C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 773–778

Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Théorèmes ergodiques maximaux dans les espaces L_p non commutatifs

Marius Junge [a], Quanhua Xu [b]

[a] Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA

[b] Laboratoire de mathématiques, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon cedex, France

Reçu le 14 mars 2002 ; accepté le 19 mars 2002

Note présentée par Gilles Pisier.

Résumé On obtient certains théorèmes ergodiques maximaux dans les espaces L_p non commutatifs associés à une algèbre de von Neumann semifinie. ***Pour citer cet article : M. Junge, Q. Xu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 773–778.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Maximal ergodic theorems in non-commutative L_p-spaces

Abstract We prove several maximal ergodic theorems in non-commutative L_p-spaces associated with semifinite von Neumann algebras. ***To cite this article: M. Junge, Q. Xu, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 773–778.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

The starting point for non-commutative pointwise ergodic theorems is a result of Lance [9], who proved that ergodic means associated with an automorphism of a σ-finite von Neumann algebra converge almost uniformly. Lance's ergodic theorem was extensively extended and improved by Conze, Dang-Ngoc [3] and Kümmerer [8], among many others (*see* [5] for more references). On the other hand, Yeadon [13] proved a maximal ergodic theorem in the preduals of semifinite von Neumann algebras. Yeadon's theorem is a certain maximal ergodic inequality of weak type $(1,1)$, which is the ergodic analogue of the same kind of maximal inequality of weak type $(1,1)$ for non-commutative martingales obtained previously by Cuculescu [4]. Motivated by the recent development of non-commutative martingale inequalities, in particular a proper formulation of Doob's maximal inequality for non-commutative martingales established in [6], we are lead to the investigation of maximal ergodic inequalities in non-commutative L_p-spaces.

To state our main results we first need to set up the right framework. Throughout this Note we will use the following notations. $\mathcal{M}$ will always denote a semifinite von Neumann algebra, equipped with a normal semifinite faithful trace τ. The associated non-commutative L_p-space is denoted by $\mathrm{L}_p(\mathcal{M},\tau)$ or simply by $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Recall that the elements in $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ are measurable operators with respect to

Adresses e-mail : junge@math.uiuc.edu (M. Junge); qx@math.univ-fcomte.fr (Q. Xu).

S1631-073X(02)02367-1/FLA

$(\mathcal{M},\tau)$. Let $T:\mathrm{L}_1(\mathcal{M})+\mathrm{L}_\infty(\mathcal{M})\to \mathrm{L}_1(\mathcal{M})+\mathrm{L}_\infty(\mathcal{M})$ be a linear mapping which might satisfy some of the following properties

(I) T is a contraction on $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$: $\|Tx\|_p\leqslant\|x\|_p,\ \forall x\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$;
(II) T is positive: $Tx\geqslant 0$ if $x\geqslant 0$;
(III) T is selfadjoint on $\mathrm{L}_2(\mathcal{M})$;
(IV) T is 2-positive: $\mathrm{id}_{M_2}\otimes T$ is positif (M_2 being the 2×2 matrix algebra).

The properties (I) and (II) will be essential for what follows. We will sometimes assume T also satisfies (III) or (IV). Then we set

$$M_n(T)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}T^k(x),\quad x\in \mathrm{L}_1(\mathcal{M})+\mathrm{L}_\infty(\mathcal{M}).$$

The following is our main result. As usual, the letters $C_p, C'_p,\dots$ denote positive constants depending only on p, and C an absolute constant.

THEOREM. – *Let* $1<p\leqslant\infty$ *and* T *be a linear mapping satisfying* (I) *and* (II) *above.*

(i) *Then for any* $x\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *with* $x\geqslant 0$ *there is* $a\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *such that*

$$\|a\|_p\leqslant C_p\|x\|_p\quad\textit{and}\quad M_n(T)(x)\leqslant a,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Moreover, $C_p\leqslant Cp^2(p-1)^{-2}$ *and* $(p-1)^{-2}$ *is the optimal order of* C_p *for* $p\to 1$.

(ii) *If additionally* T *satisfies* (III), *then for any* $x\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *with* $x\geqslant 0$ *there is* $a\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *such that*

$$\|a\|_p\leqslant C'_p\|x\|_p\quad\textit{and}\quad T^n(x)\leqslant a,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

This is the non-commutative analogue of the classical maximal ergodic theorem in commutative L_p-spaces. Note that the optimal order of the constant C_p in the part (i) above is different from that in the commutative case, which is $(p-1)^{-1}$ as $p\to 1$.

As in the commutative case, this theorem also holds for all elements of $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ (not only the positive ones). In fact, the part (i) above is equivalent to the following. For any $x\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ with $x\geqslant 0$ there are positive $a\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ and positive $y_n\in\mathcal{M}$ $(n\in\mathbb{N})$ such that

$$\|a\|_p\leqslant C_p\|x\|_p,\quad \|y_n\|_\infty\leqslant 1,\quad M_n(T)(x)=a^{1/2}y_na^{1/2},\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

This is then easily extended to all $x\in\mathcal{M}$, namely, for any $x\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ there are $a,b\in \mathrm{L}_{2p}(\mathcal{M})$ and $y_n\in\mathcal{M}$ $(n\in\mathbb{N})$ such that

$$\|a\|_{2p}\|b\|_{2p}\leqslant C_p\|x\|_p,\quad \|y_n\|_\infty\leqslant 1,\quad M_n(T)(x)=ay_nb,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Using the l_∞-valued non-commutative L_p-space $\mathrm{L}_p(\mathcal{M};l_\infty)$ introduced in [10] and [6], this last statement can be reformulated in the same form as in the commutative case, that is,

$$\big\|\big(M_n(x)\big)_{n\geqslant 0}\big\|_{\mathrm{L}_p(\mathcal{M};l_\infty)}\leqslant C_p\|x\|_p,\quad\forall x\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M}).$$

Also note that if additionally $p>2$ and T satisfies (IV) above, the part (i) can be strengthened as follows. For any $x\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ there are $a\in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ and $y_n\in\mathcal{M}$ $(n\in\mathbb{N})$ such that

$$\|a\|_p\leqslant C_p\|x\|_p,\quad \|y_n\|_\infty\leqslant 1,\quad M_n(T)(x)=y_na,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

All preceding comments equally apply to the part (ii) of the theorem above. As usual, these results imply the corresponding pointwise ergodic theorems.

---

1. Introduction

L'objectif de cette note est d'obtenir l'analogue non commutatif du théorème ergodique maximal classique dans les espaces L_p usuels. Rappelons que le premier théorème ergodique ponctuel non commutatif remonte à Lance [9], qui a obtenu une version non commutative du classique théorème ergodique ponctuel de Birkhoff pour les automorphismes d'une algèbre de von Neumann σ-finie (*cf.* [5] pour des travaux ultérieurs). D'autre part, Yeadon [13] a démontré une inégalité ergodique maximale de type $(1,1)$ faible dans les préduaux des algèbres de von Neumann semifinies, en s'inspirant d'une inégalité analogue pour les martingales non commutatives obtenue auparavant par Cuculescu [4]. Motivés par le développement récent des inégalités de martingales non commutatives, surtout par l'analogue non commutatif de la classique inégalité maximale de Doob établi dans [6], nous sommes conduits à considérer des théorèmes ergodiques maximaux dans les espaces L_p non commutatifs $(1 < p < \infty)$.

2. Inégalités ergodiques maximales

On maintient toutes les notations introduites précédemment. En particulier, $\mathcal{M}$ est une algèbre de von Neumann semifinie, munie d'une trace normale semifinie fidèle τ, et $T : \mathrm{L}_1(\mathcal{M}) + \mathrm{L}_\infty(\mathcal{M}) \to \mathrm{L}_1(\mathcal{M}) + \mathrm{L}_\infty(\mathcal{M})$ une application linéaire. Rappelons d'abord le théorème ergodique maximal de Yeadon. Si T vérifie (I) et (II), alors pour tout $x \in \mathrm{L}_1(\mathcal{M})$ avec $x \geqslant 0$ et tout $\lambda > 0$ il existe une projection $e \in \mathcal{M}$ telle que (avec $e^\perp = 1 - e$)

$$\tau\big(e^\perp\big) \leqslant \frac{\|x\|_1}{\lambda} \quad \text{et} \quad e\big(M_n(T)(x)\big)e \leqslant \lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notre premier résultat est une inégalité ergodique maximale de type (p,p).

THÉORÈME 1. – *Soient* $1 < p \leqslant \infty$ *et* T *vérifiant* (I), (II). *Alors pour tout* $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *avec* $x \geqslant 0$ *il existe* $a \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *tel que*

$$\|a\|_p \leqslant C_p \|x\|_p \quad \textit{et} \quad M_n(T)(x) \leqslant a, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

de plus, $C_p \leqslant Cp^2(p-1)^{-2}$ *et* $(p-1)^{-2}$ *est l'ordre de grandeur optimal de* C_p *pour* $p \to 1$.

Ce résultat est l'analogue non commutatif du classique théorème ergodique maximal dans les espaces L_p usuels (=commutatifs). Rappelons que dans le cas commutatif l'ordre de grandeur optimal de la constante C_p ci-dessus est $(p-1)^{-1}$ quand $p \to 1$. Il y a donc une différence entre le cas commutatif et le cas non commutatif en ce qui concerne la grandeur de cette constante. Remarquons que le même phénomène apparaît pour les inégalités maximales de martingales (*cf.* [7]).

Comme dans le cas classique, le Théorème 1 est aussi valable pour tous éléments de $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$. Plus précisément, on a l'assertion suivante : avec les hypothèses du Théorème 1, pour tout $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ il existe $a, b \in \mathrm{L}_{2p}(\mathcal{M})$ et $y_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ tels que

$$\|a\|_{2p}\|b\|_{2p} \leqslant C_p\|x\|_p, \quad \|y_n\|_\infty \leqslant 1, \quad M_n(T)(x) = a y_n b, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $x \geqslant 0$, on peut choisir a, b et y_n vérifiant de plus $a = b \geqslant 0$ et $y_n \geqslant 0$. On peut alors voir facilement que cette dernière assertion est équivalente au Théorème 1. Utilisant les espaces $\mathrm{L_p}(\mathcal{M}; \mathrm{l}_\infty)$ introduits dans [10] et [6], l'assertion ci-dessus peut se reformuler exactement de la même façon que dans le cas commutatif :

$$\left\| \left(M_n(x)\right)_{n\geqslant 0} \right\|_{\mathrm{L}_p(\mathcal{M};l_\infty)} \leqslant C_p \|x\|_p, \quad \forall x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M}).$$

Si on suppose de plus que $p > 2$ et T vérifie (IV), le Théorème 1 peut être renforcé comme suit : pour tout $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ il existe $a \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ et $y_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ tels que

$$\|a\|_p \leqslant C_p \|x\|_p, \quad \|y_n\|_\infty \leqslant 1, \quad M_n(T)(x) = y_n a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La preuve du Théorème 1 se base sur l'inégalité maximale de type $(1,1)$ faible de Yeadon citée précédemment. Dans le cas commutatif, cette déduction est immédiate grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (remarquant que le cas où $p = \infty$ est trivial). Cependant il n'est pas clair que les espaces $\mathrm{L_p}(\mathcal{M}; \mathrm{l}_\infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, forment une échelle d'interpolation pour la méthode réelle. On a néanmoins un analogue du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz pour ces espaces, qui a son intérêt propre. On désigne par $\mathrm{L}_p^+(\mathcal{M})$ le cône positif de $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$.

THÉORÈME 2. – *Soit $S = (S_n)_{n\geqslant 0}$ une application qui envoie le cône positif de $\mathrm{L}_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$ dans le cône des suites d'opérateurs mesurables positifs. On suppose que*

(i) *S est sous-additive : $S_n(x + y) \leqslant S_n(x) + S_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
(ii) *S est de type $(1,1)$ faible : pour tout $x \in \mathrm{L}_1^+(\mathcal{M})$ et tout $\lambda > 0$ il existe une projection $e \in \mathcal{M}$ telle que $\tau(e^\perp) \leqslant C_0\|x\|_1/\lambda$ et $e(S_n(x))e \leqslant \lambda$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
(iii) *S est de type (∞,∞) : $\sup_n \|S_n(x)\|_\infty \leqslant C_1\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathrm{L}_\infty^+(\mathcal{M})$.*

Alors S est de type (p,p) pour tout $1 < p < \infty$: pour tout $x \in \mathrm{L}_p^+(\mathcal{M})$ il existe $a \in \mathrm{L}_p^+(\mathcal{M})$ tel que

$$\|a\|_p \leqslant C_p \|x\|_p \quad \textit{et} \quad S_n(x) \leqslant a, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où C_p est une constante dépendant de p, C_0 et C_1.

Contrairement au cas commutatif, la preuve du Théorème 2 est assez compliquée. Une étape intermédiaire importante est l'inégalité maximale suivante. Soit $\mathrm{L}_{q,1}(\mathcal{M})$ l'espace de Lorentz non commutatif $(1 < q < \infty)$. Alors pour tout $x \in \mathrm{L}_{q,1}^+(\mathcal{M})$ il existe $a \in \mathrm{L}_q^+(\mathcal{M})$ tel que

$$\|a\|_q \leqslant C_q \|x\|_{q,1} \quad \text{et} \quad S_n(x) \leqslant a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En utilisant le Théorème 1 et adaptant la méthode développée par Stein [11,12] dans le cas classique, on obtient une inégalité maximale sur les puissances de T si T est de plus autoadjoint sur $\mathrm{L}_2(\mathcal{M})$.

THÉORÈME 3. – *Soient $1 < p \leqslant \infty$ et T vérifiant* (I), (II) *et* (III). *Alors pour tout $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ avec $x \geqslant 0$ il existe $a \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ tel que*

$$\|a\|_p \leqslant C'_p \|x\|_p \quad \textit{et} \quad T^n(x) \leqslant a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tous les commentaires juste après le Théorème 1 (sauf celui sur la constante C_p) s'appliquent également au Théorème 3.

Par discrétisation, les Théorèmes 1 et 3 sont aussi vrais pour les semigroupes de contractions positives. Soit $(T_t)_{t\geqslant 0}$ un semigroupe de contractions positives sur $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$ avec $T_0 = \mathrm{id}$. On suppose que $(T_t)_{t\geqslant 0}$ est fortement continu sur $\mathrm{L}_2(\mathcal{M})$. On pose alors

$$M_t(T_t)(x) = \frac{1}{t}\int_0^t T_s(x)\,\mathrm{d}s, \quad t > 0.$$

COROLLAIRE 4. – *Sous ces hypothèses on a les assertions suivantes.*

(i) *Pour tout* $x \in \mathrm{L}_1^+(\mathcal{M})$ *et tout* $\lambda > 0$ *il existe une projection* $e \in \mathcal{M}$ *telle que*

$$\tau\big(e^{\perp}\big) \leqslant \frac{\|x\|_1}{\lambda} \quad et \quad e\big(M_t(T_t)(x)\big)e \leqslant \lambda, \quad \forall t > 0.$$

(ii) *Pour* $p > 1$ *et tout* $x \in \mathrm{L}_p^+(\mathcal{M})$ *il existe* $a \in \mathrm{L}_p^+(\mathcal{M})$ *tel que*

$$\|a\|_p \leqslant C_p\|x\|_p \quad et \quad M_t(T_t)(x) \leqslant a, \quad \forall t > 0.$$

(iii) *On suppose de plus que tout* T_t *est autoadjoint sur* $\mathrm{L}_2(\mathcal{M})$. *Alors pour* $p > 1$ *et tout* $x \in \mathrm{L}_p^+(\mathcal{M})$ *il existe* $a \in \mathrm{L}_p^+(\mathcal{M})$ *tel que*

$$\|a\|_p \leqslant C'_p\|x\|_p \quad et \quad T_t(x) \leqslant a, \quad \forall t > 0.$$

3. Convergence presque uniforme

Comme d'habitude, un théorème ergodique maximal entraîne le théorème ergodique ponctuel correspondant, c'est-à-dire, la convergence presque partout des moyennes. On rappelle d'abord la version non commutative de la convergence presque partout au sens de Lance (*cf.* [5]). Soient $x, x_n \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$. On dit que x_n converge vers x (resp. bilatéralement) presque uniformément si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une projection $e \in \mathcal{M}$ telle que $\tau(e^{\perp}) < \varepsilon$ et $\lim_n \|(x_n - x)e\|_\infty = 0$ (resp. $\lim_n \|e(x_n - x)e\|_\infty = 0$). On définit de la même façon la convergence presque uniforme (bilatérale) pour les fonctions à valeurs dans $\mathrm{L_p}(\mathcal{M})$. On a alors la conséquence suivante du Théorème 1.

COROLLAIRE 5. – *Avec les hypothèses du Théorème* 1 *et* $1 \leqslant p < \infty$, *pour tout* $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *les moyennes* $M_n(T)(x)$ *convergent bilatéralement presque uniformément vers un opérateur* $\hat{x}$ *dans* $\mathrm{L_p}(\mathcal{M})$. *Si de plus* $p \geqslant 2$ *et* T *vérifie* (IV), *la convergence a lieu presque uniformément.*

Le Théorème 3 implique, de même, le corollaire suivant.

COROLLAIRE 6. – *Sous les conditions du Théorème* 3, $T^n(x)$ *converge bilatéralement presque uniformément vers* $\hat{x}$ *pour tout* $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$. *Si de plus* $p \geqslant 2$ *et* T *vérifie* (IV), *alors la convergence a lieu presque uniformément.*

Le Corollaire 5 étend donc le théorème ergodique ponctuel de Yeadon dans tous les $\mathrm{L}_p(\mathcal{M})$. D'ailleurs, pour $1 < p < \infty$, le Théorème 1 permet de traiter des moyennes itérées, et donc s'applique à un nombre fini de contractions positives. Par conséquent, le Corollaire 5 est aussi valable pour les moyennes successives d'un nombre fini de contractions positives. Signalons que ce n'est pas le cas du théorème ergodique de Yeadon. La même remarque s'applique aussi aux Théorème 3 et Corollaire 6.

Parallèlement, le Corollaire 4 implique aussi des théorèmes ergodiques ponctuels pour les semigroupes de contractions positives.

COROLLAIRE 7. – *Avec les notations et les hypothèses du Corollaire* 4, *on a les assertions suivantes.*

(i) *Soient* $1 \leqslant p < \infty$ *et* $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$. *Alors il existe* $\hat{x} \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$ *tel que*

$$\lim_{t\to\infty} M_t(T_t)(x) = \hat{x} \quad \textit{bilatéralement presque uniformément}.$$

(ii) *Soient* $1 \leqslant p < \infty$ *et* $x \in \mathrm{L}_p(\mathcal{M})$. *Alors*

$$\lim_{t\to 0} M_t(T_t)(x) = x \quad \textit{bilatéralement presque uniformément}.$$

(iii) *Si de plus T_t est autoadjoint sur* $L_2(\mathcal{M})$ *et* $1 < p < \infty$*, alors*

$$\lim_{t\to\infty} T_t(x) = \hat{x} \quad \textit{bilatéralement presque uniformément.}$$

(iv) *On suppose de plus que* $p > 2$ *et* T_t *est* 2*-positif, alors toutes les convergences dans* (i)–(iii) *ont lieu presque uniformément.*

4. Exemples

On donne quelques exemples auxquels les Corollaires 4 et 7 s'appliquent.

(i) Soient (Ω, μ) un espace mesuré, (S_t) un semigroupe de contractions positives sur $L_p(\Omega, \mu)$ fortement continu pour $p < \infty$, et $(\mathcal{N}, \sigma)$ une algèbre de von Neumann semifinie avec une trace normale fidèle semifinie σ. On pose $(M, \tau) = L_\infty(\Omega, \mu) \otimes (\mathcal{N}, \sigma)$ et $T_t = S_t \otimes \mathrm{id}$. Alors (T_t) est un semigroupe de contractions positives sur $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ fortement continu pour $p < \infty$, qui est complètement positif (et donc 2-positif).

(ii) Soit G un groupe discret, muni d'une fonction de longueur notée $|\cdot|$. Soit $vN(G)$ l'algèbre de von Neumann de G, munie de sa trace canonique (qui est normale fidèle normalisée). On considère le semigroupe associé $T_t = \exp(-t|\cdot|)$. On suppose que T_t est une contraction positive sur $vN(G)$ pour tout $t > 0$. Il est alors bien connu que (T_t) s'étend à un semigroupe de contractions positives sur tout $L_p(vN(G))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Les groupes libres et le groupe de permutations possèdent ces propriétés ; de plus, pour ces groupes, T_t est complètement positif.

(iii) Soient H un espace hilbertien réel, $-1 \leqslant q \leqslant 1$ et $\Gamma_q(H)$ l'algèbre de von Neumann de la q-déformation sur H, munie de sa trace canonique (qui est normale fidèle normalisée). Il est connu que à toute contraction $V : H \to H$ correspond une application complètement positive $\Gamma(V) : \Gamma_q(H) \to \Gamma_q(H)$, appelée seconde quantization de V. On pose $T_t = \Gamma(\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{id}_H)$. Alors (T_t) est un semigroupe de contractions complètement positives sur $\Gamma_q(H)$, et il s'étend à tout $L_p(\Gamma_q(H))$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. C'est le semigroupe de q-Ornstein–Uhlenbeck (*cf.* [1,2]).

Cette note sera détaillée dans un article à paraître.

Références bibliographiques

[1] M. Bożejko, Ultracontractivity and strong Sobolev inequality for q-Ornstein–Uhlenbeck semigroup ($-1 < q < 1$), Infinite Dimensional Anal., Quantum Probab. Related Topics 2 (1999) 203–220.
[2] M. Bożejko, B. Kümmerer, R. Speicher, q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects, Comm. Math. Phys. 185 (1997) 129–154.
[3] J.P. Conze , N. Dang-Ngoc, Ergodic theorems for noncommutative dynamical systems, Invent. Math. 46 (1978) 1–15.
[4] I. Cuculescu, Martingales on von Neumann algebras, J. Multivariate. Anal. 1 (1971) 17–27.
[5] R. Jajte, Strong Limit Theorems on Non-Commutative Probability, Lecture Notes in Math., Vol. 1110, Springer, 1985.
[6] M. Junge, Doob's inequality for non-commutative martingales, J. Reine Angew. Math., to appear.
[7] M. Junge, Q. Xu, The optimal orders of growth of the best constants in some non-commutative martingale inequalities, en préparation.
[8] B. Kümmerer, A non-commutative individual ergodic theorem, Invent. Math. 46 (1978) 139–145.
[9] E.C. Lance, Ergodic theorems for convex sets and operator algebras, Invent. Math. 37 (1976) 201–214.
[10] G. Pisier, Non-commutative vector valued L_p-spaces and completely p-summing maps, Astérisque 247 (1998).
[11] E.M. Stein, On the maximal ergodic theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. 47 (1961) 1894–1897.
[12] E.M. Stein, Topics in harmonic analysis related to the Littlewood–Paley theory, Ann. Math. Studies, Princeton University Press, 1985.
[13] F.J. Yeadon, Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras. I, J. London Math. Soc. 16 (1977) 326–332.