C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1055–1060

Théorie des groupes/*Group Theory*

Points fixes des automorphismes quasi-semi-simples

François Digne [a], Jean Michel [a,b]

[a] **LAMFA, Université de Picardie-Jules Verne, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens, France**

[b] **Institut de mathématiques, Université Paris VII, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France**

Reçu et accepté le 15 avril 2002

Note présentée par Jacques Tits.

Résumé Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe sur un corps algébriquement clos. Un automorphisme algébrique σ de $\mathbf{G}$ est dit *quasi-semi-simple* s'il stabilise un couple formé d'un tore maximal de $\mathbf{G}$ et d'un sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ le contenant ; la composante neutre $(\mathbf{G}^\sigma)^0$ du groupe des points fixes $\mathbf{G}^\sigma$ est alors réductive. Le but de cette Note est d'expliciter le système de racines de $(\mathbf{G}^\sigma)^0$. Au passage nous accomplissons avec un certain retard la promesse faite dans la preuve de [3], 1.15, complétant ainsi cette preuve. ***Pour citer cet article : F. Digne, J. Michel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1055–1060.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Fixed points of quasi-semi-simple automorphisms

Abstract Let $\mathbf{G}$ be a connected algebraic reductive group over an algebraically closed field. An algebraic automorphism σ of $\mathbf{G}$ is *quasi-semi-simple* if it stabilises a pair of a maximal torus of $\mathbf{G}$ and a Borel subgroup of $\mathbf{G}$ containing it; then the connected component $(\mathbf{G}^\sigma)^0$ of the fixed-point group $\mathbf{G}^\sigma$ is a reductive group. We give an explicit description of its root system which allows us, as promised in [3], 1.15 to (belatedly) complete the proof which was left incomplete there. ***To cite this article: F. Digne, J. Michel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1055–1060.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The proof of all the statements in this section can be found in the French version.

Let $\mathbf{G}$ be a connected algebraic reductive group over an algebraically closed field k. Let σ be a quasi-semi-simple automorphism of $\mathbf{G}$, that is, an algebraic automorphism of $\mathbf{G}$ which stabilises a pair $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ consisting of a maximal torus of $\mathbf{G}$ and a Borel subgroup containing it. Let $\Sigma \subset X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{R}$ be the root system of $\mathbf{G}$ relative to $\mathbf{T}$. For each $\alpha \in \Sigma$ we denote by $\mathbf{U}_\alpha$ the corresponding root subgroup and we choose an isomorphism $x_\alpha : k \to \mathbf{U}_\alpha$. For $\mathcal{O} \in \Sigma/\sigma$, where we have denoted by Σ/σ the set of orbits of σ on Σ, there is a unique $C_{\mathcal{O}} \in k^\times$ such that for $\alpha \in \mathcal{O}$ we have ${}^{\sigma^{|\mathcal{O}|}}x_\alpha(\lambda) = x_\alpha(C_{\mathcal{O}}\lambda)$. The scalar $C_{\mathcal{O}}$ depends only on σ, not on the choice of x_α; we will write also C_α for $C_{\mathcal{O}}$ when $\alpha \in \mathcal{O}$. A general reference for the above is [3], 1.8.

Adresses e-mail : digne@u-picardie.fr (F. Digne); jmichel@math.jussieu.fr (J. Michel).

S1631-073X(02)02407-X/FLA

In the statements below, given an $\mathbb{R}$-vector space V, and $R \subset V - \{0\}$ a finite subset, we say that "R is a root system" (meaning that it is a root system in the subspace $<R>$ it generates in the sense of [1], VI, 1.1, Définition 1); this makes sense since (*cf.* [1], VI, 1.1, Lemme 1) for any $\alpha \in R$ there is at most one reflection s of $<R>$ such that $s(\alpha) = -\alpha$ and $s(R) = R$, so there is at most one way to make R a root system in $<R>$.

PROPOSITION 1.1. – *$\mathbf{G}^\sigma$ is reductive and the root system of $(\mathbf{G}^\sigma)^0$ is isomorphic to the system $\{\mathcal{O}' \mid \mathcal{O} \in \Sigma/\sigma, C_\mathcal{O} = 1\}$, where for $\mathcal{O} \in \Sigma/\sigma$ we set $\mathcal{O}' = |\mathcal{O}|^{-1} \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} \alpha \in X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{R}$, except that if* $\operatorname{char}(k) = 2$ *one needs to exclude the orbits $\mathcal{O}$ containing two roots whose sum is a root.*

This describes in principle the root system Σ_σ of $(\mathbf{G}^\sigma)^0$, provided we can compute $C_\mathcal{O}$. One should notice that though (*cf.*, e.g., [2], 13.2.2) $\Sigma' = \{\mathcal{O}' \mid \mathcal{O} \in \Sigma/\sigma\}$ is a root system (not reduced in general), Σ_σ is not in general a closed subsystem of Σ', and the $C_\mathcal{O}$ do not in general multiply when the roots add. We shall obviate all these drawbacks by introducing another root system $\overline{\Sigma}$ (which will be most of the time dual to Σ') where none of these problems occur.

By the way, we note that when there exists an orbit $\mathcal{O}$ containing two roots whose sum is again a root, and such that $C_\mathcal{O} = 1$, then 1.1 contradicts what seems to suggest [5], Remark 8.3(a), which is that the root system of $(\mathbf{G}^\sigma)^0$ should be a subsystem of the system derived from Σ' by removing short roots when Σ' is not reduced (though that subsystem may be obtained in other cases, *cf.* 1.6 below).

DEFINITION 1.2. – For $\mathcal{O} \in \Sigma/\sigma$ let $\overline{\mathcal{O}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{O}} \alpha \in X(\mathbf{T}) \otimes \mathbb{R}$; for $\alpha \in \mathcal{O}$ we also write $\overline{\alpha}$ for $\overline{\mathcal{O}}$. Finally, let $\overline{\Sigma} = \{\overline{\mathcal{O}} \mid \mathcal{O} \in \Sigma/\sigma\}$.

PROPOSITION 1.3. – *$\overline{\Sigma}$ is a reduced root system.*

If for $\alpha \in \Sigma$ we denote by $\mathcal{O}_\alpha \in \Sigma/\sigma$ the orbit of α, we note that the fibres of the map $\mathcal{O} \mapsto \overline{\mathcal{O}}$ are of cardinality 1, except when there exist $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_\alpha$ whose sum is a root (then $\overline{\alpha} = \overline{\alpha + \beta}$).

DEFINITION 1.4. – For $\overline{\mathcal{O}} \in \overline{\Sigma}$, let $C_{\overline{\mathcal{O}}} = C_\alpha$ where α is of maximal height (in absolute value) amongst $\{\beta \mid \overline{\beta} = \overline{\mathcal{O}}\}$.

Thus, when there exist $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_\alpha$ whose sum is a root, we have $C_{\overline{\alpha}} = C_{\alpha+\beta}$ (recall (*cf.* [3], 1.8(v)) that in this case $C_{\alpha+\beta} = -C_\alpha$). We now state

THEOREM 1.5. – *If $\overline{\alpha} \in \overline{\Sigma}$ then $C_{\overline{\alpha}} = C^{-1}_{\overline{-\alpha}}$, and if $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} \in \overline{\Sigma}$ satisfy $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = 0$, then $C_{\overline{\alpha}} C_{\overline{\beta}} C_{\overline{\gamma}} = 1$.*

This shows that the set of $\overline{\mathcal{O}}$ for $\mathcal{O}' \in \Sigma_\sigma$ is a closed subsystem of $\overline{\Sigma}$. It also shows, as was announced in [3], 1.15:

COROLLARY 1.6. – *If $C_\alpha = 1$ for all simple roots (with respect to the ordering on Σ defined by* **B**) *and* $\operatorname{char}(k) \neq 2$ *then Σ_σ is the subsystem derived from Σ' by removing long roots when Σ' is not reduced.*

([3], 1.15 uses more generally that if $C_\alpha = \pm 1$ for all simple roots then the same holds for all roots but this also results obviously from 1.5.)

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur un corps algébriquement clos k, et soit σ un automorphisme quasi-semi-simple de $\mathbf{G}$, c'est-à-dire un automorphisme algébrique de $\mathbf{G}$ qui stabilise un couple $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ formé d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel le contenant. Le groupe $\mathbf{G}^\sigma$ est réductif (*cf.* 2.1 ci-dessous). Pour décrire son système de racines nous introduisons quelques notations.

Soit Σ le système de racines de $\mathbf{G}$ relatif à $\mathbf{T}$. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note $\mathbf{U}_\alpha$ le sous-groupe radiciel correspondant et on choisit un isomorphisme $x_\alpha : k \to \mathbf{U}_\alpha$. Si $\mathcal{O}$ est un élément de l'ensemble Σ/σ des orbites de Σ sous σ, il existe un unique élément $C_\mathcal{O} \in k^\times$, indépendant du choix des x_α, tel que pour $\alpha \in \mathcal{O}$

on ait ${}^{\sigma^{|\mathcal{O}|}}x_\alpha(\lambda) = x_\alpha(C_{\mathcal{O}}\lambda)$. Pour $\alpha \in \mathcal{O}$ nous notons aussi C_α pour $C_{\mathcal{O}}$, et parfois (seule notation utilisée dans [3]) nous écrirons $C_{\sigma,\alpha}$ pour préciser σ. Pour $\mathcal{O} \in \Sigma/\sigma$, nous posons $\mathcal{O}' = |\mathcal{O}|^{-1}\sum_{\alpha\in\mathcal{O}}\alpha \in X(\mathbf{T})\otimes\mathbb{R}$.

PROPOSITION 2.1. – *Le groupe* $\mathbf{G}^\sigma$ *est réductif et le système de racines de* $(\mathbf{G}^\sigma)^0$ *est isomorphe au système de racines que nous noterons* Σ_σ, *formé des* $\mathcal{O}'$ *pour les* $\mathcal{O} \in \Sigma/\sigma$ *tels que* $C_{\mathcal{O}} = 1$, *excepté que quand* $\mathrm{car}(k) = 2$ *il faut exclure les orbites* $\mathcal{O}$ *qui contiennent deux racines dont la somme est une racine.*

Démonstration. – L'énoncé est essentiellement une reformulation de [3], 1.8(v) qui montre que les sous-groupes radiciels de $(\mathbf{G}^\sigma)^0$ correspondent aux orbites décrites ci-dessus. Les racines correspondantes sont les restrictions à $(\mathbf{T}^\sigma)^0$ des racines de ces orbites ; or on peut identifier $X((\mathbf{T}^\sigma)^0)$ à l'image du projecteur $|\sigma|^{-1}(1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{|\sigma|-1})$ où l'on a noté $|\sigma|$ l'ordre de σ sur Σ, d'où l'identification des racines aux $\mathcal{O}'$ correspondants. □

Le but de cette Note est de donner une façon commode de déterminer Σ_σ.

Notons que, quand R est un ensemble de vecteurs non nuls d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V, cela a un sens de dire que « R est un système de racines », pour dire que c'est un système de racines au sens de [1], VI, 1.1, Définition 1, dans le sous-espace $<R>$ qu'il engendre : en effet (*cf.* [1], VI, 1.1, Lemme 1) pour $\alpha \in R$ il y a au plus une réflexion s de $<R>$ telle que $s(\alpha) = -\alpha$ et $s(R) = R$.

Rappelons le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2 (*cf.* e.g. [2], 13.2.2). – $\Sigma' = \{\mathcal{O}' \mid \mathcal{O} \in \Sigma/\sigma\}$ *est un système de racines.*

Notons que Σ' n'est pas toujours réduit. Le système Σ_σ est un sous-système de Σ' qui n'est pas en général clos.

Nous allons voir, par contre, que Σ_σ correspond à un sous-système clos dans un autre système $\overline{\Sigma}$, qui est le plus souvent dual de Σ'.

PROPOSITION 2.3. – *Pour* $\mathcal{O} \in \Sigma/\sigma$, *soit* $\overline{\mathcal{O}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{O}}\alpha \in X(\mathbf{T})\otimes\mathbb{R}$ *; alors* $\overline{\Sigma} = \{\overline{\mathcal{O}} \mid \mathcal{O} \in \Sigma/\sigma\}$ *est un système de racines réduit.*

Démonstration. – Nous pouvons clairement supposer que σ a une seule orbite sur l'ensemble des composantes irréductibles de Σ. Si $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{i=k}\Sigma_i$, où les composantes sont permutées transitivement par σ, le système $\overline{\Sigma}$ est proportionnel au système analogue construit avec σ^k et Σ_1. Nous pouvons donc supposer Σ irréductible. Alors σ est d'ordre 1, 2 ou 3 sur Σ. S'il est d'ordre 1, le résultat est trivial. Sinon nous allons démontrer le résultat en comparant $\overline{\Sigma}$ à Σ'. Si σ est d'ordre 3, alors (Σ, Σ') est de type (D_4, G_2) et $\overline{\Sigma}$ se déduit de Σ' en multipliant les racines courtes par 3, ce qui donne un système de racines, isomorphe au dual de Σ'. Si σ est d'ordre 2, alors (Σ, Σ') est d'un des types (D_n, B_{n-1}), (E_6, F_4), (A_{2n+1}, C_n) ou (A_{2n}, BC_n). Dans les 3 premiers cas, $\overline{\Sigma}$ se déduit de Σ' en multipliant les racines courtes par 2 et est encore isomorphe au dual de Σ' ; dans le dernier cas $\overline{\Sigma}$ se déduit de Σ' en multipliant par 2 les racines moyennes et en oubliant les racines courtes, donc $\overline{\Sigma}$ est un système de racines de type C_n. □

Pour $\alpha \in \Sigma$ nous notons $\mathcal{O}_\alpha$ l'orbite de α sous σ et nous écrivons parfois $\overline{\alpha}$ pour $\overline{\mathcal{O}_\alpha}$. Notons que les fibres de l'application $\mathcal{O} \mapsto \overline{\mathcal{O}}$ sont de cardinal 1, sauf quand il existe deux racines $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_\alpha$ dont la somme est une racine, auquel cas $\overline{\alpha} = \overline{\alpha+\beta}$.

DÉFINITION 2.4. – Pour $\overline{\mathcal{O}} \in \overline{\Sigma}$, on pose $C_{\overline{\mathcal{O}}} = C_\alpha$ où α est une racine de plus grande hauteur (en valeur absolue) dont l'orbite a pour somme $\overline{\mathcal{O}}$.

Donc, quand il existe deux racines $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_\alpha$ dont la somme est une racine, on pose $C_{\overline{\alpha}} = C_{\alpha+\beta}$. Notons que (*cf.* [3], 1.8(v)) on a alors $C_{\alpha+\beta} = -C_\alpha$.

THÉORÈME 2.5. – *Si* $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} \in \overline{\Sigma}$ *sont telles que* $\overline{\alpha}+\overline{\beta}+\overline{\gamma} = 0$, *alors* $C_{\overline{\alpha}}C_{\overline{\beta}}C_{\overline{\gamma}} = 1$.

Démonstration. – Notons que, par définition, $C_{\sigma,\alpha} = C_{\sigma^{|\mathcal{O}_\alpha|},\alpha}$, en particulier $C_{\sigma,\alpha} = C_{\sigma^i,\alpha}$ où σ^i est la plus petite puissance de σ qui laisse fixe la composante irréductible de α dans Σ. Par les mêmes arguments que dans la preuve de 2.3, nous pouvons supposer Σ irréductible, et σ d'ordre 1, 2 ou 3 sur Σ.

Si σ agit trivialement sur Σ, alors par le théorème sur les isogénies (*cf.* [4], 9.6.2) cet automorphisme est de la forme $\operatorname{ad} s$, où $s \in \mathbf{T}$. On a $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\beta} = \beta$, $\overline{\gamma} = \gamma$ et on trouve $C_{\overline{\alpha}} = \alpha(s)$, $C_{\overline{\beta}} = \beta(s)$, $C_{\overline{\gamma}} = \gamma(s)$ donc le théorème se réduit à l'égalité $\alpha(s)\beta(s)\gamma(s) = 1$, immédiate par définition à partir de l'hypothèse $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Si Σ est irréductible et σ non trivial, nous pouvons supposer Σ de type A_n, D_n ou E_6, et σ d'ordre 2 ou Σ de type D_4 et σ d'ordre 3. Dans ce cas pour tout produit scalaire invariant par le groupe de Weyl toutes les racines de Σ ont même longueur et nous choisissons l'unique produit scalaire tel que les racines soient de carré scalaire égal à 2. Les produits scalaires de deux racines non colinéaires valent alors 0, 1 ou -1 et le sous-système engendré par deux telles racines est de type A_2 ou $A_1 \times A_1$; en particulier si $\alpha, \beta \in \Sigma$ alors $\alpha + \beta \in \Sigma$ si et seulement si $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$.

Nous allons alors établir deux lemmes sur les coefficients $C_{\mathcal{O}}$. Commençons par rappeler

LEMME 2.6. – *Si toutes les racines ont même longueur, alors, pour un choix convenable des isomorphismes x_α, il existe des signes $N_{\alpha,\beta}$ tels que pour tous $\alpha, \beta \in \Sigma$ tels que $\alpha + \beta \in \Sigma$ on ait*

$$\bigl[x_\alpha(\lambda), x_\beta(\mu)\bigr] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta}\lambda\mu). \tag{1}$$

Démonstration. – Ce lemme est le contenu de [2], 5.2.3 (*voir* aussi [6], §2) si on tient compte que :

– vu les remarques ci-dessus sur le sous-système engendré par α et β, les seuls entiers positifs i, j tels que $i\alpha + j\beta$ soit une racine sont $i = j = 1$;
– le coefficient $N_{\alpha,\beta}$ qui est $C_{1,1,\alpha,\beta}$ dans les notations de [2] 5.2.3 est bien le même que celui de [2], p. 52 d'après la formule pour $M_{r,s,i}$ de [2], p. 61 et 5.2.2 ;
– les x_α peuvent être choisis tel que les $N_{\alpha,\beta}$ soient des signes d'après [2], 4.2.1 (on a $p = 0$ dans notre cas). $\square$

On en déduit le

LEMME 2.7. – *Si toutes les racines ont même longueur et $\alpha, \beta \in \Sigma$ sont tels que $\gamma = \alpha + \beta \in \Sigma$, alors $C_\gamma^{n/|\mathcal{O}_\gamma|} = C_\alpha^{n/|\mathcal{O}_\alpha|} C_\beta^{n/|\mathcal{O}_\beta|}$ où $n = \operatorname{ppcm}(|\mathcal{O}_\alpha|, |\mathcal{O}_\beta|)$.*

Démonstration. – Pour une racine α, définissons c_α par ${}^\sigma x_\alpha(\lambda) = x_{{}^\sigma\alpha}(c_\alpha\lambda)$; alors $C_{\mathcal{O}} = \prod_{\alpha\in\mathcal{O}} c_\alpha$. En appliquant σ au membre de droite de (2.6) et comparant le membre de droite obtenu à celui donné par (2.6) pour le commutateur de $x_{{}^\sigma\alpha}(c_\alpha\lambda)$ et $x_{{}^\sigma\beta}(c_\beta\mu)$, on obtient :

$$c_{\alpha+\beta} = \frac{N_{{}^\sigma\alpha,{}^\sigma\beta}}{N_{\alpha,\beta}} c_\alpha c_\beta. \tag{2}$$

En faisant le produit des équations (2) pour tous les éléments de l'orbite du couple (α, β) sous σ, on obtient alors le lemme. $\square$

LEMME 2.8. – *On a $C_{-\mathcal{O}} = C_{\mathcal{O}}^{-1}$.*

Démonstration. – Pour $\alpha \in \mathcal{O}$, l'automorphisme $\sigma^{|\mathcal{O}|}$ stabilise le groupe réductif $\mathbf{H} = <\mathbf{U}_\alpha, \mathbf{U}_{-\alpha}>$ ainsi que son tore maximal $\mathbf{S} = \mathbf{T} \cap \mathbf{H}$ et son système de racines. Par le même raisonnement que ci-dessus, il est donc de la forme $\operatorname{ad} s$, où $s \in \mathbf{S}$. On trouve alors $C_{\mathcal{O}} = \alpha(s)$, $C_{-\mathcal{O}} = (-\alpha)(s)$, d'où le lemme. $\square$

Revenons maintenant à la preuve de 2.5.

Si σ est d'ordre 2, et $\alpha \neq {}^\sigma\alpha$, soit le sous-système engendré par α et ${}^\sigma\alpha$ est de type A_1^2 (alors $\langle \alpha, {}^\sigma\alpha \rangle = 0$), soit ce sous-système est de type A_2 ; dans ce dernier cas, comme σ préserve le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$, il induit un automorphisme non trivial de A_2 préservant les racines positives ; on a alors nécessairement $\langle\alpha, {}^\sigma\alpha\rangle = -1$ et Σ est alors de type A_{2n}. Si σ est d'ordre 3 et $\alpha \neq {}^\sigma\alpha$, alors le sous-système engendré par α, ${}^\sigma\alpha$ et ${}^{\sigma^2}\alpha$ est nécessairement de type A_1^3 et $\langle\alpha, {}^\sigma\alpha\rangle = 0$. On en déduit que si $\overline{\alpha} \notin \Sigma$, alors $\langle\overline{\alpha}, \overline{\alpha}\rangle = 2|\sigma|$.

Avec les notations de l'énoncé, de $\langle\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}, \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma}\rangle = 0$ on tire :

$$\langle\overline{\alpha}, \overline{\alpha}\rangle + \langle\overline{\beta}, \overline{\beta}\rangle + \langle\overline{\gamma}, \overline{\gamma}\rangle = -2\langle\overline{\alpha}, \overline{\beta}\rangle - 2\langle\overline{\alpha}, \overline{\gamma}\rangle - 2\langle\overline{\gamma}, \overline{\beta}\rangle. \tag{3}$$

Le membre de gauche est strictement positif, donc un des termes de droite doit être strictement négatif, donc un des produits scalaires $\langle\sigma^i x, \sigma^j y\rangle$ (où $x, y \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$) doit être égal à -1. Quitte à permuter α, β, γ ou à les remplacer par un autre élément de leur orbite, on peut supposer que $\langle\alpha, \beta\rangle = -1$, c'est-à-dire que $\alpha + \beta \in \Sigma$.

Notons que, vu la Définition 2.4 de $C_{\overline{\alpha}}$, nous pouvons supposer désormais que pour chaque $\overline{\alpha}$ nous avons fixé α tel que $C_{\overline{\alpha}} = C_\alpha$. En particulier, avec ce choix, si $\overline{\mathcal{O}} = \alpha \in \Sigma$ alors $C_{\overline{\mathcal{O}}} = C_\alpha$. Nous allons énumérer les cas suivant le nombre de racines de $\{\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}\}$ qui sont dans Σ.

• cas 0 : $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} \notin \Sigma$. Alors les orbites de α et β ayant même cardinal $|\sigma|$, on a $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\alpha + \beta} = \overline{-\gamma}$. Avec le choix fait ci-dessus d'un relevé γ de $\overline{\gamma}$, quitte à remplacer γ par un autre élément de son orbite, on a $\alpha + \beta = -\gamma$. Alors 2.7, combiné avec 2.8, donne $C_\alpha C_\beta = C_\gamma^{-1}$, d'où le résultat car dans ce cas nous avons $C_{\overline{\alpha}} = C_\alpha$, $C_{\overline{\beta}} = C_\beta$, et $C_{\overline{\gamma}} = C_\gamma$.

• cas 3. $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma} \in \Sigma$. Alors 2.7 et 2.8 appliqués à la somme $\alpha + \beta = -\gamma$ donnent immédiatement le résultat.

• cas 1. Si $\overline{\alpha} = \alpha \in \Sigma$ et $\overline{\beta}, \overline{\gamma} \notin \Sigma$, en utilisant l'invariance du produit scalaire par σ, (3) s'écrit :

$$2 + 4|\sigma| = -2|\sigma|\langle\alpha, \beta\rangle - 2|\sigma|\langle\alpha, \gamma\rangle - 2|\sigma|\langle\beta, \overline{\gamma}\rangle.$$

Le membre de droite est divisible par $2|\sigma|$ et le membre de gauche ne l'est pas : ce cas est impossible. On raisonne de même si c'est $\overline{\beta}$ ou $\overline{\gamma}$ qui est dans σ.

• cas 2. Il nous reste le cas où deux des $\overline{\mathcal{O}}$ sont dans Σ. Ce ne peut être $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ car dans ce cas on aurait $-\overline{\gamma} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} = \alpha + \beta \in \Sigma$. Donc on a (par exemple) $\overline{\alpha} = \alpha \in \Sigma$, $\overline{\beta} \notin \Sigma$ et $\overline{\gamma} = \gamma \in \Sigma$. Alors (3) s'écrit, en tenant compte de $\langle\alpha, \beta\rangle = -1$:

$$2 + \langle\alpha, \gamma\rangle = -|\sigma|\langle\gamma, \beta\rangle. \tag{4}$$

Supposons d'abord σ d'ordre 2 ; alors on a $\overline{\beta} = \beta + {}^\sigma\beta$ avec $\beta \in \Sigma$, et ${}^\sigma(\alpha + \beta) = \alpha + {}^\sigma\beta$ est aussi une racine. De même, $\langle\alpha + \beta, {}^\sigma\beta\rangle = -1$ donc $\alpha + \beta + {}^\sigma\beta \in \Sigma$. Utilisant maintenant la formule (2), on a :

$$\begin{aligned} C_{-\gamma} = C_{\alpha+\beta+{}^\sigma\beta} = c_{\alpha+\beta+{}^\sigma\beta} = \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta}}{N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}} c_{\alpha+\beta} c_{{}^\sigma\beta} &= \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta}}{N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}} . \frac{N_{\alpha,{}^\sigma\beta}}{N_{\alpha,\beta}} c_\alpha c_\beta c_{{}^\sigma\beta} \\ &= \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta}}{N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}} . \frac{N_{\alpha,{}^\sigma\beta}}{N_{\alpha,\beta}} C_\alpha C_\beta. \end{aligned}$$

Nous sommes donc ramenés à vérifier $N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta} N_{\alpha,{}^\sigma\beta} = N_{\alpha,\beta} N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}$. Nous allons utiliser les propriétés ci-dessous des signes $N_{\alpha,\beta}$ (*cf.* [2], 4.1.2, que nous spécialisons au cas où toutes les racines ont même longueur ; voir aussi [6], 2.6) :

(a) $N_{a,b} = 0$ si $a + b \notin \Sigma$.
(b) $N_{a,b} = -N_{b,a}$.
(c) Si a, b, c sont trois racines telles que $a + b + c = 0$, alors $N_{a,b} = N_{b,c} = N_{c,a}$.
(d) Si a, b, c, d sont quatre racines telles qu'aucune paire d'entre elles n'ait une somme nulle et telles que $a + b + c + d = 0$, alors $N_{a,b} N_{c,d} + N_{b,c} N_{a,d} + N_{c,a} N_{b,d} = 0$.

En appliquant (d) à la somme $\alpha + \beta + {}^\sigma\beta + (-\alpha - \beta - {}^\sigma\beta)$ (et tenant compte du fait que $N_{\beta,{}^\sigma\beta} = 0$ puisque $\beta + {}^\sigma\beta$ n'est pas une racine), on obtient :

$$N_{\alpha,\beta} N_{{}^\sigma\beta,-(\alpha+\beta+{}^\sigma\beta)} + N_{{}^\sigma\beta,\alpha} N_{\beta,-(\alpha+\beta+{}^\sigma\beta)} = 0. \tag{5}$$

En appliquant (c) à la somme ${}^\sigma\beta + (\alpha+\beta) + (-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta)$, on obtient $N_{{}^\sigma\beta,-(\alpha+\beta+{}^\sigma\beta)} = N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}$, et de même on a $N_{\beta,-(\alpha+\beta+{}^\sigma\beta)} = N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta}$. On obtient le résultat cherché en substituant ces deux égalités dans (5).

Supposons enfin σ d'ordre 3. On a alors $\overline{\beta} = \beta + {}^\sigma\beta + {}^{\sigma^2}\beta$. La seule possibilité pour que (4) ait lieu est $\langle\alpha,\gamma\rangle = 1$, $\langle\gamma,\beta\rangle = -1$. Alors $-\gamma-\beta = \alpha + {}^\sigma\beta + {}^{\sigma^2}\beta$ est une racine, donc $\alpha+\beta+{}^\sigma\beta$ aussi. Et $\langle\alpha + {}^\sigma\beta + {}^{\sigma^2}\beta, \beta\rangle = -1$, donc $\alpha+\beta+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta \in \Sigma$. En utilisant la décomposition $\alpha+\beta+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta = ((\alpha+\beta)+{}^\sigma\beta)+{}^{\sigma^2}\beta$ et en raisonnant comme dans le cas où σ est d'ordre 2, on a :

$$\begin{aligned} C_{-\gamma} = c_{\alpha+\beta+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta} &= \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta,\beta}}{N_{\alpha+\beta+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta}} \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta}}{N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}} \frac{N_{\alpha,{}^\sigma\beta}}{N_{\alpha,\beta}} c_\alpha c_\beta c_{{}^\sigma\beta} c_{{}^{\sigma^2}\beta} \\ &= \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta,\beta}}{N_{\alpha+\beta+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta}} \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta}}{N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}} \frac{N_{\alpha,{}^\sigma\beta}}{N_{\alpha,\beta}} C_\alpha C_\beta. \end{aligned}$$

En appliquant la propriété (d) à la somme $(\alpha+{}^{\sigma^2}\beta) + {}^\sigma\beta + \beta + (-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta-{}^{\sigma^2}\beta) = 0$ on trouve :

$$N_{\alpha+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta} N_{\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta-{}^{\sigma^2}\beta} + N_{\beta,\alpha+{}^\sigma\beta} N_{{}^{\sigma^2}\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta-{}^{\sigma^2}\beta} = 0\,; \tag{6}$$

en appliquant (c) à la somme $\beta + (\alpha+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta) + (-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta-{}^{\sigma^2}\beta) = 0$ on trouve $N_{\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta-{}^{\sigma^2}\beta} = N_{\alpha+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta,\beta}$, et de même on trouve $N_{{}^{\sigma^2}\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta-{}^{\sigma^2}\beta} = N_{\alpha+\beta+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta}$, donc (6) peut se réécrire :

$$\frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta+{}^{\sigma^2}\beta,\beta}}{N_{\alpha+\beta+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta}} = \frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta}}{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,{}^{\sigma^2}\beta}}. \tag{7}$$

En appliquant (d) à la somme $\alpha+\beta+{}^\sigma\beta + (-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta) = 0$ on trouve

$$N_{\alpha,\beta} N_{{}^\sigma\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta} + N_{{}^\sigma\beta,\alpha} N_{\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta} = 0\,; \tag{8}$$

en appliquant (c) à la somme $(\alpha+\beta) + {}^\sigma\beta + (-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta) = 0$ on trouve $N_{{}^\sigma\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta} = N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}$ et de même on trouve $N_{\beta,-\alpha-\beta-{}^\sigma\beta} = N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta}$ donc (8) peut se réécrire

$$\frac{N_{\alpha+{}^\sigma\beta,\beta}}{N_{\alpha+\beta,{}^\sigma\beta}} = \frac{N_{\alpha,\beta}}{N_{\alpha,{}^\sigma\beta}}. \tag{9}$$

En reportant (7), puis (9) dans l'expression pour $C_{-\gamma}$ on trouve bien $C_{-\gamma} = C_\alpha C_\beta$. □

Il résulte de 2.5 que le sous-système de $\overline{\Sigma}$ formé des $\overline{\mathcal{O}}$ où $\mathcal{O}' \in \Sigma_\sigma$ est clos. On déduit aussi de 2.5 comme annoncé dans [3] :

COROLLAIRE 2.9. – *Si $C_\alpha = 1$ pour toute racine simple,* $\operatorname{car}(k) \neq 2$, *alors le système de racines de* $(\mathbf{G}^\sigma)^0$ *est le système Σ'' déduit de Σ' en supprimant les racines longues quand ce dernier n'est pas réduit.*

Remerciements. Nous remercions Cédric Bonnafé pour des remarques utiles sur une version préliminaire de cette Note.

Références bibliographiques

[1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapters 4, 5 et 6, Masson, 1981.
[2] R. Carter, Simple Groups of Lie Type, Wiley, 1972.
[3] F. Digne, J. Michel, Groupes réductifs non connexes, Ann. E.N.S. 27 (1994) 345–406.
[4] T.A. Springer, Linear Algebraic Groups, 2nd edn., Prog. Math., Birkhäuser, 1998.
[5] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups, Mem. Amer. Math. Soc. 80 (1968).
[6] J. Tits, Constantes de structure des algèbres de Lie semi-simples, Publ. Math. IHÉS 31 (1966) 21–58.