3] Y. Kawamata, On deformations of compactifiable complex manifolds, Math. Ann. 235 (1978) 247–265.

[4] S. Kobayashi, On the intrinsic relative distance, in: Geometric Complex Analysis, Proc. 3rd Internat. Research Inst. Math. Soc. Japan, 1995, pp. 355–361.

[5] S. Kobayashi, Complex Hyperbolic Spaces, Springer-Verlag, New York, 1998.

[6] J. Noguchi, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and locally symmetric spaces, Invent. Math. 93 (1988) 15–34.

[7] G. Schumacher, On moduli spaces of Kähler manifolds, the generalized Petersson–Weil metric and positive line Bundle, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 36 (1991) 291–308.

[8] M. Suzuki, Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and hyperbolic fiber spaces, J. Math. Soc. Japan 46 (1994) 681–698.

[9] T. Urata, The hyperbolicity of complex analytic spaces, Bull. Aichi Univ. Ed. (Natural Sci.) 31 (1982) 65–75.

[10] M. Wright, The Kobayashi pseudo-metric on algebraic manifolds of general type and in deformations of complex manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 232 (1977) 357–370.

[11] M.G. Zaidenberg, Criteria for hyperbolic embedding of complements of hypersurfaces, Russian Math. Surveys 41 (1986) 249–250.