C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1047–1050

Algèbre/*Algebra*

Opérades Lie-admissibles

Elisabeth Remm

Université de Haute Alsace, Laboratoire de mathématiques et applications, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse cedex, France

Reçu le 12 février 2002 ; accepté après révision le 15 avril 2002

Note présentée par Jean-Louis Koszul.

Résumé Le but de cette Note est de présenter des classes remarquables d'algèbres Lie-admissibles qui contiennent entre autres les algèbres associatives, de Vinberg et pré-Lie et de déterminer leurs opérades associées et les opérades duales. ***Pour citer cet article : E. Remm, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1047–1050.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Lie-admissible operads

Abstract The aim of this paper is to present remarkable classes of Lie-admissible algebras containing in particular the associative algebras, the Vinberg and pre-Lie algebras. We determine the associated operads and their dual operads. ***To cite this article: E. Remm, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1047–1050.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Algèbres Lie-admissibles

Soient (A,μ) une $\mathbb{K}$-algèbre sur un corps commutatif de caractéristique 0. Notons $a_\mu : A^{\otimes 3} \to A$ l'associateur de la loi μ :

$$a_\mu(X_1,X_2,X_3) = \mu\big(\mu(X_1,X_2),X_3\big) - \mu\big(X_1,\mu(X_2,X_3)\big).$$

Soit Σ_n le groupe symétrique d'ordre n. Pour tout $\sigma \in \Sigma_3$, on pose

$$\sigma(X_1,X_2,X_3) = \big(X_{\sigma^{-1}(1)},X_{\sigma^{-1}(2)},X_{\sigma^{-1}(3)}\big).$$

DÉFINITION 1. – L'algèbre $\mathcal{A} = (A,\mu)$ est dite Lie-admissible (*cf.* [1]) si sa loi μ vérifie

$$\sum_{\sigma\in\Sigma_3} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_\mu \circ \sigma = 0.$$

Soit μ une loi d'algèbre Lie-admissible ; alors $[X,Y]_\mu := \mu(X,Y) - \mu(Y,X)$ est une loi d'algèbre de Lie. Si $\mathcal{A} = (A,\mu)$ est Lie-admissible, on notera $\mathcal{A}_L = (A,[\,,]_\mu)$ l'algèbre de Lie ainsi définie.

Remarque. – Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il existe une algèbre Lie-admissible $\mathcal{A} = (A,\mu)$ telle que $\mathfrak{g} = \mathcal{A}_L$. En effet $\mu(X,Y) = \frac{1}{2}[X,Y]$ est une loi Lie-admissible vérifiant la condition demandée. Notons également que dans le cas de la dimension finie, la dérivée covariante [6] d'une connection de Levi-Civita associée à une forme quadratique définie positive détermine également une loi Lie-admissible.

Adresse e-mail : E.Remm@uha.fr (E. Remm).

S1631-073X(02)02408-1/FLA

2. Classes d'algèbres Lie-admissibles

2.1. *Algèbres G_i-associatives.* – Notons $G_1 = \{\mathrm{Id}\}$, $G_2 = \{\mathrm{Id}, \tau_{12}\}$, $G_3 = \{\mathrm{Id}, \tau_{23}\}$, $G_4 = \{\mathrm{Id}, \tau_{13}\}$, $G_5 = \{\mathrm{Id}, 3 - \mathit{cycles}\} = \mathcal{A}_3$, et $G_6 = \Sigma_3$ les différents sous-groupes de Σ_3.

DÉFINITION 2. – Une $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A} = (A, \mu)$ est dite G_i-associative si sa loi μ vérifie

$$\sum_{\sigma \in G_i} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} a_\mu \circ \sigma = 0. \qquad (*)$$

Notons qu'une algèbre (A, μ) vérifiant $(*)$ est nécessairement Lie-admissible.

2.2. *Description.* –
(a) $G_1 = \{\mathrm{Id}\}$. Les algèbres correspondantes sont les algèbres associatives.
(b) $G_2 = \{\mathrm{Id}, \tau_{12}\}$. La relation $(*)$ s'écrit

$$\mu\big(\mu(X_1, X_2), X_3\big) - \mu\big(X_1, \mu(X_2, X_3)\big) - \mu\big(\mu(X_2, X_1), X_3\big) + \mu\big(X_2, \mu(X_1, X_3)\big) = 0.$$

Les algèbres G_2-associatives sont les algèbres de Vinberg (appelées aussi algèbres symétriques-gauche) [10]. Si $\mathcal{A}$ est de dimension finie, l'algèbre de Lie associée $\mathcal{A}_L$ est munie d'une structure affine.
(c) $G_3 = \{\mathrm{Id}, \tau_{23}\}$. Les algèbres correspondantes sont les algèbres pré-Lie (*voir* [5]). Ces algèbres sont aussi appelées symétriques-droite. Notons que si la loi $x.y$ est pré-Lie, alors la loi $x \odot y = y.x$ est de Vinberg.

Les algèbres G_4 et G_5-associatives ne semblent pas avoir fait l'objet d'études particulières. Notons que si μ est G_5-associative, elle vérifie :

$$\begin{aligned}&\mu\big(\mu(X_1, X_2), X_3\big) - \mu\big(X_1, \mu(X_2, X_3)\big) + \mu\big(\mu(X_2, X_3), X_1\big)\\ &\quad - \mu\big(X_2, \mu(X_3, X_1)\big) + \mu\big(\mu(X_3, X_1), X_2\big) - \mu\big(X_3, \mu(X_1, X_2)\big) = 0.\end{aligned}$$

Si l'on suppose de plus que μ est anticommutative ($[,]_\mu = 2\mu$) la relation ci-dessus est la condition de Jacobi de la loi d'algèbre de Lie μ. Dans l'optique d'une des-cription d'une version « non-commutative » des algèbres de Lie donnée par exemple par les algèbres de Leibniz [8], les algèbres G_5-associatives peuvent être également considérées comme des candidats naturels.

3. Opérades associées aux algèbres G_i-associatives

Soit $\mathbb{K}[\Sigma_n]$ la $\mathbb{K}$-algèbre du groupe symétrique Σ_n. Une opérade $\mathcal{P}$ est définie par une suite d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{P}(n)$, $n \geqslant 1$, telle que $\mathcal{P}(n)$ soit un module sur $\mathbb{K}[\Sigma_n]$ et par des applications de composition

$$\circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n + m - 1), \quad i = 1, \ldots, n$$

satisfaisant des propriétés « associatives », les axiomes de May [7] et [9].

Tout $\mathbb{K}[\Sigma_n]$-module E engendre une opérade libre notée $\mathcal{F}(E)$ [5] vérifiant $\mathcal{F}(E)(1) = \mathbb{K}$, $\mathcal{F}(E)(2) = E$. En particulier si $E = \mathbb{K}[\Sigma_2]$, le module libre $\mathcal{F}(E)(n)$ admet comme base les « produits parenthésés » de n variables indexées par $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Soit E un $\mathbb{K}[\Sigma_2]$-module et R un $\mathbb{K}[\Sigma_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$. On note $\mathcal{R}$ l'idéal engendré par R, c'est-à-dire l'intersection de tous les idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{F}(E)$ tels que $\mathcal{I}(1) = \{0\}$, $\mathcal{I}(2) = \{0\}$ et $\mathcal{I}(3) = R$.

On appelle opérade binaire quadratique engendrée par E et par les relations R l'opérade $\mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$, notée également $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}$, définie par :

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)(n) = \mathcal{F}(E)(n)/\mathcal{R}(n).$$

Son opérade quadratique duale est définie par $\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E^\vee, R^\perp)$, où $E^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$.

3.1. *L'opérade $\mathcal{L}ieAdm$.* – Considérons R_6 le $\mathbb{K}[\Sigma_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par le vecteur

$$\begin{aligned}u_6 &= x_1.(x_2.x_3) + x_2.(x_3.x_1) + x_3.(x_1.x_2) - x_2.(x_1.x_3) - x_3.(x_2.x_1) - x_1.(x_3.x_2)\\ &\quad - (x_1.x_2).x_3 - (x_2.x_3).x_1 - (x_3.x_1).x_2 + (x_2.x_1).x_3 + (x_3.x_2).x_1 + (x_1.x_3).x_2\end{aligned}$$

et soit $\mathcal{R}_6$ l'idéal de $\mathcal{F}(E)$ engendré par R_6.

DÉFINITION 3. – L'opérade Lie-admissible, notée $\mathcal{L}ieAdm$ est l'opérade binaire quadratique

$$\mathcal{L}ieAdm = \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_6.$$

3.2. – On peut également définir les opérades binaires quadratiques associées à chacune des algèbres G_i-associatives, $(i = 1, \ldots, 5)$:

$i = 1$: $\mathcal{A}ss = \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_1$ où R_1 est le $\mathbb{K}[\Sigma_3]$-sous-module engendré par les vecteurs

$$x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3,$$

$\mathcal{A}ss$ est l'opérade des algèbres associatives.

$i = 2$: $\mathcal{V}inb = \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_2$ avec R_2 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3) - x_2.(x_1.x_3) - (x_1.x_2).x_3 + (x_2.x_1).x_3,$$

$i = 3$: $\mathcal{P}reLie = \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_3$ avec R_3 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3) - x_1.(x_3.x_2) - (x_1.x_2).x_3 + (x_1.x_3).x_2,$$

$i = 4$: $G_4 - \mathcal{A}ss = \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_4$ avec R_4 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3) - x_3.(x_2.x_1) - (x_1.x_2).x_3 + (x_3.x_2).x_1,$$

$i = 5$: $G_5 - \mathcal{A}ss = \mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_5$ avec R_5 engendré par

$$x_1.(x_2.x_3) + x_2.(x_3.x_1) + x_3.(x_1.x_2) - (x_1.x_2).x_3 - (x_2.x_3).x_1 - (x_3.x_1).x_2.$$

4. Opérades duales associées aux algèbres G_i-associatives

Considérons le produit scalaire sur $\mathcal{F}(E)(3)$ pour lequel les vecteurs de base sont orthogonaux et tel que

$$\big\langle x_i.(x_j.x_k), x_i.(x_j.x_k)\big\rangle = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \qquad \big\langle (x_i.x_j).x_k, (x_i.x_j).x_k\big\rangle = -\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix},$$

où $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}$ est la signature de σ.

Soit R_6 le $\mathbb{K}[\Sigma_3]$-sous-module déterminant l'opérade $\mathcal{L}ieAdm$. L'orthogonal par rapport au produit scalaire défini ci-dessus, $R_6^{\perp}$, est de dimension 11. Soit R_6' le $\mathbb{K}[\Sigma_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par les relations

$$(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}), \quad (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)} - (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(3)})x_{\sigma(2)},$$
$$(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)} - (x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)})x_{\sigma(3)}.$$

Alors $\dim R_6' = 11$ et $\langle u, v\rangle = 0$ pour tout $v \in R_6'$, u étant le vecteur générateur de R_6. Ceci implique que $R_6' \simeq R_6^{\perp}$ et par définition l'opérade duale de $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_6 = \mathcal{L}ieAdm$ notée $\mathcal{L}ieAdm^!$ est par définition l'opérade binaire quadratique $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}_6^{\perp}$.

PROPOSITION 1. – *Une algèbre A sur l'opérade $\mathcal{L}ieAdm^!$ est une algèbre associative qui est abélienne d'ordre 3, c'est-à-dire vérifiant*

$$abc = acb = bac$$

pour tout $a, b, c \in A$.

Les opérades duales $\mathcal{A}ss^!$ et $\mathcal{P}reLie^!$ ont été déterminées dans [4] et [3]. La première étant autoduale vérifie $\mathcal{A}ss^! = \mathcal{A}ss$ et la deuxième correspond à l'opérade $\mathcal{P}erm$.

PROPOSITION 2. – *Les opérades duales de $\mathcal{V}inb$, $G_4 - \mathcal{A}ss$, $G_5 - \mathcal{A}ss$ sont les opérades quadratiques dont les algèbres correspondantes sont associatives et vérifient respectivement* :

- *pour $\mathcal{V}inb^!$: $abc = bac$;*
- *pour $G_4 - \mathcal{A}ss^!$: $abc = cba$;*
- *pour $G_5 - \mathcal{A}ss^!$: $abc = bca = cab$.*

Esquisse de preuve. – $R_2^\perp$ est le $\mathbb{K}[\Sigma_3]$-sous-module de $\mathcal{F}(E)(3)$ engendré par les vecteurs

$$\big(x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3\big), \quad \big(x_1.(x_2.x_3) - x_2.(x_1.x_3)\big), \quad \big(x_1.(x_2.x_3) - (x_2.x_1).x_3\big)$$

pour tout $x_1, x_2, x_3 \in E$.

De même

$$R_4^\perp = \big\langle \big(x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3\big), \big(x_1.(x_2.x_3) - x_3.(x_2.x_1)\big), x_1.(x_2.x_3) - (x_3.x_2).x_1\big) \big\rangle$$
$$R_5^\perp = \big\langle \big(x_1.(x_2.x_3) - (x_1.x_2).x_3\big), \big(x_1.(x_2.x_3) - x_2.(x_3.x_1)\big), x_1.(x_2.x_3) - (x_2.x_3).x_1\big), \big(x_1.(x_2.x_3) - x_3.(x_1.x_2)\big), \big(x_1.(x_2.x_3) - (x_3.x_1).x_2\big) \big\rangle$$

et $\dim R_4^\perp = 9$, $\dim R_5^\perp = 10$. Il suffit ensuite de remarquer que $(\mathcal{F}(E)/\mathcal{R})^!$ est par définition l'opérade binaire quadratique $\mathcal{F}(E)/\mathcal{R}^\perp$ d'où le résultat. □

5. Dualité de Koszul des opérades provenant des algèbres G_i-associatives

Rappelons qu'une opérade quadratique $\mathcal{P}$ est dite de Koszul si pour toute $\mathcal{P}$-algèbre libre $F_\mathcal{P}(V)$ on a $H_i^\mathcal{P}(F_\mathcal{P}(V)) = 0$, $i > 0$.

PROPOSITION 3. – *Les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{V}inb$, $\mathcal{P}reLie$ sont de Koszul. Les opérades $G_4 - \mathcal{A}ss$ et $G_5 - \mathcal{A}ss$ ne sont pas de Koszul.*

Démonstration. – En effet d'après [4], [3], et [2] les opérades $\mathcal{A}ss$, $\mathcal{P}reLie$ sont de Koszul. Compte tenu des relations liant $\mathcal{P}reLie$ et $\mathcal{V}inb$, cette dernière est aussi de Koszul. Pour les deux autres, nous allons montrer qu'elles ne sont pas de Koszul en utilisant leur série de Poincaré et le critère dû à Ginzburg–Kapranov [4]. La série est définie, pour une opérade $\mathcal{P}$, par

$$g_\mathcal{P}(x) := \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \dim \mathcal{P}(n) \frac{x^n}{n!},$$

où $\mathcal{P}(1) = \mathbb{K}$. Les séries de Poincaré d'une opérade de Koszul $\mathcal{P}$ et de sa duale $\mathcal{P}^!$ sont reliées par l'équation fonctionnelle

$$g_\mathcal{P}\big(g_{\mathcal{P}^!}(x)\big) = x.$$

On a [11]

$$g_{\mathcal{G}_4-\mathcal{A}ss}(x) = -x + x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{59}{4!}x^4 + \cdots, \quad g_{\mathcal{G}_4-\mathcal{A}ss^!}(x) = -x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$
$$g_{\mathcal{G}_5-\mathcal{A}ss}(x) = -x + x^2 - \frac{10}{3!}x^3 + \frac{39}{4!}x^4 + \cdots, \quad g_{\mathcal{G}_5-\mathcal{A}ss^!}(x) = -x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \cdots$$

et ces deux séries ne sont pas respectivement inverses l'une de l'autre. Ces opérades ne sont pas de Koszul d'après [4].

Références bibliographiques

[1] A.A. Albert, On the power-associative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948) 552–593.
[2] F. Chapoton, Algèbres pré-Lie et algèbres de Hopf liées à la renormalisation, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (2001) 681–684.
[3] F. Chapoton, M. Livernet, Pre-Lie algebra and the rooted trees operad, Internat. Math. Res. Notices 8 (2001) 395–408.
[4] V. Ginzburg, M. Kapranov, Koszul duality for operads, Duke Math. J. 76 (1) (1994) 203–272.
[5] M. Gerstenhaber, The cohomology structure of an associative ring, Ann. of Math. (2) 78 (1963) 267–288.
[6] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Vol. I, Wiley, New York, 1963.
[7] J.L. Loday, La renaissance des opérades, Séminaire Bourbaki 1994/95, Astérisque 237 (1996) 47–74.
[8] J.L. Loday, Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz, Enseign. Math. 39 (1993) 269–293.
[9] J.P. May, Geometry of Iterated Loop Spaces, Lecture Notes in Math., Vol. 271, Springer-Verlag, 1972.
[10] A. Nijenhuis, Sur une classe de propriétés communes a quelques types différents d'algèbres, Enseign. Math. (2) 14 (1968) 225–277.
[11] E. Remm, Structures affines sur les algèbres de Lie et opérades Lie-admissibles, Thèse, Mulhouse, 2001.