C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 5–10

Algèbre/*Algebra*

Structures de Poisson sur une intersection complète à singularités isolées

Benoit Fresse

Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France

Reçu le 14 février 2002 ; accepté le 29 avril 2002

Note présentée par Jean-Louis Koszul.

Résumé On étudie les structures de Poisson sur des variétés singulières. On considère dans ce but le complexe de Koszul associé aux équations d'une intersection complète. Ce complexe forme une algèbre différentielle graduée qui est équivalente à l'algèbre de la variété. On montre qu'une structure de Poisson est équivalente à la donnée d'une famille de multidérivations sur le complexe de Koszul. Si notre variété a des singularités isolées, alors on peut construire une telle famille de multidérivations de forme réduite. ***Pour citer cet article : B. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 5–10.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Poisson structures over a complete intersection with isolated singularities

Abstract We study Poisson structures over singular varieties. For this purpose, we consider the Koszul complex associated to the equations of a complete intersection. This complex forms a differential graded algebra which is equivalent to the algebra of the variety. We show that a Poisson structure is equivalent to a sequence of multiderivations over the Koszul complex. If the variety has isolated singularities, then we can construct a sequence of multiderivations of reduced form. ***To cite this article: B. Fresse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 5–10.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let $\mathcal{O}$ be a commutative algebra. This algebra is equipped with a Poisson structure if we have an antisymmetric biderivation $\{-,-\} : \mathcal{O} \otimes \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ such that $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$, for all $f, g, h \in \mathcal{O}$. We would like to study such structures in the case $\mathcal{O}$ is the algebra of a complete intersection with isolated singularities. Our idea is to replace the algebra of a singular affine scheme by an equivalent free differential graded algebra.

1. *Differential graded modules. –* We work in the category of differential graded $\mathbf{C}$-modules (dg-modules, for short). We adopt the following classical conventions. A dg-module V is either lower graded $V = V_*$ or upper graded $V = V^*$. The relation $V^d = V_{-d}$ makes a lower grading equivalent to an upper grading. The

Adresse e-mail : fresse@math.unice.fr (B. Fresse).

S1631-073X(02)02423-8/FLA

notation $|v|$ refers to the lower degree of a homogeneous element $v \in V$. The differential of V is denoted by $\delta : V \to V$. The homology of the complex associated to V is denoted by $H_*(V)$. A morphism of dg-modules $V \to W$ is quasi-iso if the induced morphism $H_*(V) \to H_*(W)$ is iso.

The tensor product of dg-modules V and W is the dg-module such that $(V \otimes W)_n = \bigoplus_{*\in\mathbf{Z}} V_* \otimes W_{n-*}$. The differential of a tensor $v \otimes w \in V \otimes W$ is given by the classical formula $\delta(v \otimes w) = \delta(v) \otimes w + \pm v \otimes \delta(w)$, where $\pm = (-1)^{|v|}$. We have a symmetry isomorphism $V \otimes W \to W \otimes V$ defined by $c(v \otimes w) = \pm w \otimes v$, where $\pm = (-1)^{|v|\cdot|w|}$. In the sequel, the notation $\pm$ refers to the sign produced by a permutation of homogeneous elements, whose explicit determination follows from the definition of the symmetry isomorphism.

The module of homogeneous morphisms from V to W is the upper graded dg-module such that $\mathrm{Hom}^n(V, W) = \prod_{*\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}(V_{*+n}, W_*)$. The differential of a homogeneous morphism $f \in \mathrm{Hom}^*(V, W)$ is provided by the commutator of f with the differentials of V and W. We have explicitly $\delta(f) = \delta f - \pm f\delta$, where $\pm = (-1)^{|f|}$. A 0-cocycle $f \in \mathrm{Hom}^0(V, W)$ is equivalent to a morphism of dg-modules $f : V \to W$.

2. *Differential graded algebras.* – A commutative dg-algebra is a dg-module $\widetilde{\mathcal{O}}$ equipped with a product $\widetilde{\mathcal{O}} \otimes \widetilde{\mathcal{O}} \to \widetilde{\mathcal{O}}$ which is associative and commutative. The commutativity relation involves a sign because of the definition of the symmetry isomorphism $\widetilde{\mathcal{O}} \otimes \widetilde{\mathcal{O}} \to \widetilde{\mathcal{O}} \otimes \widetilde{\mathcal{O}}$.

By convention, a polynomial algebra $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_r]$ denotes a commutative dg-algebra which, as a graded commutative algebra, is freely generated by homogeneous elements $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_r \in \widetilde{\mathcal{O}}$. Let us mention that the differential of $\widetilde{\mathcal{O}}$ is determined by the differential of the generators $\delta(\tilde{u}_1), \ldots, \delta(\tilde{u}_r) \in \widetilde{\mathcal{O}}$.

3. *Resolutions.* – A resolution of a commutative algebra $\mathcal{O}$ is a polynomial dg-algebra $\widetilde{\mathcal{O}}$ such that $H_0(\widetilde{\mathcal{O}}) = \mathcal{O}$ and $H_*(\widetilde{\mathcal{O}}) = 0$ if $* > 0$. Equivalently, we assume that $\mathcal{O}$ is a dg-algebra concentrated in degree 0. The resolution $\widetilde{\mathcal{O}}$ is a dg-algebra equipped with an augmentation morphism $\varepsilon : \widetilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$ which is quasi-iso.

Let us assume that $\mathcal{O}$ is the algebra of a complete intersection $h_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = h_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$. In this case, a resolution of $\mathcal{O}$ is provided by the Koszul complex of the sequence $(h_1, \ldots, h_m)$, which is nothing but the dg-algebra $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, \tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_m]$, where $|\tilde{h}_j| = 1$ and $\delta(\tilde{h}_j) = h_j(x_1, \ldots, x_n)$.

4. *On Kähler differentials.* – The definition of the algebra of Kähler differentials $\Omega^*(\widetilde{\mathcal{O}})$ can be extended to the case of a dg-algebra $\widetilde{\mathcal{O}}$. Precisely, we consider the dg-algebra over $\widetilde{\mathcal{O}}$ generated by the elements $\mathrm{d}f$, where $f \in \widetilde{\mathcal{O}}$, together with the relations $\mathrm{d}(fg) = \mathrm{d}f \cdot g + \pm f \cdot \mathrm{d}g$, where $\pm = (-1)^{|f|}$. We have also $|\mathrm{d}f| = 1 + |f|$ and $\delta(\mathrm{d}f) = -\mathrm{d}(\delta(f))$. (The differential symbol d is equivalent to a tensor of degree 1.) The homogeneous component $\Omega^s(\widetilde{\mathcal{O}})$ is the dg-module generated by the products $f_0 \cdot \mathrm{d}f_1 \cdots \mathrm{d}f_s \in \Omega^*(\widetilde{\mathcal{O}})$ (with s differentials).

Similarly, we have a dg-module of multivectors $T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^*$ which is defined by the identity $T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^m = \mathrm{Hom}^n_{\widetilde{\mathcal{O}}}(\Omega^s(\widetilde{\mathcal{O}}), \widetilde{\mathcal{O}})$. An element $\tilde{\pi} \in T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^m$ is equivalent to an antisymmetric multiderivation $\tilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{O}} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\mathcal{O}} \to \widetilde{\mathcal{O}}$ which decreases the degree by $m - s$. The superscript s (respectively, m) refers to the order (respectively, to the degree) of the multivector $\tilde{\pi}$.

5. *Poisson structures.* – The dg-module of multivectors is endowed with the Schouten–Nijenhuis bracket $[-,-] : T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^m \otimes T^t(\widetilde{\mathcal{O}})^n \to T^{s+t-1}(\widetilde{\mathcal{O}})^{m+n-1}$ as in the classical differential calculus. Furthermore, a Poisson structure is equivalent to a bivector $\tilde{\pi}_2 \in T^2(\widetilde{\mathcal{O}})^2$ such that $\delta(\tilde{\pi}_2) = 0$ and $[\tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_2] = 0$. We define a homotopy Poisson structure as a sequence of multivectors $\tilde{\pi}_s \in T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^2$, $s \geqslant 2$, whose sum $\tilde{\pi}_* = \sum_s \tilde{\pi}_s$ verifies the Maurer–Cartan equation $\delta(\tilde{\pi}_*) + 1/2 \cdot [\tilde{\pi}_*, \tilde{\pi}_*] = 0$.

We have obtained the following results:

THEOREM 1. – *Let $\mathcal{O}$ be a commutative algebra over $\mathbf{C}$ equipped with a Poisson structure. Let us fix a free differential graded resolution of $\mathcal{O}$ as in paragraph* 3. *The algebra $\widetilde{\mathcal{O}}$ has a homotopy Poisson structure $\tilde{\pi}_* \in T^*(\widetilde{\mathcal{O}})$ such that $\varepsilon(\tilde{\pi}_2(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g)) = \{\varepsilon(f), \varepsilon(g)\}$, for all $f, g \in \widetilde{\mathcal{O}}$.*

THEOREM 2. – *Let $\mathcal{O}$ be a commutative algebra over* $\mathbf{C}$ *equipped with a Poisson structure. We assume that $\mathcal{O}$ is the algebra of a complete intersection with isolated singularities* $h_1(x_1,\dots,x_n)=\cdots=h_m(x_1,\dots,x_n)=0$. *We consider the Koszul resolution of $\mathcal{O}$ introduced in paragraph* 3. *We localize these algebras at $\mathcal{P}\in\operatorname{Spec}\mathcal{O}$. There is a germ of homotopy Poisson structure $\tilde{\pi}_*\in T^*(\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}})$, as in Theorem* 1, *such that, for $2\leqslant s\leqslant n-m$, we have*

$$\tilde{\pi}_s(\mathrm{d}f_1,\dots,\mathrm{d}f_s)=\begin{cases}\widetilde{\varpi}_s(\mathrm{d}f_1,\dots,\mathrm{d}f_s,\mathrm{d}h_1,\dots,\mathrm{d}h_m) & \textit{if}\ \deg(f_1)=\cdots=\deg(f_s)=0,\\ 0 \quad \textit{otherwise},\end{cases}$$

where $\widetilde{\varpi}_s:\Omega^{s+m}(\mathbf{C}[x_1,\dots,x_n]_{\mathcal{P}})\to(\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}})_{s-2}$.

Soit $\mathcal{O}$ une algèbre commutative sur $\mathbf{C}$. Une structure de Poisson sur $\mathcal{O}$ est la donnée d'une bidérivation antisymétrique $\{-,-\}:\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ vérifiant la relation $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$, quelque soient $f,g,h\in\mathcal{O}$. On voudrait étudier ces structures quand $\mathcal{O}$ est l'algèbre d'une intersection complète à singularités isolées. L'idée consiste à remplacer l'algèbre d'un schéma affine singulier par une algèbre différentielle graduée libre équivalente.

1. Calcul différentiel gradué

1.1. Modules différentiels gradués

On travaille dans la catégorie des modules différentiels gradués sur $\mathbf{C}$ (pour abréger, on parlera de dg-modules). On adopte les conventions classiques suivantes. Un dg-module V est soit gradué inférieurement $V=V_*$ soit gradué supérieurement $V=V^*$. La relation $V^d=V_{-d}$ rend une graduation inférieure équivalente à une graduation supérieure. La notation $|v|$ renvoie au degré d'un élément homogène $v\in V$. La différentielle de V est notée $\delta:V\to V$. L'homologie du complexe associé à V est notée $H_*(V)$. Un morphisme de dg-modules $V\to W$ est quasi-iso si le morphisme induit $H_*(V)\to H_*(W)$ est iso.

Le produit tensoriel des dg-modules V et W est le dg-module tel que $(V\otimes W)_n=\bigoplus_{*\in\mathbf{Z}}V_*\otimes W_{n-*}$. La différentielle d'un tenseur $v\otimes w\in V\otimes W$ est donnée par la formule classique $\delta(v\otimes w)=\delta(v)\otimes w+\pm v\otimes\delta(w)$, où $\pm=(-1)^{|v|}$. On a un isomorphisme de symétrie $V\otimes W\to W\otimes V$ défini par $c(v\otimes w)=\pm w\otimes v$, où $\pm=(-1)^{|v|\cdot|w|}$. En général, la notation $\pm$ renvoie au signe produit par une permutation d'éléments homogènes, dont la valeur résulte de la définition de l'isomorphisme de symétrie.

Le module des morphismes homogènes de V dans W est le dg-module gradué supérieurement tel que $\operatorname{Hom}^n(V,W)=\prod_{*\in\mathbf{Z}}\operatorname{Hom}(V_{*+n},W_*)$. La différentielle d'un morphisme homogène $f\in\operatorname{Hom}^*(V,W)$ est donnée par le commutateur de f avec les différentielles de V et W. On a explicitement $\delta(f)=\delta f-\pm f\delta$, avec $\pm=(-1)^{|f|}$. Un 0-cocycle $f\in\operatorname{Hom}^0(V,W)$ est équivalent à un morphisme de dg-modules $f:V\to W$.

1.2. Algèbres différentielles graduées

Une dg-algèbre commutative est un dg-module $\widetilde{\mathcal{O}}$ muni d'un produit $\widetilde{\mathcal{O}}\otimes\widetilde{\mathcal{O}}\to\widetilde{\mathcal{O}}$ qui est associatif est commutatif. La relation de commutativité comporte un signe dû à la définition de l'isomorphisme de symétrie $\widetilde{\mathcal{O}}\otimes\widetilde{\mathcal{O}}\to\widetilde{\mathcal{O}}\otimes\widetilde{\mathcal{O}}$.

Par convention, une algèbre polynomiale $\widetilde{\mathcal{O}}=\mathbf{C}[\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_r]$ désigne une dg-algèbre commutative qui, en tant que dg-algèbre, est librement engendrée par des éléments homogènes $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_r\in\widetilde{\mathcal{O}}$. La différentielle de $\widetilde{\mathcal{O}}$ est déterminée par la différentielle des générateurs $\delta(\tilde{u}_1),\dots,\delta(\tilde{u}_r)\in\widetilde{\mathcal{O}}$.

1.3. Résolutions

Une résolution d'une algèbre commutative $\mathcal{O}$ est une algèbre polynomiale $\widetilde{\mathcal{O}}$ telle que $H_0(\widetilde{\mathcal{O}}) = \mathcal{O}$ et $H_*(\widetilde{\mathcal{O}}) = 0$ si $* > 0$. De façon équivalente, on suppose que $\mathcal{O}$ est une dg-algèbre concentrée en degré 0. La résolution $\widetilde{\mathcal{O}}$ est une dg-algèbre munie d'un morphisme d'augmentation $\varepsilon : \widetilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$ qui est quasi-iso.

Supposons par exemple que $\mathcal{O}$ est l'algèbre d'une intersection complète $h_1(x_1, \dots, x_n) = \cdots = h_m(x_1, \dots, x_n) = 0$. On a alors une résolution de $\mathcal{O}$ qui est fournie par le complexe de Koszul de la suite $(h_1, \dots, h_m)$. Ce complexe n'est rien d'autre que l'algèbre différentielle graduée $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_m]$ où $|\tilde{h}_j| = 1$ et $\delta(\tilde{h}_j) = h_j(x_1, \dots, x_n)$. On note simplement que $\tilde{h}_i \tilde{h}_j = -\tilde{h}_j \tilde{h}_i$, d'après la règle de commutation des variables homogènes.

2. Structures de Poisson homotopiques

2.1. Formes de Kähler

La définition de l'algèbre des formes de Kähler s'étend au cadre différentiel gradué. Ainsi, on définit $\Omega^*(\widetilde{\mathcal{O}})$ comme la dg-algèbre sur $\widetilde{\mathcal{O}}$ engendrée par les éléments $\mathrm{d}f$, avec $f \in \widetilde{\mathcal{O}}$, et quotientée par les relations $\mathrm{d}(fg) = \mathrm{d}f \cdot g + \pm f \cdot \mathrm{d}g$, où $\pm = (-1)^{|f|}$. On a aussi $|\mathrm{d}f| = |f| + 1$ et $\delta(\mathrm{d}f) = -\mathrm{d}(\delta(f))$. (Le symbole de différentielle d est équivalent à un tenseur de degré 1.) La composante homogène $\Omega^s(\widetilde{\mathcal{O}})$ est le dg-module engendré par les produits $f_0 \cdot \mathrm{d}f_1 \cdots \mathrm{d}f_s \in \Omega^*(\widetilde{\mathcal{O}})$ (comportant s différentielles).

2.2. Multivecteurs

On a également un dg-module de multivecteurs $T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^*$ défini par la relation $T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^m = \mathrm{Hom}^m_{\widetilde{\mathcal{O}}}(\Omega^s(\widetilde{\mathcal{O}}), \widetilde{\mathcal{O}})$. Un élément $\tilde{\pi} \in T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^m$ équivaut à une multidérivation antisymétrique $\tilde{\pi} : \widetilde{\mathcal{O}} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\mathcal{O}} \to \widetilde{\mathcal{O}}$ qui diminue le degré de $m - s$. L'exposant s (respectivement, m) renvoie à l'ordre (respectivement, au degré) du multivecteur $\tilde{\pi}$.

On munit le dg-module des multivecteurs du crochet de Schouten–Nijenhuis

$$[-,-] : T^s\big(\widetilde{\mathcal{O}}\big)^m \otimes T^t\big(\widetilde{\mathcal{O}}\big)^n \to T^{s+t-1}\big(\widetilde{\mathcal{O}}\big)^{m+n-1}$$

comme dans le calcul différentiel classique. On a explicitement $[P, Q] = P \circ Q + \pm Q \circ P$, où $P \circ Q(\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_{s+t-1}) = \sum \pm P(\mathrm{d}f_{i_1}, \dots, \mathrm{d}f_{i_{s-1}}, \mathrm{d}Q(df_{j_1}, \dots, \mathrm{d}f_{j_t}))$, pour tout multivecteurs $P \in T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^*$ et $Q \in T^t(\widetilde{\mathcal{O}})^*$. Les signes sont déterminés par la règle de commutation des tenseurs. La somme s'étend sur l'ensemble des décompositions $\{1, \dots, s+t-1\} = \{i_1, \dots, i_{s-1}\} \cup \{j_1, \dots, j_t\}$.

2.3. Structures de Poisson

Une structure de Poisson homotopique est une suite de multivecteurs $\tilde{\pi}_s \in T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^2$, $s \geqslant 2$, dont la somme $\tilde{\pi}_* = \sum_s \tilde{\pi}_s$ (définie formellement) vérifie l'équation de Maurer–Cartan $\delta(\tilde{\pi}_*) + 1/2 \cdot [\tilde{\pi}_*, \tilde{\pi}_*] = 0$. On obtient les équations que vérifient les multivecteurs $\tilde{\pi}_s$, $s \geqslant 2$, en développant les composantes d'ordre homogène de cette équation. On a explicitement :

$$\delta(\tilde{\pi}_s) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{p+q=s+1} [\tilde{\pi}_p, \tilde{\pi}_q] = 0,$$

pour tout $s \geqslant 2$. En particulier, pour $s = 2$, on obtient l'équation $\delta(\tilde{\pi}_2) = 0$. Pour $s = 3$, on obtient $\delta(\tilde{\pi}_3) + 1/2 \cdot [\tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_2] = 0$.

Une structure de Poisson équivaut à une structure de Poisson homotopique telle que $\tilde{\pi}_s = 0$ pour $s \neq 2$. Considérons les multidérivations $\{-, \cdots, -\}_s : \widetilde{\mathcal{O}} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\mathcal{O}} \to \widetilde{\mathcal{O}}$ associées aux multivecteurs $\tilde{\pi}_s \in T^s(\widetilde{\mathcal{O}})^2$, $s \geqslant 2$. On a par définition $\{f_1, \dots, f_s\}_s = \pm\tilde{\pi}_s(\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_s)$. Le signe provient de la commutation des symboles différentiels d avec les éléments $f_1, \ldots, f_s$. La composante d'ordre $s = 2$ de l'équation de Maurer–Cartan équivaut à la relation $\delta\{f_1, f_2\}_2 = \{\delta(f_1), f_2\}_2 + \pm\{f_1, \delta(f_2)\}_2$. La composante d'ordre $s = 3$ se réécrit :

$$\bigl\{\{f_1, f_2\}_2, f_3\bigr\}_2 + \pm\bigl\{\{f_2, f_3\}_2, f_1\bigr\}_2 + \pm\bigl\{\{f_3, f_1\}_2, f_2\bigr\}_2 = \pm\delta(\tilde\pi_3)(\mathrm{d}f_1, \mathrm{d}f_2, \mathrm{d}f_3).$$

Ainsi, en général, on suppose seulement que la relation de Jacobi est vérifiée modulo un cobord (qui est représenté par le trivecteur $\tilde\pi_3$).

On a en fait défini un type particulier de structure de Poisson homotopique. On renvoie le lecteur au travail de Ginot pour une notion de structure homotopique plus générale dans le cadre analogue des algèbres de Gerstenhaber (*cf.* [3]). Ces structures interviennent dans les travaux de Kontsevich et Tamarkin sur la formalité des complexes de Hochschild (*cf.* [4]).

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Soit $\mathcal{O}$ une algèbre commutative sur* $\mathbf{C}$ *munie d'une structure de Poisson. On fixe une résolution de $\mathcal{O}$ comme dans le paragraphe* 1.3*. L'algèbre $\widetilde{\mathcal{O}}$ a une structure de Poisson homotopique $\tilde\pi_* \in T^*(\widetilde{\mathcal{O}})$ telle que $\varepsilon(\tilde\pi_2(\mathrm{d}f, \mathrm{d}g)) = \{\varepsilon(f), \varepsilon(g)\}$, pour tout $f, g \in \widetilde{\mathcal{O}}$.*

On construit la suite des multivecteurs pas à pas. On observe que le morphisme d'augmentation $\varepsilon : \widetilde{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}$ induit un quasi-isomorphisme

$$\mathrm{Hom}^*_{\widetilde{\mathcal{O}}}\bigl(\Omega^s\bigl(\widetilde{\mathcal{O}}\bigr), \widetilde{\mathcal{O}}\bigr) \to \mathrm{Hom}^*_{\widetilde{\mathcal{O}}}\bigl(\Omega^s\bigl(\widetilde{\mathcal{O}}\bigr), \mathcal{O}\bigr)$$

et que les modules $\mathrm{Hom}^*_{\widetilde{\mathcal{O}}}(\Omega^s(\widetilde{\mathcal{O}}), \mathcal{O})$ ont une composante de degré $* = 2$ nulle dès que $s > 2$. Il s'ensuit que les obstructions à l'existence des multivecteurs $\tilde\pi_s$ sont nulles.

3. Cas des intersections complètes

THÉORÈME 3.1. – *Soit $\mathcal{O}$ une algèbre commutative sur* $\mathbf{C}$ *munie d'une structure de Poisson. On suppose que $\mathcal{O}$ est l'algèbre d'une intersection complète à singularités isolées $h_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = h_m(x_1, \ldots, x_n) = 0$. On considère la résolution de Koszul de $\mathcal{O}$ introduite dans le paragraphe* 1.3*. On localise ces algèbres en $\mathcal{P} \in \operatorname{Spec} \mathcal{O}$. Il existe un germe de structure de Poisson homotopique $\tilde\pi_* \in T^*(\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}})$, comme dans le Théorème* 2.1*, tel que, pour $2 \leqslant s \leqslant n - m$, on ait*

$$\tilde\pi_s(\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_s) = \begin{cases} \widetilde\varpi_s(\mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_s, \mathrm{d}h_1, \ldots, \mathrm{d}h_m) & \textit{si } \deg(f_1) = \cdots = \deg(f_s) = 0, \\ 0 & \textit{sinon}, \end{cases}$$

où $\widetilde\varpi_s : \Omega^{s+m}(\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{P}}) \to (\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}})_{s-2}$.

On considère la famille des complexes de Koszul généralisés associés à la matrice Jacobienne $((h_i)'_j)$ des polynômes $(h_1, \ldots, h_m)$ (*cf.* [7, Appendice C]). On utilise l'acyclicité de ces complexes (le lieu singulier de notre variété étant de codimension $n - m$). On forme le produit tensoriel de ces complexes de Koszul généralisés avec le complexe de Koszul de $(h_1, \ldots, h_m)$. On obtient ainsi un bicomplexe. On construit les morphismes $\widetilde\varpi_s : \Omega^{s+m}(\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]_{\mathcal{P}}) \to (\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{P}})_{s-2}$ comme le bord de certains cycles dans ce bicomplexe.

3.1. Exemple des hypersurfaces

On suppose $m = 1$ et $\mathcal{O} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]/(h)$. On a alors $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n, \tilde{h}]$, avec $|\tilde{h}| = 1$ et $\delta(\tilde{h}) = h$. Le théorème ci dessus entraine que le crochet de Poisson de $\mathcal{O}$ est donné par une formule de la forme

$$\{f, g\} = \sum_{i,j,k} p_{ijk} f'_i g'_j h'_k.$$

(On prend simplement $p_{ijk} = \widetilde{\varpi}_2(\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x_j, \mathrm{d}x_k)$.) On a aussi une relation de la forme

$$\big\{\{f_1, f_2\}, f_3\big\} + \big\{\{f_2, f_3\}, f_1\big\} + \big\{\{f_3, f_1\}, f_2\big\} = h \cdot \sum_{i,j,k,l} q_{ijkl} (f_1)'_i (f_2)'_j (f_3)'_k h'_l.$$

(On considére les polynômes q_{ijkl} tels que $\widetilde{\varpi}_3(\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}x_j, \mathrm{d}x_k, \mathrm{d}x_l) = \tilde{h} \cdot q_{ijkl}$ dans $\widetilde{\mathcal{O}}_1$.)

Comme application, on retrouve les formules que Alev et Lambre ont obtenues par un calcul direct pour le crochet de Poisson symplectique des surfaces de Klein (*cf.* [1]). Les polynômes p_{ijk} sont alors nécessairement constants pour des raisons d'homogénéité. On peut également supposer que les polynômes q_{ijkl} sont nuls dans ce cas.

3.2. Homologie de Poisson

Le théorème de structure ci-dessus nous permet d'obtenir des résultats sur l'homologie de Poisson des intersections complètes à singularités isolées. On considère l'homologie de Poisson $H_*^{\mathcal{P}\mathrm{ois}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ telle qu'elle est définie dans la théorie des opérades de Koszul (*cf.* [2]). L'homologie de Poisson définie par Koszul et Brylinski (*cf.* [5]) est notée $H_*^{\mathrm{can}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ et sera désignée comme l'homologie canonique de $\mathcal{O}$. On rappelle que l'on a une suite spectrale $E^1_{s,t} = HH^{(s)}_{s+t}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \Rightarrow H^{\mathcal{P}\mathrm{ois}}_{s+t}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$, où $HH_*^{(s)}$ désigne la composante de poids s de l'homologie de Hochschild. On a obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. – *Si $\mathcal{O}$ est l'algèbre d'une intersection complète à singularités isolées, alors la suite spectrale $E^1_{s,t} = HH^{(s)}_{s+t}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \Rightarrow H^{\mathcal{P}\mathrm{ois}}_{s+t}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ dégénère au rang 2. On a de plus $H_*^{\mathcal{P}\mathrm{ois}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = H_*^{\mathrm{can}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ en degré $* \leqslant \dim \mathcal{O}$ et $H_*^{\mathcal{P}\mathrm{ois}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = HH_*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ en degré $* \geqslant \dim \mathcal{O}$.*

On utilise que les composantes de poids de l'homologie de Hochschild sont déterminées par l'homologie des complexes de Koszul généralisés introduits précédemment (*cf.* [6]).

On peut énoncer un résultat plus précis dans le cas d'une hypersurface :

THÉORÈME 3.3. – *On suppose que $\mathcal{O}$ est l'algèbre d'une hypersurface à singularités isolées $h(x_1, \ldots, x_n) = 0$ telle que $h \in (h'_1, \ldots, h'_n)$. On a alors $H_*^{\mathcal{P}\mathrm{ois}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = H_*^{\mathrm{can}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ pour $* \leqslant n - 1$ et $H_*^{\mathcal{P}\mathrm{ois}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/(h'_1, \ldots, h'_n)$ pour $* \geqslant n - 1$.*

Références bibliographiques

[1] J. Alev, T. Lambre, Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein, in: Algebra and Operator Theory, Tashkent, 1997, Kluwer Academic, 1998, pp. 25–38.

[2] B. Fresse, Homologie de Quillen pour les algèbres de Poisson, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 326 (1998) 1053–1058.

[3] G. Ginot, Homologie et modèle minimal des algèbres de Gerstenhaber, Prépublication, 2001.

[4] M. Kontsevich, Operads and motives in deformation quantization, Lett. Math. Phys. 48 (1999) 35–72.

[5] J.-L. Koszul, Crochet de Schouten–Nijenhuis et cohomologie, in: Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui, Astérisque hors série, 1985, pp. 257–271.

[6] A. Lago, A.G. Rodicio, Generalized Koszul complexes and Hochschild (co)-homology of complete intersections, Invent. Math. 107 (1992) 433–446.

[7] D.G. Northcott, Finite free resolutions, Cambridge Tracts in Math., Vol. 71, Cambridge University Press, 1976.