C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 953–956

Analyse complexe/*Complex Analysis*
(Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*)

Sur l'analyticité des applications CR lisses à valeurs dans un ensemble algébrique réel

Bernard Coupet [a], Sylvain Damour [a], Joël Merker [a], Alexandre Sukhov [b]

[a] LATP, UMR 6632, Université de Provence, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

[b] LAGAT, UMR 8524, Université de Lille 1, cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 12 mars 2002 ; accepté le 8 avril 2002

Note présentée par Pierre Lelong.

Résumé Soit $f : M \to M'$ une application CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ entre une sous-variété $M \subset \mathbb{C}^n$ analytique réelle générique et un sous-ensemble $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ algébrique réel. On démontre que si M est minimale en un point p et si M' ne contient pas de courbe complexe, f est analytique réelle en p. ***Pour citer cet article : B. Coupet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 953–956.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the analyticity of smooth CR maps into a real algebraic set

Abstract Let $f : M \to M'$ be a $\mathcal{C}^\infty$-smooth CR mapping between a generic real analytic submanifold $M \subset \mathbb{C}^n$ and a real algebraic subset $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$. We prove that if M is minimal at a point p and if M' does not contain complex curves, then f is real-analytic at p. ***To cite this article: B. Coupet et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 953–956.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction et énoncés des résultats

Soit M une sous-variété générique analytique réelle de $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 2$) et soit M' un sous-ensemble algébrique réel de $\mathbb{C}^{n'}$. Dans cette Note, nous étudions l'analyticité des applications de Cauchy–Riemann (CR) de classe $\mathcal{C}^\infty$ de M à valeurs dans M'. Notamment, nous établissons une estimation supérieure de leur degré de transcendance, en fonction de la dimension maximale des feuilletages holomorphes locaux contenus dans M'.

On peut supposer que la variété générique M de codimension d est définie au voisinage d'un point $p \in M$ dans $\mathbb{C}^n$ par des équations $r_k(z, \bar{z}) = 0$, $k = 1, \ldots, d$, où les r_k sont des fonctions analytiques réelles satisfaisant $\partial r_1 \wedge \ldots \wedge \partial r_d \neq 0$ en p. Soit $m := n - d$ la dimension CR de M. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut écrire les équations de M au voisinage de p sous la forme $\bar{y}_k = \phi_k(\bar{x}, x, y)$, $k = 1, \ldots, d$, où $\mathbb{C}^n \ni z = (x, y) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^d$, $p = (x_p, y_p)$, et les ϕ_k sont des fonctions holomorphes au voisinage de $(\bar{x}_p, x_p, y_p)$. Les opérateurs $L_j := \partial/\partial\bar{x}_j + \sum_{k=1}^d [\partial\phi_k/\partial\bar{x}_j]\, \partial/\partial\bar{y}_k$, $j = 1, \ldots, m$, forment une base de champs CR tangents à M. L'ensemble algébrique réel $M' \subset \mathbb{C}^{n'}$ est défini par des équations polynomiales réelles $P'_k(z', \bar{z}') = 0$, $k = 1, \ldots, d'$. Soit $f : M \to M'$ une application CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de p sur M, i.e. $L_j f = 0$, pour tout j. Rappelons que M est dite *minimale* en p (au sens de Tumanov) s'il n'existe pas de sous-variété CR stricte contenue dans M, passant par p et de dimension CR égale à m. Le premier résultat de cette Note est le suivant :

THÉORÈME 1. – *Si M est minimale en p et si M' ne contient pas de morceau ouvert de courbe complexe, f est analytique réelle en p.*

Adresses e-mail : coupet@cmi.univ-mrs.fr (B. Coupet); damour@cmi.univ-mrs.fr (S. Damour); merker@cmi.univ-mrs.fr (J. Merker); sukhov@agat.univ-lille1.fr (A. Sukhov).

S1631-073X(02)02392-0/FLA

Soit $\mathcal{M}_p$ le corps des germes en p des fonctions méromorphes au voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{M}_p(f) := \mathcal{M}_p(f_1, \ldots, f_{n'})$ son extension engendrée par les fonctions composantes $f_1, \ldots, f_{n'}$ de f. Soit $\deg.\mathrm{tr}_p f$ le degré de transcendance de cette extension [1–4,7]. Rappelons que le *degré de transcendance* d'une extension de corps est le cardinal commun à toutes les bases de transcendance [11, Chap. I et II], et que l'application f est analytique réelle en p si et seulement si $\deg.\mathrm{tr}_p f = 0$ ([3], [4, Lemme 3.4]). Cette notion algébrique se traduit géométriquement par :

THÉORÈME 2. – *Si M est minimale en p et si* $\deg.\mathrm{tr}_p f = s$*, alors M' contient un morceau ouvert de variété analytique complexe de dimension s.*

On note $\mathrm{rg.max}_p f$ le rang maximal de f sur un voisinage de p ; comme f se prolonge holomorphiquement à un wedge, d'après les théorèmes de Trépreau [9] et Tumanov [10], f atteint son rang maximal presque partout. On dit que M' est (r,s)*-plat* en $q' \in M'$ (*cf.* [2,3]) s'il contient une sous-variété analytique réelle de dimension r passant par q' et biholomorphe au produit cartésien $N \times \Delta^s$, où $N \subset \mathbb{C}^\nu$ ($\nu \geqslant 0$) est une variété analytique réelle et Δ^s est le polydisque unité dans $\mathbb{C}^s$. Cette notion permet de préciser le Théorème 2 :

THÉORÈME 3. – *Supposons que M est minimale en p et que* $\deg.\mathrm{tr}_p f = s$*. Alors il existe un entier $r \geqslant$* $\mathrm{rg.max}_p f$ *et un ouvert V dense au voisinage de p dans M tels que pour tout point $q \in V$, l'ensemble M' est (r,s)-plat en $f(q)$.*

Notre approche est basée sur la méthode algébrique développée pour les hypersurfaces dans [8,1–3]. Pour passer à la codimension supérieure, nous utilisons certains résultats récents de [4]. Dans le cas où M' est une variété analytique réelle, une approche géométrique pour le problème d'analyticité des applications CR lisses est développée dans les travaux fondamentaux de Diederich et Webster [6] et Diederich et Fornæss [5].

Notre méthode permet aussi d'étudier le problème général de l'analyticité des fonctions vectorielles vérifiant des équations analytiques :

THÉORÈME 4. – *Soient $M \subset \mathbb{C}^n$ une variété analytique réelle générique minimale en p et $f : M \to \mathbb{C}^{n'}$ une application CR de classe C^∞ telle que* $\deg.\mathrm{tr}_p f = s$*. Supposons que f vérifie les équations $P'_k(z,\bar z, f, \bar f) = 0$, $z \in M$, $k = 1, \ldots, d'$, où $P'_k(z,\bar z, z', \bar z') = \sum c_{\alpha\beta}(z,\bar z) z'^\alpha \bar z'^\beta$ sont des polynômes en $z', \bar z' \in \mathbb{C}^{n'}$ à coefficients $c_{\alpha\beta}(z,\bar z)$ analytiques réels au voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. Alors pour tout voisinage V de $(p, f(p))$, l'ensemble analytique réel $N := \{(z,z') \in V : P'_k(z,\bar z, z', \bar z') = 0, z \in M\}$ contient (éventuellement, après une permutation des coordonnées dans $\mathbb{C}^{n'}$) une sous-variété de la forme $\{(z,z') : z'_j = H_j(z, z'_1, \ldots, z'_s),\ j = s+1, \ldots, n',\ z \in M\}$, où les H_j sont des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s$.*

Les Théorèmes 1, 2 et 3 se ramènent au cas particulier du Théorème 4 où les coefficients des polynômes P'_k sont constants.

2. Extension méromorphe et dépendance algébrique

Soit $\mathcal{R}_p(M)$ l'anneau des germes en p des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M de la forme $h(z) = H(z, \bar z, \overline{g(z)})$, où $g = (g_1, \ldots, g_s)$, $s \geqslant 0$, sont des germes en p de fonctions CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et H est une fonction holomorphe au voisinage de $(p, \bar p, \overline{g(p)})$. Les opérateurs L_j sont des dérivations de l'anneau $\mathcal{R}_p(M)$. D'après le principe d'unicité pour les fonctions de $\mathcal{R}_p(M)$ [3,4], cet anneau est intègre. On note alors $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ le corps des fractions de $\mathcal{R}_p(M)$. Le résultat suivant, qui est une version généralisée du principe de réflexion de Lewy–Pinchuk, a été démontré dans [3] pour M une hypersurface et dans [4] pour le cas général.

LEMME 1. – *Si une fonction $\psi = h_1/h_2 \in \widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ est CR en dehors du fermé d'intérieur vide $\Sigma := \{z \in M : h_2(z) = 0\}$, elle se prolonge méromorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$.*

Une famille finie de fonctions $g_1, \ldots, g_s$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et CR au voisinage de p dans M est dite *algébriquement dépendante* sur $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ (resp. $\mathcal{M}_p$) s'il existe un polynôme non nul $Q \in \widehat{R}_p(M)[X_1, \ldots, X_s]$ (resp. $Q \in \mathcal{M}_p[X_1, \ldots, X_s]$) tel que $Q(g_1, \ldots, g_s)$ est identiquement nul au voisinage de p dans M en dehors de la réunion des lieux singuliers de ses coefficients (*cf.* [2,3]).

LEMME 2. – *La famille* $(g_1, \ldots, g_s)$ *est algébriquement dépendante sur* $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ *si et seulement si elle est algébriquement dépendante sur* $\mathcal{M}_p$. *Dans ce cas,* $\operatorname{deg.tr}_p g < s$.

Démonstration. – Supposons qu'il existe des fonctions $\alpha_J \in \widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, $J \in \mathbb{N}^s$, $|J| \leqslant A$, non toutes nulles telles que $\sum \alpha_J g^J = 0$ au voisinage de p sur M, en dehors des lieux singuliers des α_J. Considérons une équation de ce type comportant un nombre de monômes *minimal* et possédant un coefficient unitaire, disons $\alpha_{J_0} = 1$. En appliquant les opérateurs L_j, on obtient les équations $\sum_{J \neq J_0} L_j(\alpha_J) g^J = 0$, pour $j = 1, \ldots, m$. Ici, $L_j(\alpha_J) \in \widehat{R}_p(M)$. Par l'absurde, s'il existe un coefficient $L_{j_1}(\alpha_{J_1})$ non nul, on divise par ce coefficient et on obtient une contradiction avec le fait que l'équation initiale comportait un nombre minimal de monômes. Par conséquent, chaque α_J est CR en dehors de son lieu singulier ; le Lemme 1 permet de conclure. $\square$

LEMME 3. – *Soit* $g = (g_1, \ldots, g_s)$, $s \geqslant 1$, *une famille de fonctions CR de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *au voisinage de* p *dans* M *et* $P(z, \zeta, u, \omega)$ *une fonction holomorphe en* $(z, \zeta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ *et polynomiale en* $(u, \omega) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^s$ *au voisinage de* $(p, \bar{p}, g(p), \overline{g(p)})$. *On suppose que* $P(z, \bar{z}, g(z), \overline{g(z)}) \equiv 0$ *sur* M *au voisinage de* p *et que* $P(z, \bar{z}, u, \omega) \not\equiv 0$ *sur* $M \times \mathbb{C}^{2s}$ *au voisinage de* $(p, g(p), \overline{g(p)})$. *Alors, on a l'estimation* : $\operatorname{deg.tr}_p g < s$.

Démonstration. – On peut supposer que $p = 0$ et $g(p) = 0$. Écrivons P sous la forme $P(z, \zeta, u, \omega) = \sum \alpha_J(z, \zeta, \omega)\, u^J$, où les α_J, $J \in \mathbb{N}^s$, $|J| \leqslant A$, sont holomorphes en (z, ζ) et polynomiales en ω au voisinage de $(0, 0, 0)$. S'il existe J_0 tel que $\alpha_{J_0}(z, \bar{z}, \overline{g(z)}) \not\equiv 0$ sur M au voisinage de 0, alors $g_1, \ldots, g_s$ sont algébriquement dépendantes sur $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$, donc sur $\mathcal{M}_p$ d'après le Lemme 2. Si au contraire $\psi_J(z) := \alpha_J(z, \bar{z}, \overline{g(z)}) \equiv 0$ sur M au voisinage de 0 pour tout J, développons $\overline{\psi_J(z)} = \sum \beta_{IJ}(z, \bar{z})\, g(z)^I$ sous forme polynomiale. Comme $P(z, \bar{z}, u, \omega) \not\equiv 0$, il existe des multi-indices I_0 et J_0 tels que $\beta_{I_0 J_0}(z, \bar{z}) \not\equiv 0$ sur M au voisinage de 0. Alors, $\overline{\psi_{J_0}(z)} \equiv 0$ sur M au voisinage de p signifie à nouveau que $g_1, \ldots, g_s$ sont algébriquement dépendantes sur $\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$. $\square$

3. Démonstration des théorèmes

Dans la situation du Théorème 4, on pose $s = \operatorname{deg.tr}_p f$. On peut supposer que $f_1, \ldots, f_s$ est une base de transcendance du corps $\mathcal{M}_p(f)$ sur $\mathcal{M}_p$. Notons $f = (g, h) \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$, $t = n - s$, et $z' = (u', v') \in \mathbb{C}^s \times \mathbb{C}^t$. Pour tout $j = 1, \ldots, t$, il existe une fonction non identiquement nulle $Q_j(z, u', v'_j)$ polynomiale en $(u', v'_j) \in \mathbb{C}^{s+1}$ et holomorphe en z au voisinage de p, telle que $Q_j(z, g(z), h_j(z)) \equiv 0$ sur M au voisinage de p. Soit $\mathcal{Q}_p(f)$ le sous-ensemble analytique complexe de $\mathbb{C}^{n+n'}$ défini au voisinage de (p, p') par les équations $Q_j(z, u', v'_j) = 0$, $j = 1, \ldots, t$. Notons $\pi : \mathbb{C}^{n+n'} \to \mathbb{C}^n$ et $\pi' : \mathbb{C}^{n+n'} \to \mathbb{C}^{n'}$ les projections canoniques, et $\mathcal{Q}_p(f)|_M$ l'ensemble analytique réel $\mathcal{Q}_p(f) \cap \pi^{-1}(M)$. Le graphe Γ_f de f est inclus dans $\mathcal{Q}_p(f)|_M$. Soit $\Delta_j(z, u')$ le discriminant de $Q_j(z, u', v'_j)$ par rapport à v'_j et soit $\Sigma := \{z \in M : \Delta_j(z, g(z)) = 0,\ j = 1, \ldots, t\}$. Il faut remarquer que $\Delta_j(z, g(z)) \not\equiv 0$ au voisinage de p sur M, $j = 1, \ldots, t$, car $g_1, \ldots, g_s$ est une base de transcendance.

Appliquons maintenant la méthode de [1–3]. Soit $\mathcal{M}_p[u']$ l'anneau des polynômes en u' à coefficients méromorphes au voisinage de p. D'après le théorème des fonctions implicites, pour tout point $q \in M \setminus \Sigma$, il existe des fonctions $H_j(z, u')$ $(1 \leqslant j \leqslant t)$ définies sur un voisinage de $(q, f(q))$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n'}$, holomorphes par rapport à z et algébriques par rapport à u', telles que $Q_j(z, u', H_j(z, u')) \equiv 0$ pour (z, u') dans un voisinage de $(q, g(q))$, i.e. les fonctions $H_j(z, u')$ sont algébriques sur $\mathcal{M}_p[u']$. Considérons la substitution $r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}') := P'_k(z, \bar{z}, u', H(z, u'), \bar{u}', \overline{H(z, u')})$. L'algébricité des $H_j(z, u')$ sur $\mathcal{M}_p[u']$ implique qu'il existe un polynôme non nul $\sum_{l=0}^N A_l(z, u', \bar{z}, \bar{u}')\, X^l$ avec des coefficients analytiques réels par rapport à $(z, \bar{z})$ dans un voisinage Ω de $(p, \bar{p})$ et polynomiaux par rapport à $(u', \bar{u}')$ tel que $\sum_{l=0}^N A_l(z, u', \bar{z}, \bar{u}')\, [r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}')]^l \equiv 0$ (*cf.* [1, Lemme 6.4]). Par construction, $r'_k(z, g(z), \bar{z}, \overline{g(z)}) = 0$ pour tout z proche de q. Le lemme suivant est similaire au Lemme 6.5 de [1] :

LEMME 4. – *On a* $r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}') \equiv 0$ *pour tout* $(z, u') \in M \times \mathbb{C}^s$ *au voisinage de* $(q, g(q))$.

Démonstration. – Raisonnons par l'absurde : si $r'_k(z, u', \bar{z}, \bar{u}')$ est non identiquement nul, on peut supposer que $A_0(z, u', \bar{z}, \bar{u}') = \sum u'^J A_{0J}(z, \bar{z}, \bar{u}')$ est non identiquement nul et que $A_0(z, g(z), \bar{z}, \overline{g(z)}) \equiv 0$ pour tout z dans un voisinage U_q de q. Si tous les $A_{0J}(z,\bar z,\overline{g(z)})\equiv 0$ sur U_q, d'après le principe d'unicité pour les éléments de $\widehat{R}_p(M)$ [3,4], on a $A_{0J}(z,\bar z,\overline{g(z)})\equiv 0$ dans un voisinage de p, ce qui contredit l'indépendance algébrique de $(g_1,\dots,g_s)$ d'après le Lemme 3. S'il existe $A_{0J_0}(z,\bar z,\overline{g(z)})\not\equiv 0$ sur U_q, considérons toutes les équations $\sum \alpha_J\, g^J=0$ satisfaites sur un ouvert dense $V_q\subset U_q$ avec $\alpha_J\in\widehat{R}_p(M)$ comportant un nombre *minimal* de monômes et possédant un coefficient α_{J_0} égal à 1. Comme dans le Lemme 2, les α_J sont CR sur V_q. Alors les α_J se prolongent méromorphiquement à un voisinage de p dans $\mathbb{C}^n$. En effet, un examen direct de la preuve fournie dans [3], [4, Proposition 2.5], démontre qu'il suffit que $\psi\in\widehat{\mathcal{R}}_p(M)$ soit seulement CR sur un ouvert non vide de M pour que la conclusion du Lemme 1 soit vraie. Donc $(g_1,\dots,g_s)$ est algébriquement dépendante sur $\mathcal{M}_p$, ce qui contredit la définition de g. □

L'annulation des $r'_k(z,u',\bar z,\overline{u'})$ s'interprète géométriquement de la façon suivante :

LEMME 5. – *Pour tout point $q\in M\setminus\Sigma$ suffisamment proche de p, il existe un voisinage Ω_q de $(q,f(q))$ dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^{n'}$ tel que $\mathcal{Q}_p(f)|_M\cap\Omega_q\subset N=\{(z,z'): P'_k(z,\bar z,z',\bar z')=0,\ z\in M\}$.*

Fixons un point $q\in M\setminus\Sigma$ suffisamment proche de p. Les équations de $\mathcal{Q}_p(f)$ s'écrivent dans un voisinage $\Omega=U\times V\times W$ de $(q,g(q),h(q))$ sous la forme d'un graphe $v'_j=H_j(z,u')$, où les fonctions H_j sont holomorphes sur $U\times V$. Cela démontre le Théorème 4.

Le lemme suivant permet de conclure la démonstration du Théorème 3 qui implique les Théorèmes 1 et 2 (*cf.* [1–4,7]).

LEMME 6. – *Pour tout point $q\in M\setminus\Sigma$ suffisamment proche de p, il existe un voisinage Ω_q de $(q,f(q))$ dans $\mathbb{C}^{n+n'}$ tel que $\pi'(\mathcal{Q}_p(f)|_M\cap\Omega_q)$ est une variété analytique réelle de dimension supérieure ou égale à* rg.max$_p$ f*, passant par $f(q)$ et biholomorphe au produit cartésien $N\times\Delta^s$, où $N\subset\mathbb{C}^\nu$ $(\nu\geqslant 0)$, est une variété analytique réelle et $\Delta^s\subset\mathbb{C}^s$ le polydisque unité.*

Démonstration. – Le Lemme 5 implique $\pi'(\mathcal{Q}_p(f)|_M\cap\Omega_q)\subset M'$. En tant que graphe, la variété analytique réelle $\mathcal{Q}_p(f)|_M\cap\Omega$ est biholomorphe au produit cartésien $(M\cap U)\times V$, c'est-à-dire qu'elle est feuilletée par des morceaux ouverts de variétés complexes de dimension s. Soit $\Psi:(M\cap U)\times V\to\mathbb{C}^{n'}$, $(z,u')\mapsto(u',H(z,u'))$, avec $H=(H_1,\dots,H_t)$. L'application analytique réelle Ψ est biholomorphe sur les fibres $\{z\}\times V$, $z\in M\cap U$. De plus, elle est de même rang générique r que $\pi'|_{\mathcal{Q}_p(f)|_M}$; et $r\geqslant$ rg.max$_p$ f puisque $\Gamma_f\subset\mathcal{Q}_p(f)|_M$. Par le théorème du rang (analytique réel), on conclut que pour tout $q'\in M\setminus\Sigma'$ suffisamment proche de p, où $\Sigma'\subset M$ est un fermé d'intérieur vide, il existe un voisinage $\Omega'=U'\times V'\times W'$ de $(q',g(q'),h(q'))$ tel que $N':=\Psi((M\cap U')\times V')=\pi'(\mathcal{Q}_p(f)|_M\cap\Omega')$ est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^{n'}$ de dimension r. De plus, il existe une sous-variété analytique réelle $N\subset M\cap U'$ telle que $\Psi|_{N\times V'}$ est un difféomorphisme analytique réel sur N'. Finalement, on peut prolonger $\Psi|_{N\times V'}$ en un biholomorphisme local de l'espace ambiant. □

Références bibliographiques

[1] B. Coupet, F. Meylan, A. Sukhov, Holomorphic maps of algebraic CR manifolds, Int. Math. Res. Not. (1999) 1–29.
[2] B. Coupet, S. Pinchuk, A. Sukhov, Analyticité des applications CR, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 329 (1999) 489–494.
[3] B. Coupet, S. Pinchuk, A. Sukhov, On partial analyticity of CR mappings, Math. Z. 235 (2000) 541–557.
[4] S. Damour, On the analyticity of smooth CR mappings, Michigan Math. J. 49 (2001) 583–603.
[5] K. Diederich, J.E. Fornæss, Proper holomorphic mappings between real-analytic pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 282 (1988) 681–700.
[6] K. Diederich, S.M. Webster, A reflection principle for degenerate real hypersurfaces, Duke Math. J. 47 (1980) 835–843.
[7] J. Merker, On the partial algebraicity of holomorphic mappings between two real algebraic sets, Bull. Soc. Math. France 129 (2001) 547–591.
[8] S. Pinchuk, Analytic continuation of holomorphic mappings, Thèse d'état, Moscou, 1980.
[9] J.-M. Trépreau, Sur le prolongement holomorphe des fonctions CR définies sur une hypersurface réelle de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{C}^n$, Invent. Math. 83 (1986) 583–592.
[10] A. Tumanov, Extension of CR functions into a wedge from a manifold of finite type, Mat. Sb. 136 (1988) 128–139.
[11] O. Zariski, P. Samuel, Commutative Algebra, Vol. 1, Van Nostrand, 1958.