C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 995–998

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*
(Théorie des nombres/*Number Theory*)

Spectre et homologie des variétés hyperboliques complexes de congruence

Nicolas Bergeron, Laurent Clozel

Laboratoire de mathématiques, UMR CNRS 8628, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, Orsay 91405, France

Reçu le 25 mars 2002 ; accepté le 4 avril 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé Dans la première partie de cette Note, on montre que la première valeur propre non nulle du laplacien sur les 1-formes différentielles d'une variété hyperbolique complexe de congruence standard de dimension complexe n est toujours supérieure ou égale à $\frac{10n-11}{25}$. La suite de cette Note est consacrée à des applications homologiques de ce résultat. On démontre notamment que si $\mathrm{Sh}^0 H \subset \mathrm{Sh}^0 G$ sont deux variétés de Shimura respectivement de type $U(n-1,1)$ et $U(n,1)$, l'application naturelle $H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0 H) \to H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0 G)$ est *injective*, première étape d'un « théorème de Lefschetz » pour les variétés de Shimura. ***Pour citer cet article : N. Bergeron, L. Clozel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 995–998.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Spectrum and homology of congruence complex hyperbolic manifolds

Abstract In the first part of this Note, we show that the first non-zero eigenvalue of the Laplace operator on 1-forms of a standard congruence arithmetic complex hyperbolic n-manifold is always $\geqslant \frac{10n-11}{25}$. The following parts of this Note concern homological applications of this result. We prove, in particular, that if $\mathrm{Sh}^0 H \subset \mathrm{Sh}^0 G$ are two Shimura varieties of type $U(n-1,1)$ and $U(n,1)$, the natural map $H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0 H) \to H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0 G)$ is *injective*, first step of a "Lefschetz theorem" for Shimura varieties. ***To cite this article: N. Bergeron, L. Clozel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 995–998.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit G un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}$ tel que $G(\mathbb{R})$ soit semi-simple connexe et isomorphe au groupe $\mathrm{SU}(n,1)$ à des facteurs compacts près. L'espace symétrique associé au groupe $G(\mathbb{R})$ est appelé *espace hyperbolique complexe de dimension* (*complexe*) n, nous le noterons $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ et nous supposerons la métrique normalisée de façon que la courbure sectionnelle holomorphe soit constante, égale à -4. [1]

Soit K un sous-groupe compact-ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ (où $\mathbb{A}_f$ désigne l'anneau des adèles finis sur $\mathbb{Q}$) tel que le groupe $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K$ soit sans torsion. Un tel groupe Γ est appelé *sous-groupe de congruence* (*sans torsion*) *de* G. [2] On appellera *variété hyperbolique complexe de congruence* tout quotient de l'espace hyperbolique complexe (de dimension n, $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$) par un sous-groupe de congruence (sans torsion) Γ inclus dans un certain groupe G comme ci-dessus. On dira de plus qu'une variété hyperbolique complexe de congruence est *standard* si le groupe G est obtenu par restriction des scalaires du groupe unitaire d'une forme hermitienne définie sur un corps de nombres totalement réel.

D'après un théorème de Borel et Harish-Chandra, une variété hyperbolique complexe de congruence est toujours de volume fini. De plus, elle est compacte si et seulement si le groupe G contenant Γ est anisotrope sur $\mathbb{Q}$.

S1631-073X(02)02398-1/FLA

Dans cette Note, on décrit un certain nombre de résultats nouveaux concernant la géométrie spectrale puis la topologie des variétés hyperboliques complexes de congruence. Les démonstrations détaillées ainsi que des généralisations à d'autres espaces symétriques paraîtront dans [7].

1. Spectre des variétés hyperboliques complexes de congruence

Notre premier résultat est essentiellement contenu dans Harris et Li [8], mais l'énoncé ci-dessous ne semble pas avoir été précédemment dégagé dans la littérature.

THÉORÈME 1. – *Soit M une variété hyperbolique complexe de congruence de dimension* (*complexe*) 2. *Alors, la première valeur propre non nulle du spectre total du laplacien de Hodge sur M est supérieure ou égale à une constante strictement positive indépendante de M. Plus précisément, la première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions et les* 4-*formes différentielles* (*resp. sur les* 1, 2 *ou* 3-*formes différentielles*) *est supérieure ou égale à* 3 (*resp.* $\frac{9}{25}$).

Ce résultat est dans la même veine que le célèbre théorème « $\frac{3}{16}$ » de Selberg sur les revêtements de congruence de la surface modulaire.

Esquisse de la preuve du Théorème 1. – Grâce à la formule de Matsushima [9,3] l'énoncé peut se formuler en termes de représentations automorphes du groupe $U(2,1)$. La démonstration suit alors celle de la Proposition 4.2.3 de [8] : si σ est une représentation automorphe de $U(2,1)$, d'après les travaux de Rogawski [10], soit σ peut être relevé par changement de base en une représentation automorphe de $\mathrm{GL}(3)$, soit σ provient, par endoscopie, d'une représentation automorphe discrète d'un sous-groupe de la forme $U(2) \times U(1)$. Le second cas ne pose pas de problème. Et lorsque σ se relève en une représentation automorphe de $\mathrm{GL}(3)$, on peut utiliser l'approximation de la conjecture de Ramanujan généralisée démontrée par Luo, Rudnick et Sarnak [14].

Pour être totalement rigoureux, signalons que l'approximation à la conjecture de Ramanujan généralisée [14] n'est démontrée que pour les représentations non ramifiées à l'infini alors que les représentations que nous considérons sont ramifiées à l'infini. On a donc besoin d'étendre légèrement [14] ce qui se fait en étudiant, dans le cas ramifié et à l'aide de [12], les facteurs à l'infini des fonctions L considérées dans [14].

Notre second résultat découle du premier et d'une généralisation d'un théorème de réduction dû à Burger et Sarnak [4].[3]

THÉORÈME 2. – *Soit M une variété hyperbolique complexe de congruence standard de dimension* (*complexe*) n. *Alors, la première valeur propre non nulle du laplacien sur les fonctions* (*resp. sur les* 1-*formes différentielles*) *est supérieure ou égale à* $2n-1$ (*resp.* $\frac{10n-11}{25}$).

Il est intéressant de noter que trouver une borne uniforme strictement positive pour le spectre sur les 1-formes différentielles est nettement plus difficile que pour les fonctions (le changement de base de Rogawski et l'approximation de la conjecture de Ramanujan généralisée par Jacquet et Shalika sont insuffisants, on a vraiment besoin de [14]).

Concluons cette section par une conjecture.[4]

CONJECTURE A (resp. A^-). – *Soit M une variété hyperbolique complexe de congruence de dimension* (*complexe*) n. *Alors, pour tout entier $p \in [0, n-1]$, la première valeur propre du laplacien sur les p-formes différentielles est supérieure ou égale à $2n-2p-1$* (*resp. $\varepsilon(n,p)$, où $\varepsilon(n,p)$ est un réel strictement positif ne dépendant que de n et p et non de M*).

Les Théorèmes 1 et 2 sont des approximations de cette conjecture. On peut montrer (la deuxième partie de cette proposition est essentiellement contenue dans [8]) :

PROPOSITION. – *Les conjectures d'Arthur* [1] *impliquent la Conjecture* A. *La conjecture de changement de base de* [8] *implique la Conjecture* A^-.

2. Homologie des variétés hyperboliques complexes de congruence

Le résultat principal de cette section est un théorème de relèvement des classes d'homologies [5] entre certaines variétés hyperboliques complexes.

THÉORÈME 3. – *Soit M une variété hyperbolique complexe compacte de congruence de dimension* (*complexe*) n. *Soit F une sous-variété complexe compacte connexe totalement géodésique de dimension* (*complexe*) $n-1$, *et immergée dans M. Alors, il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M et un relevé $\widehat{F}$ de F dans $\widehat{M}$ tels que* :

(1) *la sous-variété $\widehat{F}$ est plongée dans $\widehat{M}$* ;
(2) *l'application induite* : $H_{2n-3}(\widehat{F}) \to H_{2n-3}(\widehat{M})$ *est injective.*

De plus, pour tout entier N et pour tout cycle c dans $H_{2n-3}(\widehat{F})$, il existe un revêtement fini M_N de M contenant N préimages de c linéairement indépendantes dans $H_{2n-3}(M_N)$.

La démonstration du Théorème 3, plus technique, repose sur les mêmes idées que celle du théorème principal de [2]. Elle repose notamment sur le Théorème 2 ci-dessus qui permet de s'assurer de l'existence d'un trou spectral, pour les 3-formes ∂ et $\overline{\partial}$ fermées, dans les revêtements de congruence de M.

Plus généralement, on conjecture :

CONJECTURE B. – *Soit M une variété hyperbolique complexe compacte de congruence de dimension* (*complexe*) n. *Soit F une sous-variété complexe compacte connexe totalement géodésique immergée dans M. Alors, il existe un revêtement fini $\widehat{M}$ de M et un relevé $\widehat{F}$ de F dans $\widehat{M}$ tels que* :

(1) *la sous-variété $\widehat{F}$ est plongée dans $\widehat{M}$* ;
(2) *l'application induite* : $H_p(\widehat{F}) \to H_p(\widehat{M})$ *est injective pour tout $p \geqslant n$.*

Les idées de [2] permettent de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 4. – *La Conjecture* A$^-$ *implique la Conjecture* B.

Dans la démonstration du Thèorème 4, on exploite le trou spectral sur les formes différentielles dans les revêtements de congruence pour vérifier la convergence de la forme harmonique duale de F dans certains revêtements de congruence vers la forme harmonique L^2-duale à F dans la variété $V := \pi_1 F\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. L'hypothèse $p \geqslant n$ du deuxième point de la Conjecture B provient du calcul de la cohomologie L^2 de la variété V, i.e. de la description de l'espace $\mathcal{H}^k_{(2)}(V)$ des k-formes harmoniques L^2 de V, ce que l'on fait dans le théorème suivant.

THÉORÈME 5. – *Pour tout entier $k < n$, il existe un isomorphisme naturel* : $\mathcal{H}^k_{(2)}(V) \xrightarrow{\backsimeq} \mathrm{H}^k(V, \partial_\infty V)$. *De plus, l'espace $\mathcal{H}^n_{(2)}$ est de dimension infinie.*

La démonstration du Théorème 5 découle assez facilement des idées de [6]. [6]

3. Propriétés de Lefschetz pour les variétés de Shimura

Dans cette section, on suppose fixés $H \subset G$ deux groupes algébriques et *anisotropes* sur $\mathbb{Q}$ tels que les groupes $H(\mathbb{R})$ et $G(\mathbb{R})$ soient semi-simples connexes et respectivement isomorphes aux groupes $\mathrm{SU}(n-1,1)$ et $\mathrm{SU}(n,1)$ à des facteurs compacts près. L'inclusion $H \subset G$ induit un plongement holomorphe totalement géodésique naturel $\mathbb{H}^{n-1}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ entre les espaces symétriques associés.

Soit K un sous-groupe compact-ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que le groupe $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K$ soit sans torsion. Désignons par $\Gamma \cap H$ l'intersection de Γ avec $H(\mathbb{Q})$. On obtient ainsi une application lisse : $f_\Gamma : \Gamma \cap H\backslash\mathbb{H}^{n-1}_{\mathbb{C}} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ pour chaque sous-groupe de congruence sans torsion de $G(\mathbb{Q})$.

Soient $\Gamma' \subset \Gamma$ deux sous-groupes de congruence sans torsion de $G(\mathbb{Q})$. Alors, il existe une surjection naturelle de $H_*(\Gamma'\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$ dans $H_*(\Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}})$ induite par le revêtement fini $\Gamma'\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}} \to \Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. On obtient ainsi un système inverse de groupes d'homologie indexés par les sous-groupes de congruence de $G(\mathbb{Q})$. On désigne par $H_*(\mathrm{Sh}^0 G)$ la limite projective de ce système. [7]

Rappelons que les théorèmes de Lefschetz permettent d'étudier la topologie d'une variété projective complexe par récurrence, en la coupant par un hyperplan de l'espace projectif. Un yoga semblable, mais moins fort, existe pour les variétés de Shimura $\mathrm{Sh}^0\, G$ où la section hyperplane est remplacée par les translatés par $G(\mathbb{Q})$ de $\mathrm{Sh}^0\, H$, cf. par exemple [8,5] et surtout [13]. On peut ainsi déduire des méthodes de Venkataramana [13] que pour tout entier $i \leqslant n-1$, l'application $\bigoplus_{G(\mathbb{Q})} H_i(\mathrm{Sh}^0\, H) \to H_i(\mathrm{Sh}^0\, G)$ est *surjective*.

À l'aide du Théorème 3 et des résultats de [13] on renforce ce yoga, en démontrant la première étape d'un analogue du second théorème de Lefschetz.

THÉORÈME 6. – *L'application naturelle, induite par les* f_Γ, $H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0\, H) \to H_{2n-3}(\mathrm{Sh}^0\, G)$ *est injective.*

Conclusion. – La deuxième assertion du Théorème 6 est une première étape vers un analogue complet des théorèmes de Lefschetz pour les variétés de Shimura. En admettant la Conjecture A^-, on peut dessiner l'*image conjecturale* suivante.

Alors que le théorème de Venkataramana impose un contrôle sur l'homologie de $\mathrm{Sh}^0\, G$ en terme de ses sous-variétés de Shimura, en admettant la Conjecture A^-, on peut montrer que l'on retrouve l'homologie de chaque sous-variété de Shimura de $\mathrm{Sh}^0\, G$ dans l'homologie de celle-ci. Autrement dit, les applications : $H_k(\mathrm{Sh}^0\, H) \to H_k(\mathrm{Sh}^0\, G)$, devraient être *injectives* pour tout entier $k \geqslant n$.

---

[1] Les courbures sectionnelles réelles sont alors comprises entre -4 et -1.

[2] On peut préférer considérer les sous-groupes Γ de $G(\mathbb{Z})$ sans torsion et contenant un sous-groupe de la forme $\ker(G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$ pour un certain entier $m \geqslant 1$.

[3] Remarquons que l'utilisation faite dans [8] du théorème de Burger et Sarnak est complètement différente et n'implique pas le Théorème 2.

[4] En fait deux, la Conjecture A^- étant une version « géométrique », plus faible, de la Conjecture « arithmétique » A.

[5] Tous les groupes de (co-)homologies considérés dans cette Note seront à coefficients complexes.

[6] Le premier auteur remercie Gilles Carron de l'avoir orienté vers cet article.

[7] La notation vient de l'existence d'un espace topologique $\mathrm{Sh}^0\, G$, la variété de Shimura associée à G, dont les groupes de cohomologie sont obtenus comme limite directe des groupes de cohomologie des $\Gamma\backslash\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ [11], néanmoins les variétés de Shimura ne sont pas des variétés au sens usuel et la notation $H_*(\mathrm{Sh}^0\, G)$ n'est réellement qu'une notation. Nous ne mentionnerons les variétés de Shimura que par abus de langage.

Références bibliographiques

[1] J. Arthur, Unipotent automorphic representations: Conjectures, Astérisque 171–172 (1989) 13–172.

[2] N. Bergeron, Asymptotique de la norme L^2 d'un cycle géodésique dans les revêtements de congruence d'une variété hyperbolique arithmétique, 2002, à paraître.

[3] A. Borel, N. Wallach, Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups, Princeton University Press, 1980.

[4] M. Burger, P. Sarnak, Ramanujan duals II, Invent. Math. 106 (1991) 1–11.

[5] L. Clozel, T.N. Venkataramana, Restriction of the holomorphic cohomology of a Shimura variety to a smaller Shimura variety, Duke Math. J. 95 (1998) 51–106.

[6] H. Donnelly, C. Fefferman, L^2-cohomology and index theorem for the Bergman metric, Ann. of Math. (2) 118 (1983) 593–618.

[7] N. Bergeron, L. Clozel, Article en préparation.

[8] M. Harris, J.S. Li, A Lefschetz property for subvarieties of Shimura varieties, J. Algebraic Geometry 7 (1998) 77–122.

[9] Y. Matsushima, A formula for the Betti numbers of compact locally symmetric Riemannian manifolds, J. Differential Geom. 1 (1967) 99–109.

[10] J. Rogawski, Automorphic Representations of Unitary Groups in Three Variables, Princeton University Press, 1990.

[11] J. Rohlfs, Projective limits of locally symmetric spaces and cohomology, J. Reine Angew. Math. 479 (1996) 149–182.

[12] F. Shahidi, Automorphic L-functions: a survey, Perspect. Math. 10 (1990) 415–437.

[13] T.N. Venkataramana, Cohomology of compact locally symmetric spaces, Compositio Math. 125 (2001) 221–253.

[14] Z. Rudnick, W. Luo, P. Sarnak, On the generalized Ramanujan conjecture for $\mathrm{GL}(n)$, Proc. Sympos. Pure Math. 66 (1999) 301–310.