C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 65–68

Probabilités/*Probability Theory*
(Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*)

Extension du théorème de Cameron–Martin aux translations aléatoires

Xavier Fernique

Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg cédex, France

Reçu le 5 mars 2002 ; accepté après révision le 29 avril 2002

Note présentée par Marc Yor.

Résumé Soit γ une probabilité gaussienne (centrée) sur un espace de Fréchet séparable et localement convexe E ; soit $(H, \|\cdot\|)$ l'espace auto-reproduisant associé. On montre que si une probabilité μ sur E est absolument continue relativement à γ, alors il existe un vecteur aléatoire G de loi γ et un vecteur aléatoire Z à valeurs dans H tel que $G+Z$ ait la loi μ ; on utilise pour cela les inégalités isopérimétriques gaussiennes. On montre ensuite que dans certaines situations une telle condition, nécessaire pour l'absolue continuité, est aussi suffisante ; on utilise pour cela le théorème classique de Cameron–Martin et les propriétés d'invariance des probabilités gaussiennes par rotation. ***Pour citer cet article : X. Fernique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 65–68.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Extension of the Cameron–Martin theorem to random translations

Abstract Let G be a Gaussian vector taking its values in a locally convex separable Fréchet space E. We denote by γ its law and by $(H, \|\cdot\|)$ its reproducing Hilbert space. Let moreover X be an E-valued random vector of law μ. We prove that if μ is absolutely continuous relatively to γ, then there exist necessarly a Gaussian vector G' of the law γ and an H-valued random vector Z such that $G'+Z$ has the law μ of X. This fact is a direct consequence of isoperimetric properties of Gaussian vector. We show that in many situations, such condition is sufficient for μ being absolutely continuous relatively to γ, using classical Cameron–Martin theorem and invariance properties of Gaussian measures. ***To cite this article: X. Fernique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 65–68.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction, énoncés

On note G un vecteur gaussien (centré) à valeurs dans un espace de Fréchet séparable et localement convexe E ; on note γ la loi de G et $(H, \|\cdot\|)$ l'espace auto-reproduisant associé à G ; on note X un vecteur aléatoire à valeurs dans E et μ sa loi. On se propose d'analyser la continuité absolue de μ relativement à γ. Ce type de propriété lié aux transformations de mesure dans l'espace de Wiener intervient dans de nombreuses situations (cf. [4]). Le théorème classique de Cameron–Martin ([1], 2.6) caractérise le cas où μ est de la forme $\mu = \tau_a\gamma$ où a est un élément (non aléatoire) de E ; on sait alors que μ est absolument

Adresse e-mail : fernique@math.u-strasbg.fr (X. Fernique).

S1631-073X(02)02434-2/FLA

continue relativement à γ si et seulement si a est un élément de H. C'est ce théorème qu'on étend autant que possible.

1.1. Une condition nécessaire d'absolue continuité

Le premier énoncé est relativement surprenant ; on peut pourtant noter dans ([4], 2.7.1) un résultat approché concernant une situation voisine.

THÉORÈME 1. – *Soient G un vecteur Gaussien de loi γ et X un vecteur aléatoire de loi $\mu = D.\gamma$ absolument continue par rapport à γ. Il existe alors deux vecteurs aléatoires G' de même loi que G et Z à valeurs dans l'espace autoreproduisant H de G tels que $X' = G' + Z$ ait même loi μ que X et que*

$$\forall t, T > 0, \quad \mathbf{P}\big\{\|Z\| > t\big\} \leqslant 6\frac{T}{t} + \int_{D>T} D\,\mathrm{d}\gamma.$$

1.2. Une condition suffisante d'absolue continuité

Dans le second théorème, on énonce une propriété réciproque partielle :

THÉORÈME 2. – *Soient G et X deux vecteurs aléatoires à valeurs dans un espace de Fréchet localement convexe séparable E ; on note γ la loi de G. On suppose que G est gaussien et que X est de la forme $G + Y$ où Y est indépendant de G et que X a même loi que $G + Z$ où Z est à valeurs dans l'espace autoreproduisant H de G. Dans ces conditions, pour tout $\lambda \in [0, 1[$, la loi μ_λ de $X_\lambda = G + \lambda Y$ est absolument continue relativement à la loi γ de G et vérifie* :

$$\forall p > 1,\ \forall t > 0,\ \forall A \in \mathcal{B}(E), \quad \mu_\lambda(A) \leqslant \mathbf{P}\big\{\|Z\| > t\big\} + \exp\left[\frac{(p-1)\lambda^2 t^2}{2(1-\lambda^2)}\right] \times \big[\gamma(A)\big]^{1-1/p}.$$

Remarques. –

(a) L'indépendance de G et de Y élimine des situations singulières triviales.

(b) On aurait préféré énoncer une propriété d'absolue continuité pour la loi μ de X. On doit noter que dans la situation du théorème classique, l'absolue continuité de μ_λ pour une valeur non nulle de λ implique l'absolue continuité pour toute autre valeur de λ. La situation plus générale peut être différente.

1.3. Un exemple, une question

L'exemple suivant illustre les différentes structures utilisées par les deux théorèmes :

Sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note G un vecteur gaussien de loi $\gamma = \gamma_\infty = N(0, I)$; l'espace auto-reproduisant est $H = \ell_2$. On note Y un vecteur aléatoire indépendant de G à composantes indépendantes de lois respectives définies par

$$\mathbf{P}\{y_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \qquad \mathbf{P}\big\{y_n = \sqrt{2\log n}\big\} = \frac{1}{n}.$$

Pour tout $\lambda > 0$, on note μ_λ la loi de $X_\lambda = G + \lambda Y$.

Dans cet exemple, pour tout $\lambda \geqslant 1$, μ_λ est étrangère à γ ; par contre, μ_λ est équivalente à γ pour $\lambda \in [0, 1[$.

Cet exemple fournit donc en appliquant les théorèmes ci-dessus, une situation où $Y/2$ (par exemple) est indépendant de G, où $G + Y/2$ a une loi équivalente à celle de G, où il existe un vecteur G' de même loi que G et un vecteur Z à valeurs dans ℓ_2 tels que $G' + Z$ ait même loi que $G + Y/2$.

On ne peut pas confondre ici $Y/2$ et Z, car le couple $(G, Y/2)$ est indépendant alors que (G', Z) ne l'est pas et que Z est à valeurs dans ℓ_2 alors que $Y/2$ ne l'est pas (il n'est même pas dans ℓ_∞).

Le cas $\lambda = 1$ pose question : existe-t-il un vecteur G' de même loi que G et un vecteur Z à valeurs dans ℓ_2 tels que $G' + Z$ ait même loi que $G + Y$?

Pour citer cet article : X. Fernique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 65–68

2. Preuves

2.1. Théorème 1, éléments de preuve

Dans une première étape, on suppose que G et donc X prennent leurs valeurs dans l'espace autoreproduisant H qui est alors de dimension finie ; on suppose aussi que $D = \mathrm{d}\mu/\mathrm{d}\gamma$ est majorée par un nombre A. On note d_H la distance hilbertienne dans H, on note $\mathrm{Lip}(H)_1$ l'ensemble des fonctions sur H qui sont d_H-Lipschitziennes de norme de Lipschitz majorée par 1. Pour tout $f \in \mathrm{Lip}(H)_1$ et pour tout $t > 0$, les propriétés isopérimétriques des vecteurs aléatoires gaussiens ([2], 1.1) impliquent que

$$\gamma\bigl\{\bigl|f - \mathbf{E}f(G)\bigr| > t\bigr\} = \mathbf{P}\bigl\{\bigl|f(G) - \mathbf{E}f(G)\bigr| > t\bigr\} \leqslant \exp\bigl[-t^2/2\bigr];$$

les hypothèses sur X impliquent alors

$$\mathbf{P}\bigl\{\bigl|f(X) - \mathbf{E}f(G)\bigr| > t\bigr\} = \mu\bigl\{\bigl|f - \mathbf{E}f(G)\bigr| > t\bigr\} \leqslant A\exp\bigl[-t^2/2\bigr].$$

En intégrant en t, ceci fournit pour tout $f \in \mathrm{Lip}(H)_1$:

$$\bigl|\mathbf{E}f(X) - \mathbf{E}f(G)\bigr| \leqslant \mathbf{E}\bigl|f(X) - \mathbf{E}f(G)\bigr| \leqslant A\sqrt{\pi/2}.$$

Le théorème de Kantorovich–Rubinstein [3] indique alors que dans cette situation particulière, on peut construire effectivement deux vecteurs aléatoires G' de même loi que G et Z à valeurs dans l'espace autoreproduisant H de G tels que $G' + Z$ ait même loi que X et que

$$\mathbf{E}\|Z\| \leqslant A\sqrt{\pi/2}.$$

Ceci termine l'étape fondamentale de la preuve. Dans la seconde étape, on utilise un développement de Karhunen–Loeve de G et donc de X pour conclure sans l'hypothèse supplémentaire sur H. Finalement, pour supprimer l'hypothèse sur la densité D, on procède par recollements de densités bornées.

2.2. Théorème 2, éléments de preuve

Pour tout nombre $\lambda \in [0, 1]$ et toute fonction f mesurable et bornée sur E, on note $M_\lambda f$ la fonction définie sur E par

$$\forall z \in E, \quad M_\lambda f(z) = \int f\bigl[\lambda(G + z) + \sqrt{1 - \lambda^2}g'\bigr]\,\mathrm{d}\gamma(g'). \tag{2.1}$$

Les outils techniques pour la preuve sont fournis par le lemme

LEMME 1. –

(a) *On suppose que z appartient à l'espace autoreproduisant H de G ; dans ces conditions et pour tout $p > 1$, on a :*

$$\bigl|M_\lambda f(z)\bigr| \leqslant \left[\int \bigl[f\bigl(\lambda G + \sqrt{1 - \lambda^2}g'\bigr)\bigr]^q\,\mathrm{d}\gamma(g')\right]^{1/q} \exp\left[\frac{(p-1)\lambda^2\|z\|^2}{2(1-\lambda^2)}\right], \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{2.2}$$

(b) *Soit de plus Z un vecteur aléatoire à valeurs dans H ; pour tout $p > 1$ et tout $T > 0$, on a :*

$$\mathbf{E}\bigl\{1 \wedge \bigl|M_\lambda f(Z)\bigr|\bigr\} \leqslant \mathbf{P}\bigl\{\|Z\| > T\bigr\} + \exp\left[\frac{(p-1)\lambda^2T^2}{2(1-\lambda^2)}\right]\bigl[\mathbf{E}\bigl|f(G)\bigr|^q\bigr]^{1/q}. \tag{2.3}$$

(c) *Soit Y un vecteur aléatoire à valeurs dans E indépendant de G. On suppose que $G + Y$ a même loi que $G + Z$; dans ces conditions et pour tout $\lambda \in]0, 1[$, $M_\lambda f(Y)$ a même loi que $M_\lambda f(Z)$.*
De plus pour toute fonction f mesurable et bornée sur E, on a :

$$\mathbf{E}f(G + \lambda Y) = \mathbf{E}M_\lambda f(Y). \tag{2.4}$$

Preuve partielle. – Pour prouver (a), on utilise le théorème de Cameron–Martin classique ([1], Théorème 2.6.1) :

Fixons λ, G et posons

$$\forall g' \in E, \quad F(g') = f\big(\lambda G + \sqrt{1-\lambda^2}\, g'\big)\,; \qquad \forall z \in H, \quad z' = \frac{\lambda z}{\sqrt{1-\lambda^2}}\,; \tag{2.5}$$

Alors $M_\lambda f(z)$ est égal à $\int F(g')\,\mathrm{d}(\tau_{z'}\gamma)(g')$ et le théorème de Cameron–Martin implique :

$$M_\lambda f(z) = \int F(g') \exp\left[(\theta z')(g') - \frac{\|z'\|^2}{2}\right] \mathrm{d}\gamma(g'). \tag{2.6}$$

À cette dernière intégrale, on applique une (q, p)-inégalité de Hölder qui fournit

$$\big|M_\lambda f(z)\big| \leqslant \left[\int \big|f(\lambda G + \sqrt{1-\lambda^2} g')\big|^q \,\mathrm{d}\gamma(g')\right]^{1/q} \left[\int \exp\left[p\left(\theta z' - \frac{\|z'\|^2}{2}\right)\right] \mathrm{d}\gamma\right]^{1/p}. \tag{2.7}$$

La dernière intégrale se calcule explicitement et fournit le résultat annoncé.

2.3. Argumentation du théorème

On fixe $\lambda \in]0, 1[$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$, on applique le lemme ci-dessus à $f = \mathbf{I}_A$. La propriété (2.4) fournit :

$$\mathbf{P}\{G + \lambda Y \in A\} = \int f\,\mathrm{d}\mu_\lambda = \mathbf{E} M\lambda f(Y)\,; \tag{2.8}$$

puisque f prend ses valeurs dans [0, 1], la Définition (2.1) de $M_\lambda f$ implique que :

$$1 \wedge \big|M_\lambda f(Y)\big| = M_\lambda f(Y). \tag{2.9}$$

On déduit donc de la propriété (2.3), en prenant par exemple $p = 2$:

$$\forall T > 0, \quad \mu_\lambda(A) \leqslant \mathbf{P}\big\{\|Z\| > T\big\} + \exp\left[\frac{\lambda^2 T^2}{2(1-\lambda^2)}\right] \big[\gamma(A)\big]^{1/2}. \tag{2.10}$$

Cette inégalité implique que si $A \in \mathcal{B}(E)$ est γ-négligeable, alors :

$$\mu_\lambda(A) \leqslant \lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\big\{\|Z\| > T\big\} = 0, \tag{2.11}$$

et donc l'absolue continuité de μ_λ relativement à γ. Le théorème est démontré.

Références bibliographiques

[1] X. Fernique, Fonctions aléatoires gaussiennes, vecteurs aléatoires gaussiens, Les Publications C.R.M., 1997.
[2] M. Ledoux, M. Talagrand, Probability in Banach Spaces, Ergeb. Math. (3), Vol. 23, Springer, Berlin, 1991.
[3] S.T. Rachev, L. Rüschendorf, Mass Transportation Problems, Probab. Appl., Springer, Berlin, 1998.
[4] A.S. Ustunel, M. Zakaï, Transformation of Measure on Wiener Space, Springer Monographs in Math., Springer, Berlin, 2000.