C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1029–1034

Probabilités/*Probability Theory*

Frontière de Martin des marches aléatoires sur certains hypergroupes d-dimensionnels

Laurent Godefroy

Université de Tours, Laboratoire de mathématiques, Parc de Grandmont, 37200 Tours, France

Reçu le 15 février 2002 ; accepté après révision le 2 avril 2002

Note présentée par Marc Yor.

Résumé On donne une formule de représentation intégrale des fonctions harmoniques des chaînes de Markov sur $\mathbb{N}^d$ et $\mathbb{R}_+^d$ dont le noyau de transition est invariant par les translations d'une structure d'hypergroupe, produit d'hypergroupes polynomiaux pour $\mathbb{N}^d$ et produit d'hypergroupes de Sturm–Liouville pour $\mathbb{R}_+^d$. ***Pour citer cet article : L. Godefroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1029–1034.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Martin boundary of random walks on certain d-dimensional hypergroups

Abstract We give an integral representation formula for harmonic functions of Markov chains on $\mathbb{N}^d$ and $\mathbb{R}_+^d$ which transition probability is invariant by translations of a hypergroup, product of polynomial hypergroups for $\mathbb{N}^d$ and product of Sturm–Liouville hypergroups for $\mathbb{R}_+^d$. ***To cite this article: L. Godefroy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 1029–1034.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In this Note, we study the Martin boundary of random walks on product hypergroups, more precisely $\mathbb{N}^d$ and $\mathbb{R}_+^d$ (for definition and general property of random walks on hypergroups *see* [7]). Our main tool is the Choquet's theorem [3], which gives an integral representation formula for positive harmonic functions of these Markov chains.

First, we consider $\mathbb{N}^d$ as a product of d Cartier–Dunau polynomial hypergroups (*see* [5,1] and [6]). Let $(p_i, q_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ such that $p_i + q_i = 1$, $p_i > q_i$, and $(P_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (P_n^d)_{n\in\mathbb{N}}$ the families of associated polynomials. Let

$$\mathcal{S}_\mu = \Big\{(x_1, \ldots, x_d) \in [2\sqrt{p_1q_1}, +\infty[\times\cdots\times[2\sqrt{p_dq_d}, +\infty[\text{ such that } \sum_{n_1,\ldots,n_d} \mu(n_1, \ldots, n_d) P_{n_1}^1(x_1)\cdots P_{n_d}^d(x_d) = 1\Big\}.$$

We obtain the following result: there is a one-to-one correspondence between the cone of positive harmonic functions for the random walk of law μ and the set of Borelian, positive, finite measures on $\mathcal{S}_\mu$. This

Adresse e-mail : godefroy@univ-tours.fr (L. Godefroy).

S1631-073X(02)02379-8/FLA

correspondence is given by the formula:

$$h(n_1,\ldots,n_2)=\int_{\mathcal{S}_\mu} P^1_{n_1}(x_1)\cdots P^d_{n_d}(x_d)\,\mathrm{d}\nu(x_1,\ldots,x_d).$$

Moreover, we obtain a Choquet–Deny type result (*see* [4]), that is, all the bounded harmonic functions are constant.

In the case of the random walk to the nearest neighbour with reflecting barriers on the coordinate hyperplanes, the Martin boundary is a $d-1$ affine simplex. In [9] Kurkova and Malyshev have studied random walks of the same type, without any condition of reflection on the coordinate hyperplanes, but only in two dimensions. However, they obtain a less explicit description of the Martin boundary.

Then, we consider $\mathbb{R}^d_+$ as a product of d Sturm–Liouville Hypergroups (*see* [1] and [6]).

Let $(\varphi^1_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}},\ldots,(\varphi^d_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ be the d family of associated multiplicative functions. Let

$$\widetilde{\mathcal{S}_\mu}=\left\{(\omega_1,\ldots,\omega_d)\in\mathbb{R}^d_+\quad\text{such that}\ \int_{\mathbb{R}_+\times\cdots\times\mathbb{R}_+}\phi^1_{i\omega_1}(x_1)\cdots\phi^d_{i\omega_d}(x_d)\,\mathrm{d}\mu(x_1,\ldots,x_d)=1\right\}.$$

We have the following result: there is a one to one correspondence between the cone of positive continuous harmonic functions for the random walk of law μ and the set of Borelian, positive, finite measures on $\widetilde{\mathcal{S}_\mu}$. This correspondence is given by the formula:

$$h(x_1,\ldots,x_d)=\int_{\widetilde{\mathcal{S}_\mu}}\varphi^1_{i\omega_1}(x_1)\cdots\varphi^d_{i\omega_d}(x_d)\,\mathrm{d}\nu(\omega_1,\ldots,\omega_d).$$

Here again, we obtain a Choquet–Deny type result (*see* [4]), that is, all the bounded continuous harmonic functions are constant.

In the particular case of a product of d Bessel hypergroups, all positive continuous harmonic functions are constant.

1. Généralités

Sur tout espace topologique muni d'une structure d'hypergroupe, on définit une notion de marche aléatoire qui généralise celle des groupes (*voir* par exemple [7]). Dans le cas commutatif, elle se définit comme suit :

Soit X un hypergroupe abélien, involutif, d'opérateurs de translation T_x, $x\in X$, et $B^+(X)$ l'ensemble des fonctions boréliennes positives sur X. Pour μ une mesure de probabilité sur X, on note T_μ l'opérateur de translation agissant sur les fonctions de $B^+(X)$ définit par : $T_\mu f(x)=\int_X T_y f(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$, $x\in X$. On dit qu'une chaîne de Markov est une marche aléatoire sur X, si son noyau de transition P commute avec les translations, c'est-à-dire si pour tout $x\in X$ et pour toute $f\in B^+(X)$, $PT_xf=T_xPf$. Ceci est équivalent au fait qu'il est de la forme $P=T_\mu$, avec μ une mesure de probabilité sur X, que l'on appelle loi de la marche aléatoire.

Il est alors naturel de s'intéresser aux fonctions harmoniques positives associées, c'est à dire aux fonctions h positives vérifiant l'équation : $h(x)=Ph(x)=T_\mu h(x)$. Dans cette Note, d'abord dans le cas d'un hypergroupe sur $\mathbb{N}^d$ produit d'hypergroupes polynomiaux, puis dans le cas d'un hypergroupe sur $\mathbb{R}^d_+$ produit d'hypergroupes de Sturm–Liouville, on établit une formule de représentation intégrale pour ces fonctions, analogue à celle de Ney et Spitzer pour les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ (*cf.* [11]). De plus, on explicite précisemment la frontière de Martin des processus aléatoires en question. Nous adoptons pour ce faire une méthode utilisée par Neveu dans [10], basée sur l'utilisation du théorème de Choquet (*voir* [3]).

Un exemple simple mais important de marche aléatoire sur $\mathbb{N}^d$ qui rentre dans notre cadre, est la marche au plus proche voisin avec barrières réfléchissantes sur les hyperplans de coordonnée. On montre alors que la frontière de Martin est un simplexe affine de dimension $d-1$. Des marches aléatoires analogues ont été traitées par Kurkova et Malyshev dans [9], sans conditions de réflexion aux axes, ce qui ne leur permet pas d'obtenir une description aussi explicite de la frontière de Martin. De plus, leur méthode est spécifique à la dimension 2.

Dans cette étude, un certain type de surfaces joue un rôle fondamental dans la description de la frontière de Martin ; c'est pourquoi nous introduisons la définition suivante :

DÉFINITION 1. – On appelle simplexe généralisé de dimension $d-1$, toute hypersurface compacte $\mathfrak{S}_{d-1}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^d$, homéomorphe par l'application $x \mapsto x/\|x\|$ à la portion de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ contenue dans l'orthant positif $\mathbb{R}_+^d$ et telle que les projections :

$$\Pi_i : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

de $\mathfrak{S}_{d-1}$ sur les hyperplans de coordonnées soient injectives. La translatée d'une telle hypersurface par un vecteur de $\mathbb{R}_+^d$ sera également appelée simplexe généralisé.

On notera qu'un simplexe affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension $d-1$ dont les sommets ont pour coordonnées $(z_1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, z_d)$ avec chaque $z_i > 0$, est un simplexe généralisé au sens de la définition précédente.

2. Cas de $\mathbb{N}^d$

Lors d'une étude de l'arbre homogène (*cf.* [5]), Dunau a considéré une suite de polynômes définie par la relation de récurrence suivante : soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p+q=1$ et $p>q$.

$$\begin{cases} P_0 \equiv 1 \text{ et } P_1(x) = x, \\ xP_n(x) = pP_{n+1}(x) + qP_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1). \end{cases}$$

PROPOSITION 1. – *Soit π la mesure $\pi(dx) = \frac{\sqrt{pq}}{q\pi} \frac{\sqrt{4pq-x^2}}{1-x^2} \mathbf{1}_{[-2\sqrt{pq}, 2\sqrt{pq}]}(x)\,\mathrm{d}x$. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour la mesure π, et on a la formule produit : $P_n(x)P_m(x) = \sum_{r=|n-m|}^{n+m} C(n,m,r)P_r(x)$, où les coefficients de linéarisation $C(n,m,r)$ sont tous positifs ou nuls.*

Donnons nous maintenant d couples $(p_i, q_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ vérifiant $p_i + q_i = 1$ et $p_i > q_i$, et les d familles de polynômes associées : $(P_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, (P_n^d)_{n\in\mathbb{N}}$.

DÉFINITION 2. – Soit $(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. On définit l'opérateur de translation $T_{(n_1,\ldots,n_d)}$ agissant sur les fonctions positives f de $\mathbb{N}^d$ par :

$$T_{(n_1,\ldots,n_d)} f(m_1, \ldots, m_d) = \sum_{r_1,\ldots,r_d} C^1(n_1, m_1, r_1) \cdots C^d(n_d, m_d, r_d) f(r_1, \ldots, r_d).$$

Muni de cette translation, $\mathbb{N}^d$ est un hypergroupe commutatif et involutif, produit de d hypergroupes polynomiaux (*voir* [1] et [6]).

Dans la suite, les marches aléatoires sur $\mathbb{N}^d$ seront supposées irréductibles et leurs lois seront à support compact.

PROPOSITION 2. – *L'ensemble $\mathcal{C}_\mu$ des fonctions harmoniques positives relatives à la marche aléatoire de loi μ est un cône convexe, et l'équation $h(0, \ldots, 0) = 1$ en définit une base $\mathcal{B}_\mu$, compacte pour la topologie de la convergence simple.*

Démonstration. – On montre que pour tout $n = (n_1, \ldots, n_d)$ appartenant à $\mathbb{N}^d$, il existe $C_n > 0$ tel que pour tout h dans $\mathcal{C}_\mu$, $h(n_1, \ldots, n_d) \leqslant C_n h(0, \ldots, 0)$. On en déduit le résultat.

THÉORÈME 1. – *Les points extrémaux du convexe $\mathcal{B}_\mu$ sont les fonctions h définies sur $\mathbb{N}^d$ par :*

$$h(n_1, \ldots, n_d) = P_{n_1}^1(x_1) \cdots P_{n_d}^d(x_d)$$

correspondant aux vecteurs $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{S}_\mu$ où

$$\mathcal{S}_\mu = \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in [2\sqrt{p_1 q_1}, +\infty[\times \cdots \times [2\sqrt{p_d q_d}, +\infty[\textit{ tels que} \right.$$
$$\left. \sum_{n_1,\ldots,n_d} \mu(n_1, \ldots, n_d) P^1_{n_1}(x_1) \cdots P^d_{n_d}(x_d) = 1 \right\}.$$

Démonstration (*idée*). – La translatée d'une fonction harmonique est harmonique, et donc une fonction harmonique extrémale vérifie nécessairement l'équation :

$$\forall (n_1, \ldots, n_d), (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d,\ T_{(n_1,\ldots,n_d)} h(m_1, \ldots, m_d) = h(n_1, \ldots, n_d) h(m_1, \ldots, m_d).$$

On conclut alors en utilisant le fait que $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ P_n(x) \geqslant 0\} = [2\sqrt{pq}, +\infty[$.

PROPOSITION 3. – *$\mathcal{S}_\mu$ est un simplexe généralisé de dimension $d-1$.*

COROLLAIRE 1. – *Pour toute fonction harmonique positive h, il existe une unique mesure borélienne, positive, bornée ν sur $\mathcal{S}_\mu$ telle que* :

$$h(n_1, \ldots, n_2) = \int_{\mathcal{S}_\mu} P^1_{n_1}(x_1) \cdots P^d_{n_d}(x_d)\, \mathrm{d}\nu(x_1, \ldots, x_d).$$

Réciproquement, pour toute mesure borélienne, positive, bornée ν sur $\mathcal{S}_\mu$, la formule précédente définit une fonction harmonique positive.

Démonstration. – C'est une application du théorème de représentation intégrale de Choquet [3], et du fait que si l'on identifie l'ensemble des points extémaux de $\mathcal{B}_\mu$ avec $\mathcal{S}_\mu$, la topologie de la convergence simple coïncide avec la topologie induite sur $\mathcal{S}_\mu$ par la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^d$.

COROLLAIRE 2 (Choquet–Deny [4]). – *Les fonctions harmoniques bornées sont constantes.*

Démonstration. – On remarque que la fonction constante égale à 1 est extrémale.

Exemple 1. – Cas particulier de la marche au plus proche voisin avec barrières réfléchissantes sur les hyperplans de coordonnée : soient $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$, $(\beta_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ des réels strictement positifs tels que $\alpha_i > \beta_i$ et $\sum_{i=1}^d (\alpha_i + \beta_i) = 1$. Soit ε_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soit P le noyau de transition sur $\mathbb{N}^d$ définit par :

$$P(n, n+\varepsilon_i) = \alpha_i, \quad P(n, n-\varepsilon_i) = \beta_i, \quad n \in \mathbb{N}^d_*.$$

Sur les hyperplans de coordonnée, on impose une condition de reflexion :

$$P(n, n+\varepsilon_{i_0}) = \alpha_{i_0} + \beta_{i_0} \quad \text{si } n_{i_0} = 0.$$

Dans ce cas, la frontière de Martin est homéomorphe à un simplexe affine de dimension $d-1$. Plus précisément, c'est l'intersection de l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^d (\alpha_i + \beta_i) x_i = 1$ avec

$$\{(x_1, \ldots, x_d) \in [2\sqrt{p_1 q_1}, +\infty[\times \cdots \times [2\sqrt{p_d q_d}, +\infty[\}.$$

3. Cas de $\mathbb{R}^d_+$

DÉFINITION 3. – Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $A : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de la forme $A(t) = t^{2\alpha+1} C(t)$, avec $\alpha > -\frac{1}{2}$ et où C est une fonction réelle strictement positive, paire et analytique. On suppose de plus que A est croissante, A'/A est décroissante et $\lim_{t\to+\infty} A'(t)/A(t) = 2\rho$ $(\rho \geqslant 0)$.

Rappelons un résultat dû à Trimèche [14] et Chebli [2] :

PROPOSITION 4. – *Soit L l'opérateur différentiel suivant : $L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{A'}{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation aux valeurs propres*

$$\begin{cases} Lu = -(\lambda^2 + \rho^2) u, \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution, notée φ_λ. De plus, pour tout couple de points $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une mesure de probabilité $W_{x,y}(\mathrm{d}z)$, à support dans $[|x-y|, x+y]$ telle que

$$\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) = \int_0^{+\infty} \varphi_\lambda(z) W_{x,y}(\mathrm{d}z).$$

Donnons nous maintenant d fonctions $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ appartenant à $\mathcal{F}$, et soit $\rho_i = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} A_i'(t)/A_i(t)$.

DÉFINITION 4. – Soit $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$. On définit l'opérateur de translation $T_{(x_1,\dots,x_d)}$ agissant sur les fonctions boréliennes positives f de $\mathbb{R}_+^d$ par :

$$T_{(x_1,\dots,x_d)} f(y_1, \dots, y_d) = \int_{|x_1-y_1|}^{x_1+y_1} \cdots \int_{|x_d-y_d|}^{x_d+y_d} f(z_1, \dots, z_d) W^1_{x_1,y_1}(\mathrm{d}z_1) \cdots W^d_{x_d,y_d}(\mathrm{d}z_d).$$

Muni de cette translation, $\mathbb{R}_+^d$ est un hypergroupe commutatif et involutif, produit de d hypergroupes de Sturm–Liouville (*voir* [1] et [6]).

Dans la suite, les marches aléatoires sur $\mathbb{R}_+^d$ seront supposées irréductibles, leurs lois seront à support compact et à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^d$.

PROPOSITION 5. – *L'ensemble $\widetilde{\mathcal{C}_\mu}$ des fonctions harmoniques positives continues relatives à la marche aléatoire de loi μ est un cône convexe, et l'équation $h(0, \dots, 0) = 1$ en définit une base $\widetilde{\mathcal{B}_\mu}$, compacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

Démonstration. – De manière analogue à Raugi (*cf.* [12]), on montre que pour tout élément h de $\widetilde{\mathcal{C}_\mu}$ on a

$$\forall (x_1, \dots, x_d), (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}_+^d, \quad \bigl|h(x_1, \dots, x_d) - h(y_1, \dots, y_d)\bigr| \leqslant h(0, \dots, 0)\varepsilon(x, y)$$

avec

$$\varepsilon(x, y) = \sup_{z\in\mathbb{R}_+^d} \frac{|T_{(x_1,\dots,x_d)} r(z_1, \dots, z_d) - T_{(y_1,\dots,y_d)} r(z_1, \dots, z_d)|}{S(z)},$$

où r est la densité de μ par rapport à la mesure $A_1(x_1)\cdots A_d(x_d)\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d$ et S une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}_+^d$. On en déduit le résultat.

La méthode classique où l'on étudie le cône des mesures invariantes relatives au noyau de transition, voir [8,13], permet également de démontrer la proposition.

THÉORÈME 2. – *Les points extrémaux du convexe $\widetilde{\mathcal{B}_\mu}$ sont les fonctions h définies sur $\mathbb{R}_+^d$ par :*

$$h(x_1, \dots, x_d) = \varphi^1_{i\omega_1}(x_1)\cdots\varphi^d_{i\omega_d}(x_d)$$

correspondant aux vecteurs $(\omega_1, \dots, \omega_d) \in \widetilde{\mathcal{S}_\mu}$ où

$$\widetilde{\mathcal{S}_\mu} = \left\{(\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbb{R}_+^d \text{ tels que } \int_{\mathbb{R}_+\times\cdots\times\mathbb{R}_+} \varphi^1_{i\omega_1}(x_1)\cdots\varphi^d_{i\omega_d}(x_d)\,\mathrm{d}\mu(x_1, \dots, x_d) = 1\right\}.$$

Démonstration. – On utilise le fait que $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi_\lambda(x) \geqslant 0\} = i\mathbb{R}_+$, et on adopte une méthode similaire à celle de la preuve du Théorème 1, avec toutefois quelques difficultés techniques supplémentaires, liées aux fonctions propres $(\phi_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ de l'opérateur L.

PROPOSITION 6. – *Dans le cas où pour tout i on a $\rho_i = 0$, $\widetilde{\mathcal{S}_\mu}$ est réduit au singleton $(0, \dots, 0)$. Dans le cas contraire, $\widetilde{\mathcal{S}_\mu}$ est un simplexe généralisé de dimension $d-1$.*

COROLLAIRE 3. – *Dans le cas où pour tout i on a $\rho_i = 0$, toutes les fonctions harmoniques minorées continues sont constantes.*

Dans le cas contraire, pour toute fonction harmonique positive continue h, il existe une unique mesure borélienne, positive, bornée ν sur $\widetilde{\mathcal{S}_\mu}$ telle que :

$$h(x_1,\ldots,x_d)=\int_{\widetilde{\mathcal{S}_\mu}}\varphi^1_{i\omega_1}(x_1)\cdots\phi^d_{i\omega_d}(x_d)\,\mathrm{d}\nu(\omega_1,\ldots,\omega_d).$$

Réciproquement, pour toute mesure borélienne, positive, bornée ν sur $\widetilde{\mathcal{S}_\mu}$, la formule précédente définit une fonction harmonique positive continue.

COROLLAIRE 4 (Choquet–Deny [4]). – *Les fonctions harmoniques continues bornées sont constantes.*

Exemple 2. – Dans le cas particulier des marches aléatoires sur un produit de d hypergroupes de Bessel, c'est à dire quand pour tout i $A_i(x)=x^{2\alpha_i+1}$ avec $\alpha_i>-1/2$, toutes les fonctions harmoniques minorées sont constantes.

Références bibliographiques

[1] W. Bloom, H. Heyer, Harmonic Analysis of Probability Measures on Hypergroups, Stud. Math. de Gruyter, 1995.
[2] H. Chebli, Opérateurs de translation généralisée et semi-groupes de convolution, in : Théorie du potentiel et analyse harmonique, Lecture Notes in Math., Vol. 404, Springer-Verlag, 1974, pp. 35–59.
[3] G. Choquet, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Séminaire Bourbaki 139 (1956) 1–15.
[4] G. Choquet, J. Deny, Sur l'équation de convolution $\mu=\mu\star\sigma$, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 250 (1960) 799–801.
[5] J.L. Dunau, Étude d'une marche aléatoire sur l'arbre homogène, Publications de l'Université Paul Sabatier Toulouse, 1976.
[6] L. Gallardo, A multidimensional central limit theorem for random walks on hypergroups, Stochastics and Stochastics Rep. (2002), to appear.
[7] L. Gallardo, O. Gebuhrer, Marches aléatoires et hypergroupes, Exposition. Math. 5 (1) (1987) 41–73.
[8] Y. Guivarc'h, L. Ji, J.C. Taylor, Compactifications of Symmetric Spaces, Progress in Math., Birkhäuser, 1997.
[9] I.A. Kurkova, V.A. Malyshev, Martin boundary and elliptic curves, Markov Processes and Related Fields 4 (2) (1998) 203–272.
[10] J. Neveu, Potentiels markoviens discrets, Ann. Univ. Clermont 24 (1964) 37–89.
[11] P. Ney, F. Spitzer, The Martin boundary for random walk, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966) 116–132.
[12] A. Raugi, Fonctions harmoniques positives sur certains groupes de Lie résolubles connexes, Bull. Soc. Math. France 124 (4) (1996) 649–684.
[13] D. Revuz, Markov Chains, 2nd edn., North-Holland, 1984.
[14] K. Trimeche, Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley–Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur $[0,+\infty[$, J. Math. Pures Appl. 60 (1981) 51–98.