C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 105–110

Logique/*Logic*
(Combinatoire/*Combinatorics*)

La demi-isomorphie et les tournois fortement connexes finis

Moncef Bouaziz [a], Youssef Boudabbous [b]

[a] **Faculté des sciences de Tunis, Département de mathématiques, Elmanar II 2092, Tunisie**

[b] **Al-Jouf Technical College, Department of General Studies, PO Box 1642, Sakaka, Al-Jouf, Saudi Arabia**

Reçu le 2 mai 2002 ; accepté le 3 mai 2002

Note présentée par Jean-Yves Girard.

Résumé Soient $T=(S,A)$ un tournoi fini à n sommets et F un ensemble d'entiers positifs $\leqslant n$. Le dual de T est le tournoi $T^*=(S,A^*)$ défini par : pour tous $x,y\in S$, $(y,x)\in A^*$ si et seulement si $(x,y)\in A$. A chaque partie X de S est associé le sous-tournoi $T(X)=(X,A\cap(X\times X))$ de T induit par X. Le tournoi T est fortement connexe si pour tous $x,y\in S$, avec $x\neq y$, il existe une suite $x_0=x,\dots,x_p=y$ telle que pour tout $i\in\{0,\dots,p-1\}$, $(x_i,x_{i+1})\in A$. Un demi-isomorphisme de T sur un tournoi T' est soit un isomorphisme de T sur T' soit un isomorphisme de T^* sur T'. Un tournoi T', ayant le même ensemble de sommets S que T, est F-demi-isomorphe à T lorsque pour toute partie X de S telle que $|X|\in F$, les sous-tournois $T(X)$ et $T'(X)$ sont demi-isomorphes. Nous étudions la $\{3,n-2\}$-demi-isomorphie et la $\{n-3\}$-demi-isomorphie entre deux tournois à n sommets dont l'un est fortement connexe. ***Pour citer cet article : M. Bouaziz, Y. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 105–110.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The half-isomorphy and the finite strongly connected tournaments

Abstract Let $T=(V,A)$ be a finite tournament with n vertices and let F be a set of non-negative integers $\leqslant n$. The dual of T is the tournament $T^*=(V,A^*)$ defined by: for all $x,y\in V$, $(y,x)\in A^*$ if and only if $(x,y)\in A$. With every subset X of V is associated the subtournament $T(X)=(X,A\cap(X\times X))$ of T induced by X. The tournament T is strongly connected if for all $x,y\in V$, with $x\neq y$, there is a sequence $x_0=x,\dots,x_p=y$ such that for all $i\in\{0,\dots,p-1\}$, $(x_i,x_{i+1})\in A$. An half-isomorphism from T onto a tournament T' is either an isomorphism from T onto T' or an isomorphism from T^* onto T'. A tournament T', with the same set of vertices V than T, is F-half-isomorphic to T if for every subset X of V such that $|X|\in F$, the subtournaments $T(X)$ and $T'(X)$ are half-isomorphic. We study the $\{3,n-2\}$-half-isomorphy and the $\{n-3\}$-half-isomorphy between two tournaments with n vertices, one of them is strongly connected. ***To cite this article: M. Bouaziz, Y. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 105–110.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Adresses e-mail : Moncef.Bouaziz@issatm.rnu.tn (M. Bouaziz); youssef_boudabbous@yahoo.fr (Y. Boudabbous).

S1631-073X(02)02439-1/FLA

Abridged English version

1. A finite *tournament* $T = (V, A)$ consists of a finite set V of *vertices* with a prescribed collection A of ordered pairs of distinct vertices, called the set of *arcs* of T, which satisfies: for $x, y \in V$, with $x \neq y$, $(x, y) \in A$ if and only if $(y, x) \notin A$. The *dual* of T is the tournament $T^* = (V, A^*)$ defined by: for all $x, y \in V$, $(y, x) \in A^*$ if and only if $(x, y) \in A$. The tournament T is *selfdual* when T is isomorphic to T^*. With every subset X of V is associated the *subtournament* $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ of T induced by X. The tournament T is *strongly connected* if for all $x, y \in V$, with $x \neq y$, there is a sequence $x_0 = x, \ldots, x_p = y$ such that for all $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$. An *half-isomorphism* from T onto a tournament T' is either an isomorphism from T onto T' or an isomorphism from T^*onto T'.

Given two tournaments $T = (V, A)$ and $T' = (V, A')$, with $|V| = n$, and a set F of non-negative integers $\leqslant n$, T and T' are *F-half-isomorphic* or *F-isomorphic* if for every subset X of V such that $|X| \in F$, the subtournaments $T(X)$ and $T'(X)$ are half-isomorphic or isomorphic, respectively. The tournament T is *F-half-reconstructible* (resp. *F-reconstructible*) provided that for every tournament T', the F-half-isomorphy (resp. F-isomorphy) implies the half-isomorphy (resp. isomorphy) between T and T'.

Given a tournament $T = (V, A)$, a subset I of V is an *interval* of T provided that for all the elements a, b of I and x of $(V - I)$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$. Clearly, the empty set, the singletons of V and the set V are intervals of T, called *trivial* intervals. A tournament of cardinality $\geqslant 3$ is *indecomposable* if all of its intervals are trivial.

Given a tournament $H = (\{1, \ldots, k\}, A)$, with every $i \in \{1, \ldots, k\}$ is associated a tournament $T_i = (V_i, A_i)$ such that the V_i's are mutually disjoint. The *lexicographical sum* of the T_i's over H is the tournament denoted by $H(T_1, \ldots, T_k)$ and defined on the union of the V_i's as follows: given $u \in V_i$ and $v \in V_j$, where $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, (u, v) is an arc of $H(T_1, \ldots, T_k)$ if either $i = j$ and $(u, v) \in A_i$ or $i \neq j$ and $(i, j) \in A$. Gallai's decomposition [6] for the strongly connected tournaments is then reviewed as follows.

PROPOSITION 1. – *Every strongly connected tournament T is decomposed into a lexicographical sum $H(T_1, \ldots, T_k)$, where H is an indecomposable tournament.*

Since, in the previous proposition, the tournament H is unique up to isomorphism, it is called the *skeleton* of T.

2. Analogously with the problems of reconstruction ([5] and [11]), Hagendorf [7] introduced the problems of half-reconstruction. Boudabbous and Lopez [2] established the $\{1, \ldots, 7\}$-half-reconstruction of tournaments from which follows the $\{n - d\}$-half-reconstruction of tournaments of cardinality $n \geqslant d + 7$ for every $d \geqslant 7$. Then, Boudabbous and Dammak [1] obtained the $\{n - d\}$-half-reconstruction of tournaments of cardinality $n \geqslant d + 12$ for each $d \in \{4, 5, 6\}$. Quite a lot of reconstruction problems amount to problems of selfduality. For example, the problem of the $\{3, n - 2\}$ (resp. $\{n - 1, n - 2, n - 3\}$)-reconstruction of indecomposable tournaments with n vertices, that is still open, amounts to the following.

TWO PROBLEMS OF SELFDUALITY. – *Let U be an indecomposable tournament with n vertices. In the following two questions, n is considered sufficiently large.*

(1) *Is the selfduality of U induced by the selfduality of its subtournaments of cardinality* $n - 2$?

(2) *Is the selfduality of U induced by the selfduality of its subtournaments of cardinality* $n - 1$, $n - 2$ *or* $n - 3$?

It may be verified that an eventual negative answer to the first problem of selfduality leads to a negative answer to the problem of the $\{3, n - 2\}$-half-reconstruction of non strongly connected tournaments. Therefore, we examine the $\{3, n - 2\}$-half-isomorphy between two tournaments with n vertices, one of them is strongly connected. The main result is the following.

THEOREM 1. – *Every strongly connected tournament with $n \geqslant 9$ vertices is $\{3, n - 2\}$-half-reconstructible.*

We then study the $\{n-3\}$-half-isomorphy between two tournaments, one of them is strongly connected. However, an eventual negative answer to the second problem of selfduality involves the existence of strongly connected tournaments with n vertices whose skeleton is reduced to 3 vertices and which are not $\{n-3\}$-half-reconstructible. In the other cases, the following is obtained.

THEOREM 2. – *Let T be a strongly connected tournament with $n \geqslant 10$ vertices. If the skeleton of T has more than* 3 *vertices, then T is $\{n-3\}$-half-reconstructible.*

---

1. Préliminaires

Un *tournoi* fini T est un couple (S, A), où S est l'ensemble *des sommets* de T et A est un ensemble de couples de sommets distincts, appelés *arcs* de T, vérifiant : pour tous $x, y \in S$ avec $x \neq y$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. *Le dual* du tournoi T est le tournoi $T^* = (S, A^*)$ défini par : pour tous $x, y \in S$, $(y, x) \in A^*$ si et seulement si $(x, y) \in A$. Le tournoi T est *autodual* lorsque T est isomorphe à T^*. A chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de T induit par X. Le tournoi T est *fortement connexe* si pour tous $x, y \in S$, avec $x \neq y$, il existe une suite $x_0 = x, \ldots, x_p = y$ telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$. Un *demi-isomorphisme* de T sur un tournoi T' est soit un isomorphisme de T sur T' soit un isomorphisme de T^* sur T'.

Etant donnés deux tournois T et T' ayant le même ensemble S de sommets à n éléments et un ensemble F d'entiers positifs $\leqslant n$, T et T' sont *F-demi-isomorphes* (resp. *F-isomorphes*), si pour toute partie X de S telle que $|X| \in F$, les sous-tournois $T(X)$ et $T'(X)$ sont demi-isomorphes (resp. isomorphes). Le tournoi T est *F-demi-reconstructible* (resp. *F-reconstructible*), lorsque tout tournoi F-demi-isomorphe (resp. F-isomorphe) à T, lui est demi-isomorphe (resp. isomorphe).

Etant donné un tournoi $T = (S, A)$, on dit qu'une partie I de S est un *intervalle* de T lorsque pour tous les éléments a, b de I et x de $S - I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Clairement, l'ensemble vide, les singletons de S et l'ensemble S sont des intervalles de T, appelés intervalles *triviaux*. Un tournoi, ayant au moins 3 sommets, est *indécomposable* lorsque tous ses intervalles sont triviaux. Rappelons le résultat suivant.

PROPOSITION 1 ([3]). – *Etant donné un tournoi indécomposable T, les seuls tournois $\{3\}$-demi-isomorphes à T sont T et T^*.*

Etant donné un tournoi $H = (\{1, \ldots, k\}, A)$, associons à chaque $i \in \{1, \ldots, k\}$ un tournoi $T_i = (S_i, A_i)$ de telle sorte que les ensembles S_i sont mutuellement disjoints. La *somme lexicographique* des tournois T_i suivant H est le tournoi noté $H(T_1, \ldots, T_k)$ et défini sur la réunion des S_i comme suit : étant donnés $u \in S_i$ et $v \in S_j$, où $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, (u, v) est un arc de $H(T_1, \ldots, T_k)$ lorsque, $i = j$ et $(u, v) \in A_i$ ou $i \neq j$ et $(i, j) \in A$. Rappelons alors la décomposition de Gallai [6] pour les tournois fortement connexes.

PROPOSITION 2. – *Tout tournoi fortement connexe T se décompose en une somme lexigographique $H(T_1, \ldots, T_k)$, où H est un tournoi indécomposable.*

Puisque, dans la proposition précédente, le tournoi H est unique à isomorphisme près, il est appelé *squelette* de T.

2. Présentation des résultats

Par analogie avec les problèmes de reconstruction dus à Ulam [11] et à Fraïssé [5], Hagendorf [7] a introduit les problèmes de demi-reconstruction. Boudabbous et Lopez [2] ont établi la $\{1, \ldots, 7\}$-demi-reconstruction des tournois. En utilisant alors un lemme fondamental de coloration en Combinatoire, dû à Pouzet [9], ils obtiennent la $\{n-d\}$-demi-reconstruction des tournois ayant $n \geqslant d+7$ sommets, pour tout entier $d \geqslant 7$. Ensuite, Boudabbous et Dammak [1] ont montré que pour $d = 4, 5$ ou 6, les tournois ayant $n \geqslant d + 12$ sommets sont $\{n - d\}$-demi-reconstructibles.

Comme le montre la Proposition 1, de nombreux problèmes de reconstruction se ramènent, dans le cas indécomposable, à des problèmes d'autodualité. Par exemple, le problème de la $\{3, n-2\}$-reconstruction et celui de la $\{n-3, n-2, n-1\}$-reconstruction des tournois indécomposables de cardinal n, qui sont encore ouverts, peuvent aussi s'énoncer de la façon suivante.

DEUX PROBLÈMES D'AUTODUALITÉ. – *Soit U un tournoi indécomposable à n sommets. Dans les deux questions suivantes, n est considéré suffisamment grand.*

(1) *Est-ce que l'autodualié de U se déduit de l'autodualié de ses sous-tournois de cardinal $n-2$?*

(2) *Est-ce que l'autodualié de U se déduit de l'autodualié de ses sous-tournois de cardinal $n-1$, $n-2$ ou $n-3$?*

On peut remarquer qu'une éventuelle réponse négative au premier problème d'autodualité conduit à une réponse négative au problème de la $\{3, n-2\}$-demi-reconstruction des tournois non fortement connexes. Aussi, nous nous intéressons à la $\{3, n-2\}$-demi-isomorphie entre deux tournois à n sommets dont l'un est fortement connexe. Cette étude aboutit au théorème suivant.

THÉORÈME 1. – *Les tournois fortement connexes à $n \geqslant 9$ sommets sont $\{3, n-2\}$-demi-reconstructibles.*

Nous étudions ensuite la $\{n-3\}$-demi-isomorphie entre deux tournois à n sommets dont l'un est fortement connexe. Cependant, une éventuelle réponse négative au deuxième problème d'autodualité entraîne l'existence de tournois fortement connexes ayant n sommets, dont le squelette est réduit à 3 sommets et qui ne sont pas $\{n-3\}$-demi-reconstructibles. Dans les autres cas, nous concluons de la façon suivante.

THÉORÈME 2. – *Tout tournoi fortement connexe, ayant $n \geqslant 10$ sommets et dont le squelette n'est pas réduit à 3 sommets, est $\{n-3\}$-demi-reconstructible.*

3. Preuve du Théorème 1

Dans tout ce paragraphe, on considère un tournoi fortement connexe T sur un ensemble S à $n \geqslant 9$ éléments et un tournoi T' sur S, $\{3, n-2\}$-demi-isomorphe à T. D'après la Proposition 2, le tournoi T s'écrit $T = H(T_1, \ldots, T_k)$, où $k \geqslant 3$, H est un tournoi indécomposable sur $\{1, \ldots, k\}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, T_i est un tournoi sur un ensemble I_i. En utilisant la Proposition 1, le tournoi T' s'écrit sous l'une des deux formes suivantes : $T' = H(T'_1, \ldots, T'_k)$ ou $T' = H^*(T'_1, \ldots, T'_k)$, où pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, T'_i est un tournoi sur I_i. Quitte à échanger T' et son dual, on peut supposer que $T' = H(T'_1, \ldots, T'_k)$. Il s'ensuit que nous pouvons conclure immédiatement par l'isomorphie entre T et T' dès que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, T_i et T'_i sont isomorphes. Par exemple, du fait de la $\{3\}$-demi-isomorphie, ceci est le cas lorsque $|I_i| \leqslant 3$ pour $i = 1, \ldots, k$. Le lemme suivant, qui généralise le Lemme 3.2 de [1], permet de poursuivre dans la même perspective.

LEMME 1. – *Soit un tournoi $U = (\{1, \ldots, p\}, A)$ et soit f un isomorphisme de U sur un tournoi $V = (\{1, \ldots, p\}, B)$. Etant donné $i \in \{1, \ldots, p\}$, considérons la somme lexicographique $U(U_1, \ldots, U_p)$ (resp. $V(V_1, \ldots, V_p)$), où pour $j \in \{1, \ldots, p\} - \{i\}$ (resp. $j \in \{1, \ldots, p\} - \{f(i)\}$), U_j (resp. V_j) a un seul sommet.*

(i) *$U(U_1, \ldots, U_p)$ et $V(V_1, \ldots, V_p)$ sont isomorphes si et seulement si U_i et $V_{f(i)}$ sont isomorphes.*

(ii) *Si U_i n'est pas autodual, si $V_{f(i)}$ est isomorphe à $(U_i)^*$ et si $|\{j \in \{1, \ldots, p\} \mid (i, j) \in A\}| \neq |\{j \in \{1, \ldots, p\} \mid (j, i) \in A\}|$, alors $[U(U_1, \ldots, U_p)]^*$ et $V(V_1, \ldots, V_p)$ ne sont pas isomorphes.*

De ce lemme découle le résultat suivant, où N désigne l'ensemble des $j \in \{1, \ldots, k\}$ tels que $|I_j| \geqslant 2$.

LEMME 2. – *Supposons que $|N| \geqslant 3$ ou que $|N| = 2$ et pour tout $j \in N$, $|I_j| \geqslant 3$.*

To cite this article: M. Bouaziz, Y. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 105–110

(i) *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, T_i *et* T_i' *sont demi-isomorphes.*
(ii) *Si* k *est pair, alors pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, T_i *et* T_i' *sont isomorphes.*

La preuve de la proposition suivante est longue et technique, elle utilise en outre le Lemme 1, d'anciens résultats sur la reconstruction des tournois [8], les propriétés basiques des tournois indécomposables [4] et la caractérisation des tournois critiques [10]. Cette proposition permet d'énumérer les cas où on ne peut pas conclure comme précédemment, c'est à dire, les cas où il existe $i \in \{1, \ldots, k\}$ tel que T_i et T_i' ne sont pas isomorphes.

PROPOSITION 3. – *Il existe* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *tel que* T_i *et* T_i' *ne sont pas isomorphes lorsque l'une des deux assertions suivantes est satisfaite.*
(i) $k = 3$, $N = \{i\}$. *De plus,* T_i *n'est pas autodual et est isomorphe à* $(T_i')^*$;
(ii) k *et* $|N|$ *sont impairs,* $|N| \geqslant 3$ *et il existe un tournoi non autodual* U *vérifiant* :
- *pour tout* $i \in N$, T_i (*resp.* T_i') *est isomorphe à* U (*resp.* U^*) ;
- *tous les sous-tournois de* U, *obtenus en enlevant un sommet à* U, *sont isomorphes.*

Dans les cas (i) et (ii), on vérifie que T^* et T' sont isomorphes.

4. Preuve du Théorème 2

Considérons un tournoi fortement connexe $T = (S, A)$ avec $|S| = n \geqslant 10$. Comme dans le paragraphe précédent, T se décompose en une somme lexicographique $H(T_1, \ldots, T_k)$. Pour tout tournoi T', $\{n-3\}$-demi-isomorphe à T, on peut encore supposer que $T' = H(T_1', \ldots, T_k')$. Comme pour tout $x \in S$, $T(S - \{x\})$ et $T'(S - \{x\})$ sont $\{3, n-2\}$-demi-isomorphes, les résultats précédents peuvent être utilisés dès que $T(S - \{x\})$ est fortement connexe. Par exemple, étant donné $j \in N = \{l \in \{1, \ldots, k\} \mid |I_l| \geqslant 2\}$, pour tout $x \in I_j$, $T(S - \{x\})$ est fortement connexe et se décompose en $H(T_1, \ldots, T_{j-1}, T_j(I_j - \{x\}), T_{j+1}, \ldots, T_k)$. En utilisant alors la Proposition 3, on obtient le résultat suivant dont découle le Théorème 2.

PROPOSITION 4. – *Pour tout* $i \in \{1, \ldots, k\}$, T_i *et* T_i' *sont isomorphes lorsque l'une des assertions suivantes est satisfaite.*
(i) $k \geqslant 5$;
(ii) $k = 3$ *et* $N = \{1, 2, 3\}$;
(iii) $k = 3$, $|N| = 2$ *et pour tout* $j \in N$, $|I_j| \geqslant 3$.

Remarque 5. – Les Propositions 3 et 4 permettent de retrouver la $\{n - d\}$-demi-reconstruction des tournois fortement connexes ayant $n \geqslant d + 7$ sommets, pour tout entier $d \geqslant 4$.

Remerciements. Nous adressons nos vifs remerciements au rapporteur pour les améliorations qu'il a apportées à la rédaction de cette Note.

Références bibliographiques

[1] Y. Boudabbous, J. Dammak, Sur la (-k)-demi-reconstructibilité des tournois finis, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 326 (1998) 1037–1040.
[2] Y. Boudabbous, G. Lopez, La relation différence et l'anti-isomorphie, Math. Log. Quart. 41 (1995) 268–280.
[3] A. Boussairi, P. Ille, G. Lopez, S. Thomassé, Hypomorphie et inversion locale entre graphes, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 317 (1993) 125–128.
[4] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.
[5] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Sympos. Math. 5 (1970) 203–251.
[6] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25–66.
[7] J.G. Hagendorf, G. Lopez, La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 317 (1993) 7–12.
[8] F. Harary, E. Palmer, On the problem of reconstructing a tournament from subtournaments, Monatsch. Math. 71 (1967) 14–23.

[9] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Z. 150 (1976) 117–134.
[10] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1994) 191–205.
[11] S.M. Ulam, A Collection of Mathematical Problems, Interscience, New York, 1960.