C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 763–766

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Remarques sur l'équation de Schrödinger non linéaire avec potentiel harmonique

Rémi Carles

Mathématiques appliquées de Bordeaux et UMR 5466 CNRS, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

Reçu le 15 mars 2002 ; accepté le 18 mars 2002

Note présentée par Jean-Michel Bony.

Résumé La condensation de Bose–Einstein fait apparaître des équations de Schrödinger non linéaires avec potentiel harmonique. Nous étudions le problème de Cauchy pour ces équations, en particulier le phénomène d'explosion en temps fini. Pour cela, nous établissons une loi d'évolution analogue à la loi de conservation pseudo-conforme dans le cas sans potentiel. Nous montrons alors que sous un critère simple, autorisant en particulier une plage de valeurs positives pour l'énergie, la solution explose en temps fini. ***Pour citer cet article : R. Carles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 763–766.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Remarks on the nonlinear Schrödinger equation with harmonic potential

Abstract Bose–Einstein condensation is usually modeled by nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential. We study the Cauchy problem for these equations, in particular the wave collapse phenomenon. For this, we establish an evolution law, which is the analogue of the pseudo-conformal conservation law for the nonlinear Schrödinger equation. We state wave collapse criteria, allowing a range of positive values for the energy. ***To cite this article: R. Carles, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 763–766.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

La condensation de Bose–Einstein fait apparaître des équations de Schrödinger non linéaires avec potentiel harmonique isotrope (*voir* par exemple [3,8,9]),

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t u^\hbar + \dfrac{\hbar^2}{2}\Delta u^\hbar = \dfrac{\omega^2}{2}x^2 u^\hbar + \lambda\left|u^\hbar\right|^{2\sigma} u^\hbar, \quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n, \\ u^\hbar_{|t=0} = u^\hbar_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$, et $\omega,\sigma>0$. Plus précisément, le cas de la condensation de Bose–Einstein correspond à une non-linéarité cubique, $\sigma=1$, en dimensions deux et trois, et à une non-linéarité quintique, $\sigma=2$, en

Adresse e-mail : carles@math.u-bordeaux.fr (R. Carles).

S1631-073X(02)02364-6/FLA

dimension un (*voir* [6]) ; le réel λ peut être positif ou négatif, selon l'élément chimique considéré. Nous considérons ici le problème de Cauchy plus général (1).

Notre étude repose sur les opérateurs suivants,

$$J^\hbar(t) = \frac{\omega}{\hbar} x \sin(\omega t) - \mathrm{i}\cos(\omega t)\nabla_x, \qquad H^\hbar(t) = \omega x \cos(\omega t) + \mathrm{i}\hbar \sin(\omega t)\nabla_x.$$

Les opérateurs $H^\hbar$ et $J^\hbar$ sont classiques en mécanique quantique (*voir* par exemple [4]) : il s'agit d'observables de Heisenberg,

$$H^\hbar(t) = U^\hbar(t)(\omega x)U^\hbar(-t), \qquad J^\hbar(t) = U^\hbar(t)(-\mathrm{i}\nabla_x)U^\hbar(-t),$$

où $U^\hbar(t)$ est le groupe unitaire correspondant à la propagation linéaire ($\lambda = 0$),

$$U^\hbar(t)u_0^\hbar(x) = \left(\frac{\omega}{2\mathrm{i}\pi\hbar\sin\omega t}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/(\hbar\sin(\omega t))(((x^2+y^2)/2)\cos(\omega t) - x\cdot y)} u_0^\hbar(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Ceci entraine alors naturellement la relation

$$\left[H^\hbar(t), \mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2}\Delta - \frac{\omega^2}{2}x^2\right] = \left[J^\hbar(t), \mathrm{i}\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2}\Delta - \frac{\omega^2}{2}x^2\right] = 0.$$

Le résultat suivant n'est par contre pas habituel en mécanique quantique, il mesure l'action de ces opérateurs sur une classe de non-linéarités.

LEMME 1.1 ([1], Lemme 2.1). – *$H^\hbar$ et $J^\hbar$ vérifient les propriétés suivantes.*

– *Si $M^\hbar(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(x^2/(2\hbar))\tan(\omega t)}$, et $Q^\hbar(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x^2/(2\hbar))\operatorname{cotan}(\omega t)}$, alors $J^\hbar(t)$ et $H^\hbar(t)$ s'écrivent, pour $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,*

$$J^\hbar(t) = -\mathrm{i}\cos(\omega t)M^\hbar(t)\nabla_x M^\hbar(-t), \qquad H^\hbar(t) = \mathrm{i}\hbar\sin(\omega t)Q^\hbar(t)\nabla_x Q^\hbar(-t). \tag{3}$$

– *Pour toute fonction $F \in \mathrm{C}^1(\mathbb{C},\mathbb{C})$ de la forme $F(z) = zG(|z|^2)$, on a, pour $t \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et $v = v(t,x)$,*

$$H^\hbar(t)F(v) = \partial_z F(v)H^\hbar(t)v - \partial_{\bar z}F(v)\overline{H^\hbar(t)v}, \qquad J^\hbar(t)F(v) = \partial_z F(v)J^\hbar(t)v - \partial_{\bar z}F(v)\overline{J^\hbar(t)v}.$$

Remarque 1. – Les formules (3) permettent d'écrire des inégalités de Gagliardo–Nirenberg modifiées, que nous ne précisons pas ici.

Remarque 2. – Les opérateurs $H^\hbar$ et $J^\hbar$ apparaissent ainsi comme des analogues formels des opérateurs $\hbar\nabla_x$ et $x/\hbar + \mathrm{i}t\nabla_x$, dont l'utilisation dans le cas des particules libres ($\omega = 0$) a permis une analyse poussée des équations non-linéaires (*voir* par exemple [2] pour une vue d'ensemble).

Notation. – Nous considérons des données initiales dans

$$\Sigma := \left\{u \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right);\ xu, \nabla u \in \mathrm{L}^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}.$$

Remarquons que $\Sigma = D(\sqrt{-\Delta + |x|^2})$: nous travaillons dans le même espace que dans [7].

2. Le problème de Cauchy

Nous énonçons ici un résultat qui, dans le cas $\sigma \leqslant 2/n$, fut démontré pour la première fois dans [7]. Nous montrons que l'on peut se ramener formellement à l'étude classique de (1) dans le cas $\omega = 0$. En effet, la connaissance explicite du propagateur $U^\hbar$ dans le cas linéaire ($\lambda = 0$, *voir* (2)) permet de constater que, *localement en temps*, $U^\hbar$ vérifie les mêmes estimations de dispersion, donc de Strichartz, que dans le cas des particules libres ($\omega = 0$), plus classique dans le cadre non linéaire. La formule de Duhamel pour (1) est formellement la même que dans le cas des particules libres,

$$u^\hbar(t,x) = U^\hbar(t)u_0^\hbar(x) - \mathrm{i}\lambda\hbar^{-1}\int_0^t U^\hbar(t-s)\left(\left|u^\hbar\right|^{2\sigma}u^\hbar\right)(s,x)\,\mathrm{d}s.$$

Pour montrer des résultats d'existence dans Σ, nous avons besoin d'estimer le moment et le gradient de $u^\hbar$. Ces opérateurs ne commutent pas avec $U^\hbar$. Par contre, $H^\hbar$ et $J^\hbar$ commutent à $U^\hbar$, puisque ce sont des observables de Heisenberg, et leur action sur les termes non linéaires est mesurée dans le Lemme 1.1. De plus, l'égalité ponctuelle

$$\left|\omega x u^\hbar(t,x)\right|^2 + \left|\hbar\nabla_x u^\hbar(t,x)\right|^2 = \left|\hbar J^\hbar(t)u^\hbar(t,x)\right|^2 + \left|H^\hbar(t)u^\hbar(t,x)\right|^2, \tag{4}$$

montre que si l'on contrôle $J^\hbar(t)u^\hbar$ et $H^\hbar(t)u^\hbar$ dans L^2, alors on contrôle $u^\hbar$ dans Σ. On est alors ramené formellement à la même analyse que dans le cas des particules libres, traité par exemple dans [2], et on obtient par simple transposition le résultat suivant.

PROPOSITION 2.1. – *Soit* $u_0^\hbar \in \Sigma$. *Si* $n \geqslant 3$, *supposons en outre* $\sigma < 2/(n-2)$. *Alors il existe* $T^\hbar > 0$ *tel que* (1) *possède une unique solution* $u^\hbar \in \mathrm{C}([0,T^\hbar],\Sigma)$. *La masse* $N^\hbar$ *et l'énergie* $E^\hbar$ *définies ci-dessous sont constantes pour* $t \in [0,T^\hbar]$,

$$N^\hbar = \left\|u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^2}^2, \quad E^\hbar = \frac{1}{2}\left\|\hbar\nabla_x u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|\omega x u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\left\|u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}.$$

De plus, $u^\hbar \in \mathrm{C}([0,+\infty[,\Sigma)$ *dans les cas suivants.*
- $\lambda \geqslant 0$ (*non-linéarité défocalisante*) ;
- $\lambda < 0$ (*non-linéarité focalisante*) *et* $\sigma < 2/n$;
- $\lambda < 0$, $\sigma \geqslant 2/n$ *et* $\|u_0^\hbar\|_\Sigma$ *suffisamment petite.*

3. Explosion en temps fini

La méthode générale de Zakharov–Glassey, exposée dans [2], permet de montrer qu'il y a explosion en temps fini si l'énergie $E^\hbar$ est strictement négative. Dans le cas des particules libres ($\omega = 0$), cette méthode est optimisée en suivant les particules le long du centre de masse. Nous allons suivre la même approche, avec la différence que dans le cas présent, le centre de masse ne se déplace pas de façon rectiligne : ce sont les opérateurs $J^\hbar$ et $H^\hbar$ qui permettent de le suivre, et de montrer que le phénomène d'explosion en temps fini survient aussi pour des valeurs positives de l'énergie.

Nous commençons par énoncer l'analogue de la loi pseudo-conforme, découverte par Ginibre et Velo [5] dans le cas sans potentiel ($\omega = 0$). D'après la relation (4), on peut réécrire l'énergie comme

$$E^\hbar = \frac{1}{2}\left\|\hbar J^\hbar(t)u^\hbar\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{1}{2}\left\|H^\hbar(t)u^\hbar\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\left\|u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}.$$

Décomposons alors $E^\hbar$ en $E_1^\hbar + E_2^\hbar$, où

$$E_1^\hbar(t) = \frac{1}{2}\left\|\hbar J^\hbar(t)u^\hbar\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\cos^2(\omega t)\left\|u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2},$$
$$E_2^\hbar(t) = \frac{1}{2}\left\|H^\hbar(t)u^\hbar\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\sin^2(\omega t)\left\|u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}.$$

On peut alors montrer,

LEMME 3.1. – *L'évolution de* $E_1^\hbar$ *et* $E_2^\hbar$ *est donnée par*

$$\frac{\mathrm{d}E_1^\hbar}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}E_2^\hbar}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega\lambda}{2\sigma+2}(n\sigma-2)\sin(2\omega t)\left\|u^\hbar(t)\right\|_{\mathrm{L}^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2}.$$

On en déduit la proposition suivante,

PROPOSITION 3.2. – *Supposons* $\sigma \geqslant 2/n$, *et en outre, si* $n \geqslant 3$, $\sigma < 2/(n-2)$. *Soient* $\lambda < 0$ *et* $u_0^\hbar \in \Sigma$ *non nulle. Si*

$$\frac{1}{2}\left\|\hbar\nabla u_0^\hbar\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \frac{\lambda}{\sigma+1}\left\|u_0^\hbar\right\|_{\mathrm{L}^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = E^\hbar - \frac{1}{2}\left\|\omega x u_0^\hbar\right\|_{\mathrm{L}^2}^2 \leqslant 0,$$

alors $u^\hbar(t,x)$ explose en un temps $t_*^\hbar \leqslant \pi/2\omega$. En particulier,

$$\lim_{t\to t_*^\hbar} \left\|\nabla_x u^\hbar(t)\right\|_{L^2} = \infty \quad \textit{et} \quad \lim_{t\to t_*^\hbar} \left\|u^\hbar(t)\right\|_{L^\infty} = \infty.$$

Démonstration. – D'après nos hypothèses, si $u^\hbar \in C([0,T];\Sigma)$ avec $T \leqslant \pi/2\omega$,

$$E_1^\hbar(0) = E^\hbar - \frac{1}{2}\left\|\omega x u_0^\hbar\right\|_{L^2}^2 \leqslant 0, \quad \text{et} \quad \forall t \in [0,T], \quad \frac{\mathrm{d}E_1^\hbar}{\mathrm{d}t} \leqslant 0. \tag{5}$$

D'autre part, on peut réécrire $E_1^\hbar(t)$ comme suit,

$$E_1^\hbar(t) = -\frac{1}{2}\cos(2\omega t)\left\|\omega x u^\hbar(t,x)\right\|_{L^2}^2 + E^\hbar \cos^2(\omega t) + \frac{\omega\hbar}{2}\sin(2\omega t)\,\mathrm{Im}\int \left(\overline{u^\hbar} x \cdot \nabla_x u^\hbar\right).$$

En particulier, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$E_1^\hbar(t) \geqslant -\frac{1}{2}\cos(2\omega t)\left\|\omega x u^\hbar(t,x)\right\|_{L^2}^2 + E^\hbar \cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t)\left\|\omega x u^\hbar(t)\right\|_{L^2}\left\|\hbar\nabla_x u^\hbar(t)\right\|_{L^2}.$$

Tant que $\nabla_x u^\hbar$ est borné dans L^2, $x u^\hbar$ l'est aussi, par conservation de la masse et de l'énergie, et les inégalités de Gagliardo–Nirenberg. Supposons $u^\hbar \in C([0,\pi/2\omega];\Sigma)$. Alors en faisant tendre t vers $\pi/2\omega$, on obtient, avec (5), $\|x u^\hbar(\pi/2\omega)\|_{L^2} = 0$, ce qui est exclu. Ainsi, il existe $t_*^\hbar \leqslant \pi/2\omega$ tel que

$$\lim_{t\to t_*^\hbar} \left\|\nabla_x u^\hbar(t)\right\|_{L^2} = \infty.$$

Par conservation de l'énergie,

$$\lim_{t\to t_*^\hbar} \left\|u^\hbar(t)\right\|_{L^{2\sigma+2}}^{2\sigma+2} = \infty,$$

et la dernière partie de la proposition découle de la conservation de la masse. □

Remarque 3. – Ce résultat est prouvé par Zhang [9], dans le cas particulier d'une non-linéarité critique ($\sigma = 2/n$), notre méthode l'étend aux puissances sur-critiques, ce qui permet en particulier d'envisager le cas de la condensation de Bose–Einstein en dimension trois, pour lequel la valeur $\sigma = 1$ (non-linéarité cubique) est sur-critique.

Remerciements. Les remarques faites par T. Colin et J. Ginibre ont permis d'améliorer le contenu de cette Note.

Références bibliographiques

[1] R. Carles, Équation de Schrödinger semi-classique avec potentiel harmonique et perturbation non-linéaire, Séminaire X-EDP, Exp. No. III, 2001–2002, 12 p.

[2] T. Cazenave, An introduction to nonlinear Schrödinger equations, Text. Met. Mat., Vol. 26, Univ. Fed. Rio de Jan., 1993.

[3] C. Cohen-Tannoudji, Cours du Collège de France, 1998–1999, disponible à www.lkb.ens.fr/~laloe/PHYS/cours/college-de-france/.

[4] A. Galindo, P. Pascual, Quantum Mechanics, Texts Monographs Phys., Springer-Verlag, 1991.

[5] J. Ginibre, G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. II Scattering theory, general case, J. Funct. Anal. 32 (1979) 33–71.

[6] E.B. Kolomeisky, T.J. Newman, J.P. Straley, X. Qi, Low-dimensional Bose liquids: Beyond the Gross–Pitaeskii approximation, Phys. Rev. Lett. 85 (6) (2000) 1146–1149.

[7] Y.-G. Oh, Cauchy problem and Ehrenfest's law of nonlinear Schrödinger equations with potentials, J. Differential Equations 81 (2) (1989) 255–274.

[8] T. Tsurumi, M. Wadati, Stability of the D-dimensional nonlinear Schrödinger equation under confined potential, J. Phys. Soc. Japan 68 (5) (1999) 1531–1536.

[9] J. Zhang, Stability of attractive Bose–Einstein condensates, J. Statist. Phys. 101 (3–4) (2000) 731–746.