C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 47–52

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Weak convexity does not imply convexity for curves in $\mathbb{R}P^n$, $n > 2$

Ricardo Uribe-Vargas

Université Paris 7, Équipe géométrie et dynamique, UFR de Math., case 7012, 2, place Jussieu, 75005 Paris, France

Received 23 April 2002; accepted 3 May 2002

Note presented by Vladimir Arnol'd.

Abstract A smooth closed curve in $\mathbb{R}P^n$ is called *convex* if any hyperplane intersects it in at most n points, taking multiplicities into account. *A convex curve has no flattening and its osculating hyperplane intersects it only at the point of osculation. A closed curve in* $\mathbb{R}P^2$ *(in* $\mathbb{R}^2$*) is convex if and only if it has these two properties*. Answering a question of V.I. Arnol'd ([2,3] and [4]), we show that, *for $n > 2$, these two properties do not imply the convexity of closed curves in* $\mathbb{R}P^n$. ***To cite this article: R. Uribe-Vargas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 47–52.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

La convexité faible n'implique pas la convexité des courbes dans $\mathbb{R}P^n$, $n > 2$

Résumé Une courbe lisse fermée dans $\mathbb{R}P^n$ est appelée *convexe* si chaque hyperplan l'intersecte en au plus n points, compte tenu des multiplicités. *Une courbe convexe n'a pas d'aplatissement et son hyperplan osculateur ne l'intersecte qu'au point d'osculation. Une courbe fermée dans* $\mathbb{R}P^2$ *est convexe si et seulement si elle a ces deux propriétés*. En réponse à une question de V.I. Arnol'd ([2,3] et [4]), nous montrons que *pour $n > 2$, ces deux propriétés n'impliquent pas la convexité des courbes fermées dans* $\mathbb{R}P^n$. ***Pour citer cet article : R. Uribe-Vargas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 47–52.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Version française abrégée

1. Introduction

Nous rappelons qu'une courbe lisse fermée dans $\mathbb{R}P^n$ est appelée *convexe* si chaque hyperplan l'intersecte en au plus n points, compte tenu des multiplicités.

La théorie des courbes convexes est reliée à plusieurs sujets en mathématiques. Les courbes convexes apparaissent dans la théorie des singularités, en géométrie projective, géométrie différentielle et dans la théorie des systèmes de fonctions de Chebishev (*voir* [1]).

E-mail address: uribe@math.jussieu.fr (R. Uribe-Vargas).
Url: http://www.math.jussieu.fr/~uribe/.

S1631-073X(02)02435-4/FLA

En particulier, la théorie des courbes convexes est profondement liée à la théorie des systèmes de fonctions de Chebishev :

Un ensemble de fonctions $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2k+1}\}$ avec $\varphi_i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est un *système de Chebishev* si toute combinaison linéaire $a_1\varphi_1 + \cdots + a_{2k+1}\varphi_{2k+1}$, $a_i \in \mathbb{R}$, avec $a_1^2 + \cdots + a_{2k+1}^2 \neq 0$ a au plus $2k$ zéros sur $\mathbb{S}^1$.

Exemple 1. – Le système de fonctions $\{1, \cos\theta, \sin\theta\}$ est un système de Chebishev.

Remarque 1. – Toute courbe convexe fermée $\theta \mapsto (\varphi_1(\theta), \ldots, \varphi_{2k}(\theta))$ dans $\mathbb{R}^{2k}$ définit un système de Chebishev : $\{1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2k}\}$.

En fait, la théorie des courbes convexes dans les espaces projectifs coïncide avec la théorie des systèmes de Chebishev des sections des fibrés en lignes sur un cercle [2].

Il est intéressant d'étudier les coïncidences et les différences entre l'espace des courbes faiblement convexes (défini dessous) et l'espace des courbes convexes (*voir* aussi [1]).

Un *hyperplan osculateur* en un point d'une courbe de $\mathbb{R}P^n$ est un hyperplan dont la multiplicité d'intersection avec la courbe en ce point est au moins n (pour les courbes génériques, l'hyperplan osculateur est unique en chaque point de la courbe).

Un *aplatissement* d'une courbe de $\mathbb{R}P^n$ est un point pour lequel la multiplicité d'intersection avec son unique hyperplan osculateur est au moins $n+1$, tandis qu'aux points ordinaires elle est n.

Exemple 2. – Les aplatissements d'une courbe plane sont ses inflexions. Les aplatissements d'une courbe de $\mathbb{R}^3$, sans points de courbure nulle, sont les points où la torsion s'annule.

Les définitions précédentes impliquent qu'*une courbe convexe n'a pas d'aplatissements et que son hyperplan osculateur ne l'intersecte qu'au point d'osculation*.

Une courbe fermée dans $\mathbb{R}P^2$ est convexe si et seulement si elle a ces deux propriétés. Dans [2,3] et [4], V.I. Arnol'd a posé le problème de savoir si, pour $n > 2$, ces deux propriétés impliquent la convexité pour les courbes fermées dans $\mathbb{R}P^n$. Dans cette Note, nous prouvons que, *pour $n > 2$, la réponse à la question d'Arnol'd est négative*.

2. Définitions et résultats

Nous disons qu'une courbe fermée dans $\mathbb{R}P^n$ est *faiblement convexe* si elle n'a pas d'aplatissements et que son hyperplan osculateur ne l'intersecte qu'au point d'osculation.

S.S. Anisov (dans [1] et dans sa thèse) a donné un exemple d'une courbe non convexe mais faiblement convexe dans $\mathbb{R}P^3$. Ici, pour chaque $n > 2$, nous donnons des exemples de courbes non convexes dans $\mathbb{R}P^n$ qui sont faiblement convexes.

THÉORÈME 1. – *La courbe dans $\mathbb{R}P^{2k}$, avec $k \geqslant 2$, donnée en coordonnées affines par*

$$\gamma : \theta \mapsto \bigl(\cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \ldots, \cos(k-1)\theta, \sin(k-1)\theta, \cos(k+1)\theta, \sin(k+1)\theta\bigr),$$

est faiblement convexe mais pas convexe.

THÉORÈME 2. – *La courbe dans $\mathbb{R}P^{2k-1}$, avec $k \geqslant 2$, donnée en coordonnées homogènes par*

$$\gamma : \theta \mapsto \bigl[\cos\theta : \sin\theta : \cos 3\theta : \ldots : \cos(2k-3)\theta : \sin(2k-3)\theta : \cos(2k+1)\theta : \sin(2k+1)\theta\bigr],$$

est faiblement convexe mais pas convexe.

Remarque 2. – La courbe du Théorème 2 peut être considérée comme une courbe sur la sphère $\mathbb{S}^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$, où les points $\gamma(\theta)$ et $\gamma(\theta+\pi) = -\gamma(\theta)$ sont identifiés.

DÉFINITION 1. – Une *hypersphère osculatrice* en un point d'une courbe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une hypersphère dont la multiplicité d'intersection avec la courbe en ce point est au moins $n+1$.

DÉFINITION 2. – Un *sommet* d'une courbe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est un point pour lequel la multiplicité d'intersection de la courbe avec son hypersphère osculatrice en ce point est au moins $n+2$.

Exemple 3. – Une ellipse non circulaire dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ a 4 sommets. Ce sont les points d'intersection de l'ellipse avec ses axes principaux.

THÉORÈME ([5,7]). – *Une courbe convexe fermée de l'espace euclidien* $\mathbb{R}^{2k}$ *a au moins* $2k+2$ *sommets* (*comptés géométriquement*).

En plus des courbes du Théorème 1 et du Théorème 2, nous avons construit beaucoup d'autres exemples de courbes non convexes mais faiblement convexes. En particulier, pour l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2k}$, nous avons calculé le nombre de sommets pour beaucoup d'exemples dans lesquels la convexité est « légèrement brisée » : des courbes faiblement convexes dans $\mathbb{R}^{2k}$ qui intersectent chaque hyperplan en au plus $2k+2$ points et intersectent au moins un hyperplan en exactement $2k+2$ points.

Dans tous les exemples de ce type de courbes faiblement convexes dans $\mathbb{R}^{2k}$, nous avons obtenu que le nombre des sommets a été toujours supérieur ou égal à $\sqrt{2k+2}$. De plus, pour chaque $k>2$, nous avons construit des courbes faiblement convexes du type décrit ci-dessus telles que le nombre des sommets de chaque courbe est le plus petit nombre pair supérieur ou égal à $\sqrt{2k+2}$. Cette information nous conduit à formuler la conjecture suivante :

CONJECTURE. – *Soit* γ *une courbe générique faiblement convexe dans* $\mathbb{R}^{2k}$ *qui intersecte chaque hyperplan en au plus* $2k+2$ *points et intersecte au moins un hyperplan en exactement* $2k+2$ *points. Alors* γ *a un nombre pair de sommets supérieur ou égal à* $\sqrt{2k+2}$.

Exemple 4. – La courbe $\gamma:\theta\mapsto(a_1\cos\theta, b_1\sin\theta, a_2\cos 3\theta, b_2\sin 3\theta)$ de $\mathbb{R}^4$ a 4 sommets pour a_2 et b_2 suffisamment petits.

THÉORÈME DE SEDYKH ([6]). – *Une courbe fermée* C^3*-lisse sans points de courbure nulle dans* $\mathbb{R}^3$ *qui est sur le bord de son enveloppe convexe a au moins* 4 *aplatissements.*

Remarque 3. – Supposons $\mathbb{R}^4\subset\mathbb{R}^5$. Une inversion dans $\mathbb{R}^5$ centrée en un point extérieur à $\mathbb{R}^4$ envoie la courbe γ de l'Exemple 4 sur une courbe sphérique $\hat{\gamma}\subset\mathbb{R}^5$. La courbe $\hat{\gamma}$ est sur le bord de son enveloppe convexe et a seulement 4 aplatissements. Cet exemple montre que l'extension « naïve » du théorème de Sedykh pour les courbes fermées dans les espaces affines de dimensions supérieures n'est pas vraie.

Les démonstrations du Théorème 1 et du Théorème 2 sont données dans la version anglaise.

Remerciements. L'auteur remercie V.I. Arnol'd pour avoir posé le problème.

1. Introduction

We recall that a smooth closed curve in $\mathbb{R}P^n$ (in $\mathbb{R}^n$) is called *convex* if any hyperplane intersects it in at most n points, taking multiplicities into account.

The theory of convex curves is related with various fields of mathematics. Convex curves arise between singularity theory, projective geometry, differential geometry, and theory of Chebishev systems of functions (*see* [1]).

In particular the theory of convex curves is deeply related with the theory of Chebishev systems of functions:

A set of functions $\{\varphi_1,\dots,\varphi_{2k+1}\}$ with $\varphi_i:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}$ is a *Chebishev system* if any linear combination $a_1\varphi_1+\cdots+a_{2k+1}\varphi_{2k+1},\ a_i\in\mathbb{R}$, with $a_1^2+\cdots+a_{2k+1}^2\neq 0$ has at most $2k$ zeros on $\mathbb{S}^1$.

Example 1. – The system of functions $\{1, \cos\theta, \sin\theta\}$ is a Chebishev system.

Remark 1. – Any convex closed curve $\theta \mapsto (\varphi_1(\theta), \dots, \varphi_{2k}(\theta))$ in $\mathbb{R}^{2k}$ defines a Chebishev system: $\{1, \varphi_1, \dots, \varphi_{2k}\}$.

In fact, the theory of convex curves in projective spaces coincides with the theory of the Chebishev systems of sections of the line bundles over a circle [2].

It is interesting to study the coincidences and the differences between the space of weakly convex curves (defined below) and the space of convex curves (see also [1]).

DEFINITION 1. – An *osculating hyperplane* at a point of a curve in $\mathbb{R}P^n$ (in $\mathbb{R}^n$) is a hyperplane whose multiplicity of intersection with the curve at that point is at least n (for generic curves the osculating hyperplane is unique).

DEFINITION 2. – A *flattening* of a curve in $\mathbb{R}P^n$ (in $\mathbb{R}^n$) is a point at which the multiplicity of intersection with its osculating hyperplane is at least $n+1$, whereas at an ordinary point it is n.

Example 2. – The flattenings of a plane curve are their inflections. The flattenings of a curve in $\mathbb{R}^3$ with non-zero curvature are those at which the torsion vanishes.

The previous definitions imply that *a convex curve has no flattening and its osculating hyperplane intersects it only at the point of osculation*.

A curve in $\mathbb{R}P^2$ (in $\mathbb{R}^2$) is convex if and only if it has these two properties. In [2,3] and [4], Arnol'd put the problem to know whether these two properties imply convexity for dimensions greater than 2. In this Note, we prove that *for $n > 2$, the answer to Arnol'd's question is negative*.

2. Definitions and results

We say that a curve in $\mathbb{R}P^n$ (in $\mathbb{R}^n$) is *weakly convex* if it has no flattening and its osculating hyperplane intersects it only at the point of osculation.

In [1] and in his Ph.D. thesis S.S. Anisov gave an example of a nonconvex but weakly convex curve in $\mathbb{R}P^3$. Here, for each $n > 2$, we give examples of curves in $\mathbb{R}P^n$ (in $\mathbb{R}^n$ for n even) which are weakly convex but are not convex.

Remark 2. – Any weakly convex curve in $\mathbb{R}P^n$ is affine for even n, i.e. there exists a hyperplane of $\mathbb{R}P^n$ not intersecting the curve. For odd n any weakly convex curve in $\mathbb{R}P^n$ is not contractible, i.e. it intersects any hyperplane in an odd number of points, counting multiplicities.

THEOREM 1. – *The curve in $\mathbb{R}P^{2k}$, with $k \geqslant 2$, given in affine coordinates by*

$$\gamma : \theta \mapsto \bigl(\cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots, \cos(k-1)\theta, \sin(k-1)\theta, \cos(k+1)\theta, \sin(k+1)\theta\bigr),$$

is weakly convex but not convex.

THEOREM 2. – *The curve γ in $\mathbb{R}P^{2k-1}$, $k \geqslant 2$, given in homogeneous coordinates by*

$$\gamma : \theta \mapsto \bigl[\cos\theta : \sin\theta : \cos 3\theta : \dots : \cos(2k-3)\theta : \sin(2k-3)\theta : \cos(2k+1)\theta : \sin(2k+1)\theta\bigr],$$

is weakly convex but not convex.

Remark 3. – The curve in Theorem 2 can be considered as a curve on the sphere $\mathbb{S}^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$, where the points $\gamma(\theta)$ and $\gamma(\theta+\pi) = -\gamma(\theta)$ are identified.

DEFINITION 3. – An *osculating hypersphere* at a point of a curve in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is a hypersphere having multiplicity of intersection with the curve at that point at least $n+1$.

DEFINITION 4. – A *vertex* of a curve in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is a point at which the multiplicity of intersection of the curve with its osculating hypersphere at that point is at least $n+2$.

Example 3. – A non-circular ellipse in the plane $\mathbb{R}^2$ has 4 vertices. They are the points at which the ellipse intersects its principal axes.

THEOREM ([5,7]). – *A closed convex curve in the Euclidean space* $\mathbb{R}^{2k}$ *has at least* $2k+2$ *vertices* (*counted geometrically*).

Besides the curves of Theorems 1 and 2, we constructed many other examples of weakly convex curves which are not convex. In particular, for the Euclidean space $\mathbb{R}^{2k}$ we calculate the number of vertices for many examples in which the convexity is "slightly broken": weakly convex curves in $\mathbb{R}^{2k}$ which intersect any hyperplane in at most $2k+2$ points and intersect at least one hyperplane in exactly $2k+2$ points.

In all examples of this kind of weakly convex curves in $\mathbb{R}^{2k}$ we obtained that the number of vertices was always greater than or equal to $\sqrt{2k+2}$. Moreover we constructed weakly convex curves of this kind in $\mathbb{R}^{2k}$ for which the number of vertices is the smallest even number greater than or equal to $\sqrt{2k+2}$. From this information we formulate the following

CONJECTURE. – *Let* γ *be a weakly convex curve in* $\mathbb{R}^{2k}$ *which intersect any hyperplane in at most* $2k+2$ *points and intersect at least one hyperplane in exactly* $2k+2$ *points. Then* γ *has an even number of vertices greater than or equal to* $\sqrt{2k+2}$.

Example 4. – The curve $\gamma:\theta\mapsto(a_1\cos\theta, b_1\sin\theta, a_2\cos 3\theta, b_2\sin 3\theta)$ in $\mathbb{R}^4$ has 4 vertices for a_2 and b_2 small enough.

SEDYKH'S THEOREM. – *A closed* C^3*-smooth curve with nonvanishing curvature in* $\mathbb{R}^3$ *lying on the boundary of its convex hull has at least four flattenings.*

Remark 4. – Suppose $\mathbb{R}^4\subset\mathbb{R}^5$. An inversion in $\mathbb{R}^5$ centered at a point exterior to $\mathbb{R}^4$ sends the curve γ of Example 4 into a spherical curve $\hat{\gamma}\subset\mathbb{R}^5$. The curve $\hat{\gamma}$ lies on the boundary of its convex hull and has only 4 flattenings. This example shows that the 'naive' extension of Sedykh's Theorem for closed curves in higher dimensional affine spaces does not hold.

3. Proof of Theorem 1

The proof consists of various simple steps:

0 – Consider the standard coordinates $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ in $\mathbb{R}^{2k}$. The curve of Theorem 1 is not convex because it intersects the hyperplane $x_{2k}=0$ at the $2k+2$ points which correspond to the solutions of the equation $\sin(k+1)\theta=0$.

1 – Observe that all curvatures of the curve in Theorem 1 (regarded as a curve in the Euclidean space $\mathbb{R}^{2k}$) are constant. Observe also that for each pair of points $\gamma(\theta_0)$, $\gamma(\theta_1)$ of the curve there is an orthogonal transformation of $\mathbb{R}^{2k}$ preserving the curve and sending the point $\gamma(\theta_0)$ in the point $\gamma(\theta_1)$. This orthogonal transformation is obtained by a rotation of an angle $(\theta_1-\theta_0)\cdot j$ on the 2-plane of coordinates x_{2j-1}, x_{2j} for $j<k$ and an angle $(\theta_1-\theta_0)\cdot(k+1)$ in the 2-plane of coordinates x_{2k-1}, x_{2k}. Thus it suffices to calculate the osculating hyperplane for $\theta=0$ and to show that this hyperplane does not meet the curve elsewhere.

2 – The equation of osculating hyperplane at $\theta=0$ involves only odd index variables: It is of the form $a_1x_1+a_3x_3+\cdots+a_{2k-1}x_{2k-1}+b=0$.

3 – Substitute the odd components of the curve in the preceding equation to find the points at which the curve intersects the osculating hyperplane. This gives $a_1\cos\theta+a_3\cos 2\theta+\cdots+a_{2k-1}\cos(k+1)\theta+b=0$.

4 – Make the change of variables $\theta=2\varphi$ and introduce the following notation: $C=\cos\varphi$, $S=\sin\varphi$ and $C_k=\cos k\varphi$ and $S_k=\sin k\varphi$ for $k\geqslant 2$. The equation of step 3 becomes $a_1C_2+a_3C_4+\cdots+a_{2k-1}C_{2(k+1)}+b=0$.

5 – Use the following identities (which can be proved by induction):

$C_{2k} = 1 - 2S_k^2$ and $S_n^2 = n^2 S^2 + \cdots + 2n(-4)^{n-1}S^{2(n-1)} + (-4)^{n-1}S^{2n}$, for $n \geqslant 2$.
Equation of step 4 becomes an equation of degree $2k+2$ in S.

6 – The osculating hyperplane at $2\varphi = \theta = 0$ intersects the curve with multiplicity $2k$. Thus the equation is of the form $b_1 S^{2k}(b_2 + b_3 S^2)$, where b_1, b_2 and b_3 are constants. We only need to know the constants b_2 and b_3.

7 – Observe that the terms S^{2k} and S^{2k+2} may only come from the term S_{k+1}^2. Thus the equation to solve is $2(k+1)(-4)^{k-1}S^{2k} + (-4)^k S^{2(k+1)} = 0$, which is equivalent to $2(-4)^{k-1}S^{2k}(k+1-2S^2) = 0$. This equation has a root of multiplicity $2k$ at $S = 0$, which corresponds to the intersection of the osculating hyperplane with the curve at $2\varphi = \theta = 0$. The equation $k+1-2S^2 = 0$ has no real solution for $k \geqslant 2$ because $S^2 = \sin^2\varphi \leqslant 1$. This proves Theorem 1.

4. Proof of Theorem 2

The proof of Theorem 2 is similar to the proof of Theorem 1; let us just point out the differences. The parametrization γ given in Theorem 2 is in $\mathbb{R}^{2k} \setminus \{0\}$ where the points belonging to a straight line through the origin of $\mathbb{R}^{2k}$ are identified. In particular the points $\gamma(\theta)$ and $\gamma(\theta + (2m+1)\pi) = -\gamma(\theta)$, $m \in \mathbb{Z}$, are identified. The osculating hyperplane of the curve is determined by γ and its first $2k-2$ derivatives.

1 – Use the fact the parametrization also gives a curve in the Euclidean space $\mathbb{R}^{2k}$ having all curvatures constant. Thus it suffices to calculate the osculating hyperplane for $\theta = 0$ and to show that this hyperplane does not meet the curve elsewhere.

2 – Consider the standard coordinates $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k})$ in $\mathbb{R}^{2k}$. The equation of the osculating hyperplane at $\theta = 0$ involves only even variables: It is of the form $a_2x_2 + a_4x_4 + \cdots + a_{2k}x_{2k} = 0$.

3 – Introduce the notation: $C = \cos\theta$, $S = \sin\theta$ and $C_k = \cos k\theta$ and $S_k = \sin k\theta$, for $k \geqslant 2$. Substitute the even components of the curve in the preceding equation to find the points at which the curve intersects the osculating hyperplane. This gives: $a_2 S + a_4 S_3 + \cdots + a_{2k}S_{2k+1} = 0$.

4 – Use the identity $S_{2k+1} = (2k+1)S + \cdots + (-4)^{k-1}(2k+1)S^{2k-1} + (-4)^k S^{2k+1}$ to obtain an equation of degree $2k+1$ in S.

The arguments of steps 6 and 7 of the proof of Theorem 1 can be applied here and lead to the equation $2k+1-4S^2 = 0$. This equation has no real solution for $k \geqslant 2$ because $S^2 = \sin^2\theta \leqslant 1$. This proves Theorem 2.

Acknowledgements. The author express his gratitude to V.I. Arnol'd for setting up the problem.

References

[1] S.S. Anisov, Convex curves in $\mathbb{R}P^n$, Proc. Steklov Math. Inst. 221 (1998) 3–39.
[2] V.I. Arnol'd, On the number of flattening points of space curves, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 171 (1995) 11–22.
[3] V.I. Arnol'd, Topological problems of the theory of wave propagation, Russian Math. Surveys 51 (1) (1996) 1–47.
[4] V.I. Arnol'd, Problem 1994–15, in: Arnol'd's Problems Book, Phasis, 1999 (in Russian). English edition to appear.
[5] M. Barner, Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegeebenen bei geschlossenen Streng-Konvexen Raumkurven, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1956) 196–215.
[6] V.D. Sedykh, The theorem about four vertices of a convex space curve, Funct. Anal. Appl. 26 (1) (1992) 28–32.
[7] R. Uribe-Vargas, On the higher dimensional four-vertex theorem, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 321 (1995) 1353–1358.