C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 127–132

Théorie des groupes/*Group Theory*
(Théorie des nombres/*Number Theory*)

Homologie rationnelle du groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ et automorphismes des réseaux unimodulaires

Gaël Collinet [a,b]

[a] CMAT, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

[b] LAGA, Institut Galilée, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93 430 Villetaneuse, France

Reçu le 4 mars 2002 ; accepté après révision le 29 avril 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé Nous donnons une estimation de la dimension de l'homologie rationnelle du groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$, en degré égal à la dimension cohomologique virtuelle, pour n grand. Ce calcul fournit une indication quantitative sur la « non-véracité » d'une conjecture de Quillen concernant la cohomologie modulo 2 de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$. ***Pour citer cet article : G. Collinet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 127–132.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Rational homology of the group $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ and automorphisms of unimodular lattices

Abstract We give an estimate of the dimension of the rational homology of the group $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$, in degree equal to the virtual cohomological dimension, for n large. This provides a quantitative indication on the failure of a conjecture of Quillen about the modulo 2 cohomology of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$. ***To cite this article: G. Collinet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 127–132.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ be the subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ consisting of the matrices M satisfying the identity ${}^tM M = \mathrm{Id}_n$.

We know from a theorem of Garland and Casselman that the rational homology of $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ is concentrated in degrees 0 and $\mathrm{r}(n)$, where the notation $\mathrm{r}(n)$ stands for the virtual cohomological degree of $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$. In this note, we sketch a proof of the following result:

THEOREM 0.1. – *We have the following equivalence*

$$\log \dim \mathrm{H}_{\mathrm{r}(n)}\left(\mathrm{O}_n\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right); \mathbf{Q}\right) \sim \frac{n^2}{4} \log n$$

as n tends to infinity and 8 *does not divide* n.

First we describe a contractible simplicial complex $\mathcal{B}$, acted on by $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$, which can be thought of as a building for $\mathrm{O}_n(\mathbf{Q}_2)$.

Adresse e-mail : collinet@math.polytechnique.fr (G. Collinet).

S1631-073X(02)02440-8/FLA

This complex comes with an $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$-equivariant filtration. In the second step we prove that the kth floor of this filtration is $k-1$-connected. This generalises Kneser's famous Neighbourhood Lemma.

From these two first steps, we obtain a projective $\mathbf{Q}[\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])]$-resolution $B_\bullet$ of $\mathbf{Q}$, of length $\mathrm{r}(n)$. Then the rational homology of $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ is by definition the homology of the complex $C_\bullet$ of coinvariants in $B_\bullet$ (i.e. $C_k = \mathrm{H}_0(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]); B_k)$).

Let $\mathcal{S}$ be the set of isomorphism classes of integral definite positive quadratic forms of determinant 1. Using the Strong Approximation Theorem we obtain an isomorphism

$$C_{\mathrm{r}(n)} \simeq \bigoplus_{L\in\mathcal{S}} \mathrm{H}_0\big(\mathrm{Aut}(L); \mathrm{St}\big),$$

where the notation St stands for the 'Steinberg' representation (*see* 2.2). Let us call $\mathcal{S}_0$ the set of elements in $\mathcal{S}$ whose automorphism group is $\{\pm 1\}$, and K be the submodule $\bigoplus_{L\in\mathcal{S}_0} \mathrm{St}$ of $C_{\mathrm{r}(n)}$. Using a theorem of E. Bannaï, we obtain a lower bound $a(n)$ for the dimension of K and an upper bound $b(n)$ for the dimension of the image of K in $C_{\mathrm{r}(n)-1}$ by the differential of $C_\bullet$. Then the difference $a(n)-b(n)$ is a lower bound for the homology in degree $\mathrm{r}(n)$, whose logarithm is equivalent to $\frac{n^2}{4}\log n$ as n tends to infinity and 8 does not divide n.

0. Introduction

Soient A un anneau commutatif et n un entier naturel. On note $\mathrm{O}_n(A)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(A)$ constitué des matrices M vérifiant ${}^tMM = \mathrm{Id}_n$.

On rappelle que la notation $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ désigne le sous-anneau de $\mathbf{Q}$ constitué des fractions irréductibles dont le dénominateur est une puissance de 2.

Comme le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ est discret et cocompact dans $\mathrm{O}_n(\mathbf{Q}_2)$, un théorème de Garland et Casselman (*cf.* [2] Thm XIII.2.6) dit que son homologie rationnelle est concentrée en degrés 0 et $\mathrm{r}(n)$, $\mathrm{r}(n)$ désignant l'indice de Witt de la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{Q}_2^n$ dont la matrice est Id_n (on constate que l'on a $n - 2\,\mathrm{r}(n) = \inf_{m\in\mathbf{Z}}(|n-8m|)$). L'objet de cette note est d'esquisser la démonstration du résultat suivant :

THÉORÈME 0.1. – *Lorsque n tend vers l'infini, on a l'équivalence* :

$$\log\dim \mathrm{H}_{\mathrm{r}(n)}\left(\mathrm{O}_n\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right); \mathbf{Q}\right) \sim \frac{n^2}{4}\log n$$

pourvu que n ne soit pas divisible par 8.

Ce théorème est à confronter au suivant, dû à H.-W. Henn et J. Lannes (cf. [5])

THÉORÈME 0.2. – *Pour $n \leqslant 14$, on a* :

$$\widetilde{\mathrm{H}}_*\left(\mathrm{O}_n\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right); \mathbf{Q}\right) = 0,$$

(on rappelle que la notation $\widetilde{\mathrm{H}}_*$ désigne l'homologie réduite) que ces auteurs déduisent de l'énoncé plus précis suivant

THÉORÈME 0.3. – *Soit $\rho_n : \mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]) \to \mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3)$ l'homomorphisme de groupes induit par la réduction modulo* 3 ; *alors l'application*

$$\rho_{n*} : \mathrm{H}_*\left(\mathrm{O}_n\left(\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\right); \mathbf{Z}/2\right) \to \mathrm{H}_*\big(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3); \mathbf{Z}/2\big)$$

est un isomorphisme pour $n \leqslant 14$.

(En fait cette application n'est plus un isomorphisme pour $n > 14$.)

Ce théorème est relié à une conjecture, disons (Q_n), de D. Quillen ([9], p. 591) :

(Q_n) $\mathrm{H}_*(\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]);\mathbf{Z}/2)$ est un $\mathrm{H}_*(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C});\mathbf{Z}/2)$-module libre (*via* le plongement de $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ dans $\mathbf{C}$).

Cette conjecture a été vérifiée pour $n \leqslant 3$ [8,4] (et « $n=\infty$ ») et infirmée pour $n \geqslant 32$ [3], puis $n \geqslant 14$ [5]. Henn et Lannes montrent dans [5] que (Q_n) implique que ρ_{n*} est un isomorphisme en homologie modulo 2 et donc, par un argument de suite de Bockstein, en homologie rationnelle. Comme l'on a $\widetilde{\mathrm{H}}_*(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3);\mathbf{Q})=0$, la conjecture (Q_n) implique au bout du compte $\widetilde{\mathrm{H}}_*(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]);\mathbf{Q})=0$. Le Théorème 1 fournit donc une indication quantitative sur la « non-véracité » de (Q_n) pour n grand.

Les Théorèmes 1 et 3 sont obtenus en considérant l'action du groupe discret $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ sur l'immeuble de Bruhat–Tits pour $\mathrm{O}_n(\mathbf{Q}_2)$ (il s'agit en fait d'une méthode générale, *voir* [11]). Plus précisément, on étudie cette action en décrivant l'immeuble en terme de réseaux (*voir* [5] et le paragraphe 1 ci-après).

Nous pouvons maintenant justifier le titre de cette Note :

On constate dans [5] que le Théorème 3 s'explique en partie par le fait que les réseaux unimodulaires de dimension n ont de « gros » groupes d'automorphismes pour n petit. Nous exploitons par contre dans ce travail un résultat de E. Bannaï [1] qui affirme que, lorsque n est grand, la masse (au sens de Minkowski–Siegel) des réseaux unimodulaires dont le groupe d'automorphismes est trivial (c'est-à-dire ici égal à $\{\pm\mathrm{id}\}$) est équivalente à la masse de tous les réseaux unimodulaires.

Pour faciliter l'exposition, nous supposons dans les deux premiers paragraphes $n \not\equiv 0 \bmod 4$. Nous traitons des cas $n \equiv 0 \bmod 4$ au Paragraphe 3.

1. L'immeuble affine de $\mathrm{O}_n(\mathbf{Q}_2)$

Soit n un nombre entier naturel qu'on suppose non divisible par 4.

1.1. Description de l'immeuble en termes de réseaux

On désigne par V l'espace vectoriel $\mathbf{Q}_2^n$ muni de la forme bilinéaire symétrique, notée $(x,y)\mapsto x.y$, dont la matrice est Id_n. On note $\mathrm{O}(V)$ son groupe orthogonal (on a donc $\mathrm{O}(V)=\mathrm{O}_n(\mathbf{Q}_2)$) et r son indice de Witt (qui est le rang sur $\mathbf{Q}_2$ de O_n).

Soit L un $\mathbf{Z}_2$-réseau sur V, on note $L^\sharp$ le réseau sur V (couramment appelé dual de L) constitué des éléments ξ vérifiant $\xi.x \in \mathbf{Z}_2$ pour tout x dans L. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des $\mathbf{Z}_2$-réseaux L sur V vérifiant les conditions ci-dessous :

$$(\mathrm{R}_1)\quad L\subset L^\sharp\subset \frac{1}{2}L\,; \qquad (\mathrm{R}_2)\quad \forall\xi\in L^\sharp,\quad \xi.\xi\in\mathbf{Z}_2.$$

L'ensemble $\mathcal{B}$ est ordonné par inclusion et muni d'une action de $\mathrm{O}(V)$ préservant l'ordre. Le complexe simplicial $|\mathcal{B}|$ (la notation $|\ |$ désigne le complexe simplicial canoniquement attaché à un ensemble ordonné (*cf.* [10])) est homéomorphe à l'immeuble affine de Bruhat–Tits pour $\mathrm{O}(V)$ (et lui est en fait isomorphe pour $n \not\equiv \pm 1 \bmod 8$). Il est contractile et de dimension r ; l'action de $\mathrm{O}(V)$ dont il est muni est propre.

Soit L un élément de $\mathcal{B}$. La condition (R_1) montre que le quotient $L^\sharp/L$ est un $\mathbf{Z}/2$-espace vectoriel avec $\dim_{\mathbf{Z}/2} L^\sharp/L \leqslant n$. Cette même condition montre que l'accouplement non-dégénéré $L^\sharp/L \times L^\sharp/L \to \mathbf{Q}_2/\mathbf{Z}_2$, induit par la forme de V, est à valeurs dans $(\frac{1}{2}\mathbf{Z}_2)/\mathbf{Z}_2$ et peut donc être considéré comme une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée (à valeurs dans $\mathbf{Z}/2$). D'après (R_2) cette forme bilinéaire symétrique est aussi alternée. On pose $\delta(L)=\frac{1}{2}\dim_{\mathbf{Z}/2} L^\sharp/L$ et l'on note $\mathcal{B}_k$ le sous-ensemble $\delta^{-1}(k)$ de $\mathcal{B}$. Il est clair que l'action de $\mathrm{O}(V)$ préserve δ ; on vérifie que l'action de $\mathrm{O}(V)$ est transitive.

Soit $\mathcal{V}_+(L)$ (resp. $\mathcal{V}_-(L)$) l'ensemble ordonné des éléments de $\mathcal{B}$ contenant strictement (resp. strictement contenus dans) L. On vérifie que $|\mathcal{V}_+(L)|$ (resp. $|\mathcal{V}_-(L)|$) est un immeuble sphérique de dimension $\delta(L)-1$ (resp. $r-\delta(L)-1$).

1.2. Orbites de l'action de $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ sur l'immeuble et classification de formes quadratiques entières

On pose $\Lambda=\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]^n$; la forme bilinéaire symétrique dont est muni V induit sur le $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module Λ la forme bilinéaire symétrique (à valeurs dans $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$) dont la matrice est encore Id_n. On pose enfin $\Gamma=\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$.

Soit L un élément de $\mathcal{B}$. L'intersection $S = L \cap \Lambda$ est un $\mathbf{Z}$-module libre de dimension n muni d'une forme bilinéaire symétrique b_S (à valeurs dans $\mathbf{Z}$) vérifiant les conditions ci-dessous :

(P) la forme bilinéaire symétrique induite par b_S sur $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} S$ est définie positive ;

($\mathrm{R}'_{1,2}$) le conoyau de l'homomorphisme $\tilde{b}_S : S \to S^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(S, \mathbf{Z})$, induit par b_S, est annulé par 2 et $u(\tilde{b}_S^{-1}(2u))$ est pair pour tout u dans S^*.

On pose $\delta(S) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbf{Z}/2} \operatorname{coker} \tilde{b}_S$; on observera que $\delta(S)$ peut être plus concrétement défini par la formule $\operatorname{dét} S = 2^{2\delta(S)}$, $\operatorname{dét} S$ désignant le déterminant de S. On note $\mathcal{S}_k$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets S du type ci-dessus avec $\delta(S) = k$.

On constate que le sous-groupe de Γ stabilisateur de L, noté $\mathrm{Stab}_\Gamma(L)$, est canoniquement isomorphe au groupe d'automorphismes de $L \cap \Lambda$. Par ailleurs le fait que l'on a un isomorphisme (préservant les formes bilinéaires) $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_{\mathbf{Z}} S \cong \Lambda$ pour tout S vérifiant les conditions ci-dessus (ce résultat est essentiellement conséquence du théorème d'approximation forte) implique que toute classe de $\mathcal{S}_k$ est représentée par un $L \cap \Lambda$. On déduit de ce qui précède que l'on a une bijection d'ensembles canonique $\Gamma \backslash \mathcal{B}_k \cong \mathcal{S}_k$ et des égalités de « masses »

$$\sum_{L \in \Gamma \backslash \mathcal{B}_k} \frac{1}{\operatorname{card}(\mathrm{Stab}_\Gamma(L))} = \sum_{S \in \mathcal{S}_k} \frac{1}{\operatorname{card}(\mathrm{O}(S))}.$$

Expliquons les notations. La notation

card( ) désigne le cardinal d'un ensemble fini, la notation $L \in \Gamma \backslash \mathcal{B}_k$ indique que L parcourt un système de représentants pour $\Gamma \backslash \mathcal{B}_k$, même chose *mutatis mutandis* pour $S \in \mathcal{S}_k$, enfin la notation $\mathrm{O}(S)$ désigne le groupe d'automorphismes de S.

On note $\mathrm{M}(n,k)$ la masse qui apparaît ci-dessus ; $\mathrm{M}(n,0)$ a été calculé par Siegel, nous utiliserons l'estimation grossière suivante (*voir* par exemple [7] pour une estimation plus fine) :

PROPOSITION 1.1. – *Lorsque n tend vers l'infini on a l'équivalence* $\log \mathrm{M}(n,0) \sim \frac{n^2}{4} \log n$.

La valeur de $\mathrm{M}(n,k)$ se déduit de celle de $\mathrm{M}(n,0)$ en considérant l'immeuble $\mathcal{B}$, par exemple :

PROPOSITION 1.2. – *Soit* N_1 (*resp.* N_0) *le nombre de réseaux de* $\mathcal{B}_1$ (*resp.* $\mathcal{B}_0$) *contenus dans* (*resp. contenant*) *un réseau donné de* $\mathcal{B}_0$ (*resp.* $\mathcal{B}_1$). *Alors on a* $\mathrm{M}(n,1) = \frac{N_1}{N_0} \mathrm{M}(n,0)$.

Soit maintenant $\mathcal{T}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_k$ constitué des classes des S avec $\mathrm{O}(S) = \{\pm \mathrm{id}\}$. Une version non effective du théorème de Bannaï (*cf.* [1]) évoqué dans l'introduction s'exprime ainsi :

THEOREM 1.1. – *Lorsque n tend vers l'infini on a l'équivalence* $\frac{1}{2} \operatorname{card}(\mathcal{T}_0) \sim \mathrm{M}(n,0)$.

Nous en déduisons après quelques calculs

PROPOSITION 1.3. – *Lorsque n tend vers l'infini on a l'équivalence* $\frac{1}{2} \operatorname{card}(\mathcal{T}_1) \sim \mathrm{M}(n,1)$.

2. Homologie rationnelle de $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$

On rappelle que n est un nombre entier naturel non divisible par 4 et que la notation Γ désigne le groupe $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$.

2.1. Généralisation du « lemme des voisins » de Kneser

Soit k un entier, on note $\mathcal{B}_{\leqslant k}$ (resp. $\mathcal{B}_{\geqslant k}$) le sous-ensemble (ordonné) de $\mathcal{B}$ constitué des réseaux L avec $\delta(L) \leqslant k$ (resp. $\delta(L) \geqslant k$). On considère les filtrations

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{\leqslant 0} \subset \mathcal{B}_{\leqslant 1} \subset \cdots \subset \mathcal{B}_{\leqslant r-1} \subset \mathcal{B}_{\leqslant r} = \mathcal{B},$$

$$\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_{\geqslant r} \subset \mathcal{B}_{\geqslant r-1} \subset \cdots \subset \mathcal{B}_{\geqslant 1} \subset \mathcal{B}_{\geqslant 0} = \mathcal{B}.$$

Dans [6], M. Kneser considère les $\mathbf{Z}$-réseaux unimodulaires sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]^n$ muni de la forme bilinéaire symétrique de matrice l'identité. Il dit que deux tels réseaux K et L sont *voisins* si $K \cap L$ est d'indice 2 dans K et L. Le fameux « lemme des voisins » dit que si K et L sont deux réseaux unimodulaires sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]^n$, il existe une suite finie de réseaux $K = L_0, L_1, \ldots, L_m = L$ telle que L_{i-1} et L_i soient voisins pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Ceci est équivalent à la connexité de $|\mathcal{B}_{\leqslant 1}|$. Nous montrons que ce lemme se généralise de la façon suivante :

PROPOSITION 2.1. – *Les complexes simpliciaux $|\mathcal{B}_{\leqslant k}|$ et $|\mathcal{B}_{\geqslant r-k}|$ sont $k-1$-connexes.*

Les propriétés homotopiques des voisinages $\mathcal{V}_+(L)$ et $\mathcal{V}_-(L)$ impliquent en effet que la paire $(|\mathcal{B}_{\leqslant k}|, |\mathcal{B}_{\leqslant k-1}|)$ est $k-2$-connexe, ce qui permet de descendre du théorème de Solomon–Tits affirmant dans ce cas (immeuble de type euclidien) que $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_{\leqslant r}|$ est contractile au lemme de Kneser détaillé ci-dessus en passant par toutes les propriétés énoncées dans la proposition. (De telles filtrations existent pour tout immeuble, et nous avons un résultat similaire dans ce cadre plus général.)

2.2. Démonstration du Théorème 1

La proposition précédente entraîne :

COROLLAIRE 2.2. – *La suite de groupes abéliens suivante est exacte*

$$0 \to \mathrm{H}_r\big(|\mathcal{B}|, |\mathcal{B}_{\geqslant 1}|\big) \to \mathrm{H}_{r-1}\big(|\mathcal{B}_{\geqslant 1}|, |\mathcal{B}_{\geqslant 2}|\big) \to \cdots \to \mathrm{H}_1\big(|\mathcal{B}_{\geqslant r-1}|, |\mathcal{B}_r|\big) \to \mathrm{H}_0|\mathcal{B}_r| \to \mathbf{Z} \to 0.$$

Soit L un élément de $\mathcal{B}_k$, on pose $\mathrm{St}^+(L) = \widetilde{\mathrm{H}}_{k-1}|\mathcal{V}_+(L)|$ et $\mathrm{St}^-(L) = \widetilde{\mathrm{H}}_{r-k-1}|\mathcal{V}_-(L)|$; $\mathrm{St}^+(L)$ et $\mathrm{St}^-(L)$ sont des $\mathbf{Z}$-modules libres de dimension finie munis d'une action du sous-groupe de $\mathrm{O}(V)$ stabilisateur de L.

LEMME 2.3. – *Soit L un réseau de $\mathcal{B}_k$. Alors le $\mathbf{Z}[\mathrm{O}(V)]$-module $\mathrm{H}_{r-k}(|\mathcal{B}_{\geqslant k}|, |\mathcal{B}_{\geqslant k+1}|)$ est canoniquement isomorphe au module induit $\mathbf{Z}[\mathrm{O}(V)] \otimes_{\mathbf{Z}[\mathrm{Stab}_{\mathrm{O}(V)}(L)]} \mathrm{St}^-(L)$.*

Le Corollaire 2.2, la finitude des sous-groupes stabilisateurs de l'action de Γ sur $\mathcal{B}$ et le Lemme 2.3 conduisent à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 2.4. – *L'homologie rationnelle de Γ est isomorphe à celle d'un complexe*

$$C_r \longrightarrow C_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_k \xrightarrow{\mathrm{d}_k} C_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0$$

avec

$$C_k = \bigoplus_{L \in \Gamma\backslash\mathcal{B}_k} \mathrm{H}_0\big(\mathrm{Stab}_\Gamma(L); \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{St}^-(L)\big)$$

et

$$\mathrm{d}_k\big(\mathrm{H}_0\big(\mathrm{Stab}_\Gamma(L); \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{St}^-(L)\big)\big) \subset \bigoplus_{K \in \Gamma\backslash\mathcal{B}_{k-1},\ K \subset L} \mathrm{H}_0\big(\mathrm{Stab}_\Gamma(K); \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{St}^-(K)\big).$$

Nous nous concentrons maintenant sur la différentielle d_r. On note $\mathcal{D}_0$ le sous-ensemble de $\Gamma\backslash\mathcal{B}_0$ constitué des classes de réseaux L avec $\mathrm{Stab}_\Gamma(L) = \{\pm\mathrm{id}\}$. Soit K un réseau avec $\delta(K) = 1$ contenu dans un tel L ; on constate que l'on a $\mathrm{card}(\mathrm{Stab}_\Gamma(K)) \leqslant 6$. On note $\mathcal{D}_1$ le sous-ensemble de $\Gamma\backslash\mathcal{B}_1$ constitué des classes de réseaux K avec $\mathrm{card}(\mathrm{Stab}_\Gamma(K)) \leqslant 6$ et l'on pose

$$D_r = \bigoplus_{L \in \mathcal{D}_0} \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{St}^-(L), \qquad D_{r-1} = \bigoplus_{K \in \mathcal{D}_1} \mathrm{H}_0\big(\mathrm{Stab}_\Gamma(K)\,; \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathrm{St}^-(K)\big)\ ;$$

on observera que nous avons tout fait pour avoir $\mathrm{d}_r(D_r) \subset D_{r-1}$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Théorème 1. Il est clair tout d'abord que l'on a l'inégalité

$$\dim \mathrm{H}_r(\Gamma; \mathbf{Q}) \geqslant \dim D_r - \dim D_{r-1}.$$

Soit L un élément de $\mathcal{B}_k$, on note s_k la dimension (ne dépendant pas du choix de L) de $\mathrm{St}^-(L)$. La Proposition 1.2 montre ensuite que lorsque n tend vers l'infini on a l'inégalité :

$$\dim D_r - \dim D_{r-1} \geqslant 2\mathrm{M}(n,0)s_0\left(1 - \frac{N_1}{N_0}\frac{s_1}{s_0} + \mathrm{o}(1)\right).$$

La remarque cruciale est que la suite $n \mapsto \frac{s_1}{s_0}N_1$ converge vers 2. Comme N_0 est égal à 3, $1 - \frac{N_1}{N_0}\frac{s_1}{s_0}$ tend vers $\frac{1}{3}$. Ce qui précède fournit une minoration $\dim \mathrm{H}_r(\Gamma; \mathbf{Q}) \geqslant f(n)$ avec $\log f(n) \sim \frac{n^2}{4}\log n$. D'autre part, le fait que le noyau de l'homomorphisme évident $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]) \to \mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3)$ est sans torsion implique $\mathrm{card}(\mathrm{Stab}_\Gamma(L)) \leqslant \mathrm{card}(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3))$ pour tout L dans $\mathcal{B}$; on en déduit l'inégalité

$$\dim C_r \leqslant \mathrm{card}\big(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3)\big)\,\mathrm{M}(n,0)s_0$$

et par suite une majoration $\dim \mathrm{H}_r(\Gamma; \mathbf{Q}) \leqslant g(n)$ avec $\log g(n) \sim \frac{n^2}{4}\log n$. □

3. Le cas $n \equiv 0 \bmod 4$

On définit dans ce cas $\mathcal{B}$ comme l'ensemble ordonné des $\mathbf{Z}_2$-réseaux sur $\mathbf{Q}_2^n$ vérifiant, en plus des conditions (R_1) et (R_2) introduites au Paragraphe 1.1 la condition suivante :
(R_3) $\forall x \in L,\ x.x \in 2\mathbf{Z}_2$.

Le complexe simplicial $|\mathcal{B}|$ est encore homéomorphe à l'immeuble affine de Bruhat–Tits de $\mathrm{O}_n(\mathbf{Q}_2)$ (il lui est en fait isomorphe pour $n \equiv 4 \bmod 8$). On pose à nouveau $\delta(L) = \frac{1}{2}\dim L^\sharp/L$ pour $n \equiv 0 \bmod 8$, et $\delta(L) = \frac{1}{2}\dim L^\sharp/L - 1$ pour $n \equiv 4 \bmod 8$ (on modifie ainsi la définition de δ car il n'existe pas de réseaux unimodulaires pairs dans ce cas). On modifie la définition des $\mathcal{S}_k$ donnée au Paragraphe 1.2 en demandant que la forme bilinéaire symétrique b_S vérifie, en plus des conditions (P) et ($\mathrm{R}'_{1,2}$), la condition suivante :
(R'_3) $b_S(x,x)$ est pair pour tout x dans S.

Les énoncés 1.1, 1.2, 1.1, 1.3 ainsi que 2.2 et 2.3 restent valables *mutatis mutandis*. De plus, $n \mapsto \frac{s_1}{s_0}N_1$ converge encore vers 2.

Venons en au Théorème 1.

Cas $n \equiv 4 \bmod 8$. On a $N_0 = 5$. La méthode utilisée pour le cas $n \not\equiv 0 \bmod 4$ s'applique.

Cas $n \equiv 0 \bmod 8$. On a $N_0 = 2$, et donc $1 - \frac{2}{N_0} = 0$. En outre la suite $\frac{s_1}{s_0}N_1$ tend vers 2 par valeurs supérieures. La méthode est donc en défaut.

Nous conjecturons cependant que, dans le Théorème 1, la restriction $n \not\equiv 0 \bmod 8$ peut être levée.

Références bibliographiques

[1] E. Bannaï, Positive definite unimodular lattices with trivial automorphism groups, Mem. Amer. Math. Soc. 85 (1990).
[2] A. Borel, N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representation of reductive groups, Ann. of Math. Stud. 94 (1980).
[3] W.G. Dwyer, Exotic cohomology for $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z}[1/2])$, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (7) (1998) 2159–2167.
[4] H.-W. Henn, The cohomology of $\mathrm{SL}(3, \mathbf{Z}[1/2])$, K-Theory 16 (4) (1999) 299–359.
[5] H.-W. Henn, J. Lannes, En préparation.
[6] M. Kneser, Klassenzahlen definiter quadratischer Formen, Arch. Math. 8 (1957) 241–250.
[7] J. Milnor, D. Husemoller, Symmetric Bilinear Forms, Ergeb. Math. Grenzgeb., Vol. 73, Springer-Verlag, New York, 1973.
[8] S.A. Mitchell, On the plus construction for $\mathrm{BGL}\,\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ at the prime 2, Math. Z. 209 (1992) 205–222.
[9] D. Quillen, The spectrum of an equivariant cohomology ring II, Ann. of Math. 94 (1971) 573–602.
[10] D. Quillen, Homotopy properties of the poset of non-trivial p-subgroups of a group, Adv. Math. 28 (1978) 101–128.
[11] J.-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets, Ann. of Math. Stud. 70 (1971) 77–169.
[12] J. Tits, Reductive groups over local fields, Automorphic forms, representations and L-functions, in: Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Part 1, American Mathematical Society, Providence, RI, 1979, pp. 29–69.