C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1071–1076

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*
(Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*)

Théorèmes d'existence pour des équations avec l'opérateur « 1-Laplacien », première valeur propre pour $-\Delta_1$

Françoise Demengel

University of Cergy-Pontoise, site de Saint-Martin, 2, avenue Adolphe Chauvin, 95 000 Cergy-Pontoise, France

Reçu le 5 mars 2002 ; accepté le 18 mars 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On considère des équations de la forme

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = f(x,u), \quad u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathrm{BV}(\Omega),\\ \sigma\cdot\nabla u = |\nabla u| \quad \text{in } \Omega, \quad |\sigma|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant 1,\\ \sigma\cdot\vec{n}(-u) = u \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ et $f(x,u) \in \mathrm{L}^N(\Omega)$. On s'interesse au cas où f est constante et en particulier on définit la première valeur propre λ_1 pour $-\operatorname{div}(\sigma(u))$, on étudie les premières fonctions propres. Ensuite on considère pour $\lambda > \lambda_1$ des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions non triviales et non négatives pour l'équation

$$-\operatorname{div}\big(\sigma(u)\big) = \lambda + f u^{q-1}$$

(avec des conditions aux limites) et $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $1 < q \leqslant 1^\star = N/(N-1)$. ***Pour citer cet article : F. Demengel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1071–1076.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Some existence results for partial differential equations involving the 1-Laplacian: Eigenvalues for $-\Delta_1$

Abstract We consider partial differential equations of the form

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = f(x,u), \quad u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathrm{BV}(\Omega),\\ \sigma\cdot\nabla u = |\nabla u| \quad \text{in } \Omega, \quad |\sigma|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant 1,\\ \sigma\cdot\vec{n}(-u) = u \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is some smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$, $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ and $f(x,u) \in \mathrm{L}^N(\Omega)$. We consider the case where $f = cte$, define the first eigenvalue λ_1 for $-\operatorname{div}(\sigma(u))$, and study eigenfunctions. We consider then for $\lambda \geqslant \lambda_1$ some necessary and sufficient conditions on f and the first eigenfunctions for existence of nontrivial solutions to

$$-\operatorname{div}\big(\sigma(u)\big) = \lambda + f u^{q-1}$$

(with boundary conditions), $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, and $1 < q \leqslant 1^\star = N/(N-1)$. ***To cite this article: F. Demengel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1071–1076.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Adresse e-mail : Francoise.Demengel@math.u-cergy.fr (F. Demengel).

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés
S1631-073X(02)02405-6/FLA

Abridged English version

In this Note we study the non-existence and existence of solutions to partial differential equations of the form

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = f(x,u), \quad u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathrm{BV}(\Omega), \\ \sigma \cdot \nabla u = |\nabla u| \quad \text{in } \Omega, \quad |\sigma|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant 1, \\ \sigma \cdot \vec{n}(-u) = u \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Here Ω is a bounded smooth domain in $\mathbb{R}^N$, $\vec{n}$ denotes the unit outer normal to $\partial\Omega$, $f(x,u) \in \mathrm{L}^N(\Omega)$, and the measure $\sigma \cdot \nabla u$ is taken in the sense of Proposition 1 below:

PROPOSITION 1. – *Suppose that Ω is some open set in $\mathbb{R}^N$. Suppose that $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ and $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, is such that $\operatorname{div}\sigma \in \mathrm{L}^N(\Omega)$. We define the distribution $\sigma \cdot \nabla u$ by the following*

(1) *For every $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\langle \sigma \cdot \nabla u, \varphi \rangle = -\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma) u\varphi - \int_\Omega \sigma \cdot \nabla(\varphi) u. \tag{2}$$

The distribution $\nabla u \cdot \sigma$ hence defined is a bounded measure in Ω, absolutely continuous with respect to $|\nabla u|$, with

$$|\sigma \cdot \nabla u| \leqslant |\nabla u| |\sigma|_\infty.$$

(2) *Suppose that Ω is bounded and piecewise $\mathcal{C}^1$. The following generalized Green's formula holds for $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$*

$$\langle \sigma \cdot \nabla u, \varphi \rangle = -\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma) u\varphi - \int_\Omega \sigma \cdot \nabla\varphi u + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \vec{n} u\varphi, \tag{3}$$

where $\vec{n}$ denotes the unit outer normal to $\partial\Omega$.

In all that follows Ω denotes a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$.

We first consider the situation where f is some > 0 constant. More precisally one has

PROPOSITION 2. – *Suppose that $\lambda > 0$ is such that there exists σ, $|\sigma|_\infty \leqslant 1$, and $u \geqslant 0$ in $\mathrm{BV}(\Omega)$ with*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = \lambda, \quad u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathrm{BV}(\Omega), \\ \sigma \cdot \nabla u = |\nabla u| \quad \textit{in } \Omega, \quad |\sigma|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant 1, \\ \sigma \cdot \vec{n}(-u) = u \quad \textit{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Then, $\lambda = \lambda_1$ with

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega),\ \int_\Omega |u| = 1} \int_\Omega |\nabla u|,$$

λ_1 is called the first eigenvalue for $-\Delta_1$ on Ω. Moreover

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathrm{BV}(\Omega),\ \int_\Omega |u| = 1} \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u|$$

and this last infimum is achieved on some u which satisfies (4)*. Among the "eigenfunctions" there exist caracteristic functions of Cacciopoli sets.*

Examples. – Suppose that $B_N(0,R)$ is the Euclidean ball of radius R in $\mathbb{R}^N$. Then $\lambda_1(B(0,R)) = N/R$ and the only eigenfunctions are the constants.

Suppose that $r < R$, then

$$\lambda_1\big(B_N(0,R) - \overline{B_N(0,r)}\big) = N\frac{(R^{N-1}+r^{N-1})}{R^N - r^N}$$

and the only eigenfunctions for the crown are the constants.

We assume now that $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, that $\lambda > \lambda_1$ and $q \leqslant 1^\star = N/(N-1)$ for $N \geqslant 2$, $q < \infty$ if $N = 1$.

We are interested in necessary and sufficient conditions on f for which there exists some solution to eq_λ below

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = \lambda + f u^{q-1}, & u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathrm{BV}(\Omega), \\ \sigma\cdot\nabla u = |\nabla u| \quad \text{in } \Omega, & |\sigma|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant 1, \\ \sigma\cdot\vec{n}(-u) = u \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

We denote in the sequel by Ω^+ (respectively Ω^-) the respective sets on which f is positive (respectively negative).

THEOREM 1. – *Suppose that eq_λ possesses a solution. Then*
(1) *If $\lambda > \lambda_1$, for all $\phi \geqslant 0$ eigenfunction for the eigenvalue λ_1, $\int_\Omega f\phi^q < 0$.*
(2) *If $\lambda = \lambda_1$, for all $\phi \geqslant 0$ eigenfunction for the eigenvalue λ_1, $\int_\Omega f\phi^q \leqslant 0$ and $\Omega^+ \neq \emptyset$.*

THEOREM 2. – *Suppose that $\Omega^+ \neq \emptyset$. Then for λ large, there is no solution to eq_λ.*
The set of $\lambda > \lambda_1$ for which eq_λ has a solution is an interval.

THEOREM 3. – *Suppose that Ω^+, Ω^- are $\neq \emptyset$, that $q < 1^\star$, and $\int_\Omega f\phi^q < 0$, for all ϕ nonnegative eigenfunction for λ_1, then, there exists a nonvoid interval $[\lambda_1, \lambda^\star[$ such that for $\lambda \in]\lambda_1, \lambda^\star[$, eq_λ possesses at least two solutions, eq_{λ_1} has at least one solution.*

THEOREM 4. – *Suppose that $N \geqslant 2$, that Ω^+, Ω^- are $\neq \emptyset$, that $\int_\Omega f\phi^{1^\star} < 0$ for all ϕ nonnegative eigenfunction for λ_1, then, there exists a nonvoid interval $[\lambda_1, \lambda^\star[$ such that for $\lambda \in]\lambda_1, \lambda^\star[$, eq_λ possesses at least one solution. If moreover*

$$p(\lambda_1)\sup f^{1/1^\star} K(N,1) < 1,$$

where $K(N,1)$ denotes the best constant for Sobolev embedding from $\mathrm{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ into $\mathrm{L}^{1^\star}(\mathbb{R}^N)$ and

$$p(\lambda_1) = \inf_{u\in\mathrm{BV}(\Omega),\ \int_\Omega f|u|^{1^\star}=1} \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega}|u| - \lambda_1\int_\Omega |u|$$

then, there exists at least two solutions for eq_λ for all $\lambda \in]\lambda_1, \lambda^\star[$, eq_{λ_1} possesses one solution.

Remark 1. – These results are very similar to the one obtained for analogous equations with the p-Laplace operator, $p > 1$ [4,2]. Let us nevertheless point out several differences:

- The condition $\int_\Omega f\phi^q < 0$ is not necessary in the case $\lambda = \lambda_1$. We exhibit in [5] a situation in which existence holds, with $\lambda = \lambda_1$ but $\int_\Omega f\phi^q = 0$.
- Most of the results are technically difficult to prove because for example, no strict maximum principle holds.

L'objet de cette Note est l'étude de l'existence de solutions $\geqslant 0$ d'équations du type eq_λ définie par

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = \lambda + f u^{q-1}, & u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathrm{BV}(\Omega), \\ \sigma\cdot\nabla u = |\nabla u| \quad \text{in } \Omega, & |\sigma|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant 1, \\ \sigma\cdot\vec{n}(-u) = u \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

où Ω est un domaine régulier de $\mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $q \in]1, 1^\star]$ avec $1^\star = N/(N-1)$. La mesure $\sigma \cdot \nabla u$ est prise au sens de la proposition :

PROPOSITION 3. – *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ et $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, avec $\operatorname{div}\sigma \in \mathrm{L}^N(\Omega)$. On définit une distribution sur Ω par*

$$\langle \sigma \cdot \nabla u, \varphi \rangle = -\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma) u \varphi - \int_\Omega \sigma \cdot \nabla(\varphi) u \tag{7}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La distribution ainsi définie est en fait une mesure bornée sur Ω, absolument continue par rapport à $|\nabla u|$:

$$|\sigma \cdot \nabla u| \leqslant |\nabla u| |\sigma|_\infty.$$

(2) *Si Ω est borné et de classe $\mathcal{C}^1$ on a la formule de Green*

$$\langle \sigma \cdot \nabla u, \varphi \rangle = -\int_\Omega \operatorname{div}(\sigma) u \varphi - \int_\Omega \sigma \cdot \nabla(\varphi) u + \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot \vec{n} u \varphi, \tag{8}$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieur unité à $\partial\Omega$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

L'existence de solutions non triviales pour eq_λ dépend de la situation de λ par rapport à la première valeur propre λ_1 de $-\Delta_1$, dont l'existence et les propriétés sont données dans la

PROPOSITION 4. – *Soit λ_1 définie par*

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathrm{W}_0^{1,1}(\Omega),\ \int_\Omega |u| = 1} \int_\Omega |\nabla u|.$$

Alors

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathrm{BV}(\Omega),\ \int_\Omega |u| = 1} \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u|$$

et ce dernier problème admet une solution. Parmi les solutions il existe des fonctions caractéristiques d'ensemble de Cacciopoli. Une solution nonnégative u vérifie : il existe σ, $|\sigma|_\infty \leqslant 1$, et

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\sigma = \lambda, \quad u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0,\ u \in \mathrm{BV}(\Omega), \\ \sigma \cdot \nabla u = |\nabla u| \quad \text{in } \Omega, \quad |\sigma|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \leqslant 1, \\ \sigma \cdot \vec{n}(-u) = u \quad \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Exemples. – Soit $B_N(0, R)$ la boule euclidienne de rayon R dans $\mathbb{R}^N$. Alors $\lambda_1(B(0, R)) = N/R$ et les seules fonctions propres sont les constantes.

Supposons $r < R$, alors

$$\lambda_1\bigl(B_N(0, R) - \overline{B_N(0, r)}\bigr) = N \frac{R^{N-1} + r^{N-1}}{R^N - r^N}$$

et les seules fonctions propres pour la couronne sont les constantes.

En ce qui concerne eq_λ, lorsque $\lambda < \lambda_1$ le problème a été traité dans [5] pour le cas critique. On s'interesse ici au cas $\lambda > \lambda_1$. On note dans la suite E_1 l'ensemble des fonctions propres nonnégatives pour la valeur propre λ_1.

THÉORÈME 1. – *Si $\lambda > \lambda_1$ et si eq_λ possède une solution alors pour toute ϕ dans E_1, $\int_\Omega f\phi^q < 0$. Si $\lambda = \lambda_1$ et si eq_{λ_1} possède une solution, alors $\int_\Omega f\phi^q \leqslant 0$ pour toute ϕ dans E_1 et $\Omega^+ \neq \emptyset$.*

THÉORÈME 2. – *Si $q < 1^\star$, si $\Omega^+,\ \Omega^- \neq \emptyset$ et si pour toute $\phi \geqslant 0 \in E_1$, $\int_\Omega f\phi^q < 0$, alors il existe $\lambda^\star > \lambda_1$, tel que pour tout $\lambda \in]\lambda_1, \lambda^\star)$, il existe au moins deux solutions, et eq_{λ_1} admet une solution. En outre l'ensemble des $\lambda > \lambda_1$ pour lesquels eq_λ possède une solution est un intervalle.*

THÉORÈME 3. – *Si $\Omega^+,\ \Omega^- \neq \emptyset$ et pour toute $\phi \in E_1$, $\int_\Omega f\phi^{1^\star} < 0$, alors il existe un voisinage de λ_1 à droite sur lequel eq_λ possède au moins une solution. Si en outre*

$$p(\lambda_1)(\sup f)^{1/1^\star} K(N,1) < 1$$

avec $K(N,1)$ la meilleure constante pour l'injection de Sobolev de $\mathrm{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathrm{L}^{1^\star}(\mathbb{R}^N)$ et

$$p(\lambda_1) = \inf_{u \in \mathrm{BV}(\Omega),\ \int_\Omega f|u|^{1^\star}=1} \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| - \lambda_1 \int_\Omega |u|$$

alors il existe au moins deux solutions pour eq_λ dans un voisinage $]\lambda_1, \lambda^\star)$, et eq_{λ_1} possède au moins une solution.

Remarque 1. – Ces résultats sont analogues à ceux obtenus dans le cas $p > 1$, [4]. Cependant outre les difficultés techniques dues à l' espace BV et au manque de régularité, notons que

(1) Si $\lambda = \lambda_1$, la condition $\int_\Omega f\phi^q < 0$ n'est pas nécessaire.

(2) On montre que toute solution de eq_λ est dans L^∞. Mais le principe de maximum strict est faux.

Principe des démonstrations. – Théorème 1. Soit $\varepsilon > 0$. On multiplie la différence

$$-\operatorname{div}\bigl(\sigma(u) - \sigma(\phi)\bigr) = \lambda - \lambda_1 + fu^{q-1}$$

par $\phi^q/(u+\varepsilon)^{q-1}$ et on intègre sur Ω. On utilise un lemme technique [7] pour voir que $(\sigma(u) - \sigma(\phi)) \cdot \nabla(\phi^q/(u+\varepsilon)^{q-1}) \leqslant 0$ et on observe que $(\sigma(u) - \sigma(\phi)) \cdot \vec{n}(\phi^q/(u+\varepsilon)^{q-1}) \leqslant 0$ sur $\partial\Omega$. On obtient

$$(\lambda - \lambda_1) \int_\Omega \frac{\phi^q}{(u+\varepsilon)^{q-1}} + \int_\Omega fu^{q-1} \frac{\phi^q}{(u+\varepsilon)^{q-1}} \leqslant 0.$$

En utilisant la positivité de $\int_\Omega \phi^q/(u+\varepsilon)^{q-1}$, le théorème de convergence dominée pour

$$\frac{fu^{q-1}\phi^q}{(u+\varepsilon)^{q-1}},$$

et le théorème de convergence monotone pour $\phi^q/(u+\varepsilon)^{q-1}$, on obtient en faisant tendre ε vers 0 que $\alpha = \phi^q/u^{q-1} \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, et que $\int_\Omega fu^{q-1}(\phi^q/(u+\varepsilon)^{q-1}) \to \int_{x, u(x)>0} f\phi^q < 0$ ce qui s'écrit encore

$$\int_{x,u(x)>0} f\alpha u^{q-1} = \int_\Omega f\alpha u^{q-1} = \int_\Omega f\phi^q < 0.$$

Théorème 2. Soit B une boule euclidienne sur laquelle $f > 0$ et $\mu = \lambda_1(B)$, dont une fonction propre est $\psi = 1_B$. En remarquant que $-\operatorname{div}\sigma(u) \geqslant \lambda$ sur B en multipliant par 1_B cette équation on obtient que $\lambda \leqslant \mu$. Il n'y a donc pas de solutions pour $\lambda > \mu$.

Supposons que $\overline{\lambda} > \lambda > \lambda_1$ et qu'il existe une solution $\overline{u}$ pour $eq_{\overline{\lambda}}$. Alors $\overline{u}$ est une sur-solution pour eq_λ. D'autre part, si $\phi \in E_1$, $\varepsilon\phi$ est une sous-solution dès que $\varepsilon^{q-1} < (\lambda - \lambda_1)/|f|_\infty |\phi|_\infty^{q-1}$.

Enfin en multipliant l'équation $eq_{\overline{\lambda}} - eq_{\lambda_1}$ par $(\phi/(u+\varepsilon)^{q-1})^k$ pour $k = 1, 2, \ldots$ et en utilisant l'argument déjà employé dans la preuve du Théorème 1, on obtient par récurrence que $(\phi/u^{q-1})^k \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ pour tout k ainsi qu'un estimation uniforme relativement à k, qui entraine que $\alpha = \phi/u^{q-1} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. En remarquant que si $\phi \in E_1$ alors $\phi^{1/(q-1)} \in E_1$ et en choisissant $\varepsilon < 1/(|\phi/u^{q-1}|_\infty)^{1/(q-1)}$, on a $\overline{u} \geqslant \varepsilon\phi^{1/(q-1)}$ et $\varepsilon\phi^{1/(q-1)}$ est une sous-solution. On utilise ensuite un argument de sur et de sous solutions détaillé dans [7].

Théorème 3. On s'inspire d'un procédé de [9,3,4] On définit pour $\lambda \geqslant \lambda_1$

$$m_q(\lambda) = \inf_{u\in \mathrm{BV}(\Omega),\ \int_\Omega f|u|^q=-1} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| - \lambda \int_\Omega |u| \right\},$$

$$p_q(\lambda) = \inf_{u\in \mathrm{BV}(\Omega),\ \int_\Omega f|u|^q=1} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| - \lambda \int_\Omega |u| \right\}$$

et

$$\lambda_q^\star = \inf_{u\in \mathrm{BV}(\Omega),\ \int_\Omega f|u|^q=0,\ |u|_1=1} \left\{ \int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| \right\}$$

et on montre que $\lambda_q^\star > \lambda_1$. On montre ensuite que pour $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_q^\star[$, $m_q(\lambda)$ et $p_q(\lambda)$ sont finis et sont atteints. La difficulté consiste à montrer qu'il existe une suite minimisante bornée.

On a toujours $m_q(\lambda) \leqslant 0$. Supposons qu'il existe une suite $u_n \geqslant 0$ minimisante pour $m_q(\lambda)$ avec $\int_\Omega |u_n| \to +\infty$, soit alors $w_n = u_n/|u_n|_1$ que l'on prolonge par zéro hors de Ω. w_n est bornée dans $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^N)$, en extrayant une sous-suite il existe $w \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^N)$ $|w|_1 = 1$, $\int_\Omega f w^q = 0$, $w = 0$ hors de $\overline{\Omega}$, et par s.c.i.

$$\int_\Omega |\nabla w| + \int_{\partial\Omega} |w| = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w| - \lambda \leqslant 0$$

ce qui contredit $\lambda < \lambda_q^\star$. Ceci entraine que toute suite minimisante pour $m_q(\lambda)$ est bornée dans $\mathrm{L}^1(\Omega)$ et donc aussi dans $\mathrm{BV}(\Omega)$, ce qui permet de conclure par des arguments classiques.

Références bibliographiques

[1] S. Alama, G. Tarantello, On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities, Calc. Var. and Partial Differential Equations 1 (1993) 439–475.
[2] H. Berestycki, I. Capuzzo Dolcetta, L. Nirenberg, Problémes elliptiques indéfinis et théorème de Liouville non-linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 317 (1993) 945–950.
[3] I. Birindelli, F. Demengel, On some partial differential equation for noncoercive functional and critical Sobolev exponent, Adv. in Differential Equations, accepted.
[4] I. Birindelli, F. Demengel, On some partial differential equation for non coercive functional and critical Sobolev exponent, Preprint, Universita di Roma La Sapienza.
[5] F. Demengel, On some nonlinear partial differential equations involving the 1-Laplacian and critical Sobolev exponent, Control Optim. Calc. Var., Mars 2000.
[6] F. Demengel, Some existence's results for noncoercive 1-Laplacian operator, Prébublication de l'Université de Cergy-Pontoise, No. 21, 2001, soumis à Nonlinear Anal.
[7] F. Demengel, Functions almost 1-harmonic, Prépublication de l'Université de Cergy Pontoise. No. 31, 2001.
[8] P.-L. Lions, La méthode de compacité concentration, I et II, Rev. Mat. Iberoamericana 1 (1) (1985) 145.
[9] T. Ouyang, On the positive solutions of semilinear equations of $\Delta u + \lambda u + hu^p = 0$ on compacts manifolds, II, Indiana Math. J. 40 (1991) 1083–1140.