C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 167–170

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*
(Théorie des nombres/*Number Theory*)

Un lemme de zéros

Nicolas Gouillon

Institut de mathématiques de Luminy, 163, avenue de Luminy, case 907, 13288, Marseille cédex 9, France

Reçu le 26 décembre 2001 ; accepté le 29 avril 2002

Note présentée par Christophe Soulé.

Résumé On donne un lemme de zéros applicable aux formes linéaires de logarithmes qui raffine au niveau des constantes l'énoncé 11.3 de [4]. ***Pour citer cet article : N. Gouillon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 167–170.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A lemma of zeros

Abstract We give a lemma of zeros, applicable to the linears forms of logarithms, that refine for the constants, the statement 11.3 of [4]. ***To cite this article: N. Gouillon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 335 (2002) 167–170.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

On se propose de donner un lemme de zéros applicable aux formes linéaires de logarithmes dans le cadre des groupes algébriques commutatifs. Pour cela on reprend la méthode originelle de Masser dans [1], utilisant une construction d'intersection complète. On notera que cette construction diffère de celle de [3], Chapitres 10 et 11, et de celle de [2]. Nous améliorons la valeur des constantes, contenues par exemple dans [3], grâce à une bonne estimation des bidegrés et une description explicite des sous-groupes obstructeurs.

2. Énoncé du résultat

On se place dans un espace produit $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, où $m \geqslant 2$. Pour tout élément w dans $\mathbb{C}^\times$ et $v_0, \ldots, v_{m-1}$ dans $\mathbb{C}$ on notera $(\underline{v}, w) = (v_0, \ldots, v_{m-1}, w)$ un point de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$. Soit D la dérivation $D = \frac{\partial}{\partial X_0} + Y\frac{\partial}{\partial Y}$, on dira qu'un polynôme P s'annule à l'ordre $> S$ sur un ensemble Σ si pour tout σ compris entre 0 et S, $D^\sigma P$ s'annule sur Σ.

THÉORÈME 1. – *Soient K, L, m des entiers $\geqslant 1$; $S_1, \ldots, S_{m+1}$ des entiers $\geqslant 0$, et $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{m+1}$ des ensembles finis de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ non vides. Supposons les conditions suivantes réalisées.*
(1) *Pour tout $j = 1, \ldots, m$, et tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^m$ de dimension $m - j$ on a*

$$\binom{S_j + 1}{\varepsilon_j} \operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) > K^j,$$

Adresse e-mail : gouillon@iml.univ-mrs.fr (N. Gouillon).

S1631-073X(02)02422-6/FLA

où

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \textit{si } (1,0,\ldots,0) \notin W, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(2) *Pour tout $j = 1, \ldots, m+1$, et tout sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^m$ de dimension $m+1-j$ on a*

$$(S_j + 1)\,\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mathbb{C}^{\times}_{\mathrm{tors}}}\right) > jK^{j-1}L.$$

Alors tout polynôme $P \in \mathbb{C}[\underline{X}, Y]$, de degré total en $\underline{X}$ inférieur ou égal à K et de degré en Y inférieur ou égal à L s'annulant sur $\Sigma_1 + \cdots + \Sigma_{m+1}$ à un ordre $> S_1 + \cdots + S_{m+1}$ pour la dérivation D, est identiquement nul.

3. Définitions et lemmes

Pour démontrer le résultat précédent, il est nécessaire de définir certaines notions classiques et de donner quelques lemmes.

Soit V une sous-variété non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$, on notera

$$I(V) = \left\{ Q \in \mathbb{C}[\underline{X}, Y] \mid Q \equiv 0 \text{ sur } V \right\}$$

l'ensemble des polynômes s'annulant sur V.

On notera H_V, ou H s'il n'y a pas d'ambiguïté, le stabilisateur de V qui est l'ensemble des points τ appartenant à $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$ tels que $V_\tau = V$, où V_τ est le translaté de V par τ.

Un cycle effectif de dimension $d > 0$ dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$ est une combinaison linéaire formelle

$$Z = m_1 V_1 + \cdots + m_s V_s$$

à coefficients entiers $m_1, \ldots, m_s \geqslant 1$ de sous-variétés irréductibles $V_1, \ldots, V_s$ de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$ de même dimension d. Les sous-variétés $V_1, \ldots, V_s$ sont appelées les composantes de Z. On notera $\mathrm{Supp}(Z)$ la variété $V_1 \cup \cdots \cup V_s$ de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$.

Soient Z et Z' deux cycles dont les composantes s'intersectent proprement deux à deux, on notera $Z.Z'$ le cycle intersection.

Soit P un polynôme appartenant à $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$. Pour tout $\tau = (\underline{a}, b)$ appartenant à $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$, on notera $P_\tau =: P(\underline{x} + \underline{a}, by)$ le translaté par τ du polynôme P. Si de plus P n'est pas de la forme cY^k, avec c dans $\mathbb{C}$ et $k \geqslant 0$, on notera $Z(P)$ le cycle de codimension 1 associé dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$ aux zéros de P.

On plongera naturellement $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$ dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Soit alors V une sous-variété non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{\times}$, de codimension r. On définit les bidegrés

$$\delta_{r,0}(V) = \mathrm{Card}\left\{ \overline{V} \cap \left(L_r \times \{\xi\} \right) \right\},$$
$$\delta_{r-1,1}(V) = \mathrm{Card}\left\{ \overline{V} \cap \left(L_{r-1} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \right) \right\},$$

où $\overline{V}$ désigne l'adhérence de V dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, L_r et L_{r-1} sont des variétés linéaires génériques de dimensions respectives r et $r-1$, dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, et ξ est le point générique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. De plus par convention on posera $\delta_{a,b}(V) = 0$ pour tout autre couple (a, b).

Pour un cycle $Z = m_1 V_1 + \cdots + m_s V_s$ donné, on définit ses bidegrés par linéarité

$$\delta_{a,b}(Z) = \sum_{i=1}^{s} m_i \delta_{a,b}(V_i).$$

LEMME 1. – *Soit V une variété affine irréductible non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$ n'appartenant pas à $I(V)$ de degré total en $\underline{X}$ majoré par k_1 et de degré en Y majoré par k_2. Alors pour tout couple (a, b) d'entiers on a*

$$\delta_{(a,b)}\bigl(V \cap Z(P)\bigr) \leqslant k_1\delta_{(a-1,b)}(V) + k_2\delta_{(a,b-1)}(V).$$

LEMME 2. – *Soient $P_1, \ldots, P_n$ des éléments de $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$, formant une suite régulière dans $\mathbb{C}[\underline{X}, Y, Y^{-1}]$. Soit $Z = Z(P_1) \cdots Z(P_n)$ le cycle intersection. Soient V une composante de Z et H_V son stabilisateur, et soit Σ un ensemble non vide de points de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$ sur lequel les P_i s'annulent. Supposons que $D^\sigma((P_i)_\tau) = (D^\sigma(P_i))_\tau$ appartienne à $I(V)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, tout $\sigma = 0, \ldots, S$ et tout τ dans Σ. Alors, si D ne laisse pas invariant $I(V)$, la composante V est de multiplicité au moins $S + 1$ dans Z. De plus pour tout couple (a, b) d'entiers on a*

$$\delta_{(a,b)}(Z) \geqslant (S + 1)\,\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma}{H_V}\right)\delta_{(a,b)}(V).$$

LEMME 3. – *Soit V un sous-ensemble algébrique non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$. Supposons que la dérivation D laisse invariant l'idéal $I(V)$, alors le stabilisateur de V est de la forme $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$, où W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ contenant le point $(1, 0, \ldots, 0)$.*

LEMME 4. – *Soit V une variété non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, de codimension r.*
Si $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$, alors $\delta_{r,0}(V) \neq 0$.
Si $H_V = W \times \mu$, où $\mu \subseteq \mathbb{C}^\times$ est fini, alors $\delta_{r-1,1}(V) \neq 0$.

4. Démonstration du théorème

Supposons par l'absurde qu'il existe P dans $\mathbb{C}[\underline{X}, Y]$, non identiquement nul, vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On construit par induction une suite $(P_j)_{j=1,\ldots,m+1}$ de polynômes, de degré total en $\underline{X}$ majoré par K et de degré en Y majoré par L, tels que pour tout $j = 1, \ldots, m + 1$

$$P_j \text{ s'annule sur } \Sigma_j + \cdots + \Sigma_{m+1} \text{ à un ordre } > S_j + \cdots + S_{m+1}, \tag{$*$}$$

et tels que le cycle $Z_j = Z(P_1).\cdots.Z(P_j)$ soit une intersection complète dans $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$. Alors

$$\delta_{j-1,1}(Z_j) \leqslant jK^{j-1}L, \quad \text{et} \quad \delta_{j,0}(Z_j) \leqslant K^j. \tag{$**$}$$

On choisit $P_1 = P$. D'après l'énoncé il vérifie bien $(*)$, de plus comme $\delta_{0,1}(P_1) = \deg_Y(P_1)$ et $\delta_{1,0}(P_1) = \deg_{\underline{X}}(P_1)$, le cycle $Z_1 = Z(P_1)$ vérifie $(**)$.

On suppose que l'on a obtenu les polynômes $P_1, \ldots, P_j$ vérifiant les hypothèses ci-dessus. Construisons donc le polynôme P_{j+1}. Soit V une composante de Z_j. Nous allons montrer qu'il existe σ compris entre 0 et S_j, τ appartenant à Σ_j, et l compris entre 1 et j tels que le polynôme $(D^\sigma(P_l))_\tau$ ne s'annule pas identiquement sur V. Pour cela on raisonnera par l'absurde. Supposons donc que pour tout $l = 1, \ldots, j$, tout σ compris entre 0 et S_j, et tout τ appartenant à Σ_j le polynôme $(D^\sigma P_l)_\tau$ s'annule sur V. On peut alors appliquer le Lemme 2 à V, avec $n = j$, $\Sigma = \Sigma_j$, et $S = S_j$. On distingue alors trois cas.

(i) La dérivation D laisse invariant $I(V)$. Alors, V étant un sous-ensemble algébrique non vide de $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^\times$, on peut appliquer le Lemme 3. Le stabilisateur de V est donc de la forme $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$ avec W contenant le point $(1, 0, \ldots, 0)$. De plus $\delta_{(j,0)}(V) \neq 0$ d'après le Lemme 4, et $\delta_{(j,0)}(Z_j) \leqslant K^j$ d'après $(**)$. On obtient donc l'inégalité suivante qui contredit (1)

$$\mathrm{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{W \times \mathbb{C}^\times}\right) \leqslant K^j.$$

(ii) La dérivation D ne laisse pas invariant $I(V)$ et $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$. Alors $\delta_{j,0}(V) \neq 0$ d'après le Lemme 4, de plus comme $\delta_{(j,0)}(Z_j) \leqslant K^j$ d'après $(**)$, on obtient l'inégalité suivante qui contredit (1)

$$\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{H_V}\right)(S_j+1) \leqslant K^j.$$

(iii) La dérivation D ne laisse pas invariant $I(V)$ et $H_V = W \times \mu$, où $\mu \subseteq \mathbb{C}^\times$ est fini. Alors $\delta_{j-1,1}(V) \neq 0$ d'après le Lemme 4, de plus comme $\delta_{j-1,1}(Z_j) \leqslant jK^{j-1}L$ d'après $(**)$, on obtient l'inégalité suivante qui contredit (2)

$$\operatorname{Card}\left(\frac{\Sigma_j}{H_V}\right)(S_j+1) \leqslant jK^{j-1}L.$$

Donc il existe l compris entre 1 et j, σ compris entre 0 et S_j et τ dans Σ_j tels que V ne soit pas une composante de $Z((D^\sigma P_l)_\tau)$. On pose alors

$$P_{j+1} = \sum_{l=1}^{j} \sum_{\substack{0 \leqslant \sigma \leqslant S_j \\ \tau \in \Sigma_j}} \gamma_{\sigma,\tau}^{l} \big(D^\sigma P_l\big)_\tau$$

avec les $\gamma_{\sigma,\tau}^{l}$ choisis génériquement pour qu'aucune composante de Z_j ne soit une composante de $Z(P_{j+1})$. On pose $Z_{j+1} = Z_j.Z(P_{j+1})$. C'est le cycle associé à une intersection complète d'après le choix de P_{j+1}. Le polynôme P_{j+1} vérifie alors $(*)$ et le Lemme 1 montre que les bidegrés du cycle Z_{j+1} vérifie $(**)$. On a donc construit le polynôme P_{j+1} souhaité.

Lorsque $j = m$ le cas où la dérivation D laisse invariant l'idéal $I(V)$ n'apparaît pas. En effet, comme $\dim(V) = 1$, si $H_V = W \times \mathbb{C}^\times$ on a $\dim(W) \leqslant 0$ et il est donc impossible que le point $(1, 0, \ldots, 0)$ appartienne à V.

Pour $j = m+1$ le cycle Z_{m+1} vérifie

$$\delta_{m,1}(Z_{m+1}) \leqslant (m+1)K^m L.$$

Or comme pour $j = 1, \ldots, m+1$ les polynômes P_j s'annulent sur Σ_{m+1} à un ordre $> S_{m+1}$ le Lemme 2 donne l'inégalité

$$(S_{m+1}+1)\operatorname{Card}(\Sigma_{m+1}) \leqslant \delta_{m,1}(Z_{m+1}).$$

Les deux inégalités combinées fournissent une contradiction à (2). Ceci montre qu'il n'existe pas de polynôme non identiquement nul vérifiant les conditions de l'énoncé.

Remerciements. L'auteur remercie M. Laurent pour ses conseils avisés.

Références bibliographiques

[1] D.W. Masser, On polynomials and exponential polynomial in several complex variables, Invent. Math. 63 (1) (1981) 91–95.
[2] P. Philippon, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, Bull. Soc. Math. France 114 (3) (1986) 355–383.
[3] M. Waldschmidt, Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups, Springer-Verlag, 1999.