

# Méthode d'éléments finis avec hybridisation frontière pour les problèmes de contact avec frottement

Laurent Baillet <sup>a</sup>, Taoufik Sassi <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de mécanique des contacts, UMR 5514, bât. Jean d'Alembert, INSA de Lyon, avenue Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne cedex, France

<sup>b</sup> Laboratoire de mathématiques appliquées de Lyon, UMR 5585, bât. L. De Vinci, INSA de Lyon, avenue Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 6 septembre 2001 ; accepté après révision le 4 mars 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

---

## Résumé

Dans cette Note, nous proposons une méthode d'éléments finis avec hybridisation frontière pour les problèmes de contact avec frottement. Dans le problème de point-selle discret, les cônes convexes associés aux contraintes normale et tangentielle sont constitués de fonctions continues et affines par morceaux vérifiant des conditions affaiblies de négativité sur la zone de contact. Une estimation *a priori* optimale est établie dans ce cas. Des essais numériques confirmant les résultats théoriques sont présentés. *Pour citer cet article : L. Baillet, T. Sassi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 917–922.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## Finite element method with Lagrange multipliers for contact problems with friction

## Abstract

In this Note, we propose a finite element method with Lagrange multipliers in order to approximate contact problems with friction. The discretized normal and tangential constraints at the candidate contact interface are expressed by using continuous piecewise linear Lagrange multipliers in the saddle-point formulation. An optimal error estimate is established and several numerical studies corresponding to this choice of the discretized normal and tangential constraints are achieved. *To cite this article: L. Baillet, T. Sassi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 917–922.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

---

## Abridged English version

In the theory of variational inequalities, problems involving contact and friction conditions are a permanent growing interest in many physical fields: hydrostatics, thermics, solid mechanics (*see* [7]). Finite elements are the most currently used methods for the approximation of contact problems involving friction (*see* [9] and references therein). In the primal variational formulation (where the displacement is the only unknown of the problem), the discretized noninterpenetration conditions constitute the key point of the approximation model. This condition can be relaxed and expressed in a weaker sense [4,10].

---

*Adresses e-mail :* laurent.baillet@insa-lyon.fr (L. Baillet); taoufik.sassi@insa-lyon.fr (T. Sassi).

In this Note we propose another strategy which treats the normal and tangential stresses on the contact zone by Lagrange multiplier method (see [8]). The saddle-point formulation of the continuous problem is given by (7). Existence and uniqueness of solution are given in [8]. In the discrete level, we assume for simplicity that  $\Omega$  is polygonally shaped. For any given discretization parameter  $h > 0$ , let  $\mathcal{T}_h$  be a partition of  $\Omega$  into triangles (or quadrangles) with a maximum size  $h$ . The finite element space used in  $\Omega$  is given by (9). The contact zone  $\Gamma_c$  inherits a regular familie of 1D-meshes denotes  $\mathcal{T}_h^c$ . Then, we deal with the finite element approximation of the saddle-point problem (7). The key point lies in the finite element translation of the closed convex cones of Lagrange multipliers  $M^1$  and  $M^2$ . Notice that we must distinguish two independent problems arising in the building of the approximation model:

- the choice of finite element spaces (approximating  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ ,  $L^2(\Gamma_c)$ ) for Lagrange multipliers,
- the choice of approximated non-negativity conditions incorporated in the definition of  $M^1$  and  $M^2$ .

In the second section, different well-posed finite element approaches are proposed in order to approximate the the continuous problem (7). The discretized normal and tangential constraints on  $\Gamma_c$  are expressed by using either continuous piecewise linear (see (10)) or piecewise constant (see (17)) Lagrange multipliers in the saddle-point formulation. In both cases, optimal error estimates are given and several numerical studies are achieved.

### 1. Problème continu et cadre fonctionnel

On désigne par  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  à frontière lipschitzienne et par  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  la normale extérieure à  $\partial\Omega$ . On suppose que le bord est divisé en trois morceaux disjoints  $\Gamma_u$ ,  $\Gamma_g$  et  $\Gamma_c$ . La partie  $\Gamma_u$ , de mesure non nulle, est assujettie à des conditions de Dirichlet, le long de  $\Gamma_g$  une condition de Neumann est prescrite et  $\Gamma_c$  est candidate à être en contact avec un obstacle rigide. On suppose que  $\overline{\Gamma_u} \cap \overline{\Gamma_c} = \emptyset$ . Cette hypothèse n'est pas restrictive et apparaît naturelle dans les applications en ingénierie. Pour toutes données  $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in (L^2(\Omega))^2$  et  $\mathbf{g} = (g_1, g_2) \in (L^2(\Gamma_u))^2$ , le problème étudié consiste à trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  et le tenseur de contrainte  $\sigma(\mathbf{u})$  tels que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} - \mathbf{g} = 0 & \text{sur } \Gamma_g, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_u. \end{cases} \tag{1}$$

La loi de comportement élastique, avec les hypothèses habituelles de coercivité, est :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = a_{ijkl} \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}), \quad \text{avec } \varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \tag{2}$$

Pour introduire les équations sur la zone de contact  $\Gamma_c$ , on adopte les notations suivantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}, \quad \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \sigma_t(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{t},$$

avec

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = \sigma_{ij}(\mathbf{u})n_i n_j.$$

La notation  $\mathbf{t} = (-n_2, n_1)$  représente le vecteur unitaire tangent à  $\partial\Omega$ .

Les conditions sur  $\Gamma_c$  sont les suivantes :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0, \quad \sigma_n(\mathbf{u})\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{3}$$

$$|\sigma_t(\mathbf{u})| \leq s, \tag{4}$$

$$\text{si } |\sigma_t(\mathbf{u})| < s \text{ alors } \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 0, \tag{5}$$

$$\text{si } |\sigma_t(\mathbf{u})| = s \text{ alors il existe } v \geq 0 \text{ tel que } \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = -v\sigma_t(\mathbf{u}). \tag{6}$$

On désigne par  $s$  le seuil de glissement connu sur  $\Gamma_c$ ,  $s \in L^2(\Gamma_c)$ ,  $s \geq 0$ . Les conditions (3) décrivent le contact entre le solide et l'obstacle rigide et (4)–(6) traduisent la loi de frottement de Tresca.

Pour obtenir la formulation variationnelle correspondant au problème (1)–(6), on introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$\mathbf{V} = \{v \in (H^1(\Omega))^2, v = 0 \text{ sur } \Gamma_u\}, \quad \text{muni de la norme } \|v\| = \left( \sum_{\ell=1}^2 \|v_\ell\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

On utilise également l'espace des traces partielles  $H^{1/2}(\Gamma_c)$ . Le dual topologique de  $H^{1/2}(\Gamma_c)$  est noté  $(H^{1/2}(\Gamma_c))'$ , le produit de dualité par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \Gamma_c}$  et la norme duale induite sur  $(H^{1/2}(\Gamma_c))'$  par  $\|\cdot\|_{-1/2, \Gamma_c}$ . On note  $\mathbf{M} = M^1 \times M^2$  le cône convexe des multiplicateurs de Lagrange :

$$M^1 = \{\mu_1 \in (H^{1/2}(\Gamma_c))', \mu_1 \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}, \quad M^2 = \{\mu_2 \in L^2(\Gamma_c), |\mu_2| \leq s \text{ sur } \Gamma_c\}.$$

On pose :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A(x) \varepsilon(u) \varepsilon(v) \, d\Omega, \quad \text{où } A = (a_{ijkh})_{1 \leq i, j, k, h \leq 2}, \quad L(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_g} g v \, d\Gamma,$$

$$b(\mu, v) = \langle \mu_1, v \cdot n \rangle_{1/2, \Gamma_c} + \int_{\Gamma_c} \mu_2 v \cdot t \, d\Gamma.$$

La formulation hybride primale du problème (1)–(6) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } (u, \lambda) \in \mathbf{V} \times \mathbf{M} \text{ vérifiant} \\ a(u, v) + b(\lambda, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}, \\ b(\mu - \lambda, u) \leq 0, \quad \forall \mu \in \mathbf{M}. \end{cases} \quad (7)$$

L'existence et l'unicité d'un couple de solution  $(u, \lambda) \in \mathbf{V} \times \mathbf{M}$  du problème (7) ont été établies dans [8], Théorème 1.2, pp. 108.

*Remarque 1.* – Le problème (7) est équivalent à la recherche de  $u \in \mathbf{K}$  tel que [8] :

$$a(u, v - u) + \int_{\Gamma_c} s (|v \cdot t| - |u \cdot t|) \, d\Gamma \geq L(v - u), \quad \forall v \in \mathbf{K} = \{v \in \mathbf{V}, v \cdot n \leq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}. \quad (8)$$

Par conséquent, si  $u \in \mathbf{K}$  est la solution du problème (8) alors  $(u, \lambda) \in \mathbf{V} \times \mathbf{M}$  est solution du problème (7) où  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  est défini par :

$$b(\lambda, v) = -\langle \sigma(u)n, v \rangle_{1/2, \partial\Omega} - \int_{\Gamma_g} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in \mathbf{V},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \partial\Omega}$  désigne le produit de dualité entre les deux espaces  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

On vérifie facilement que  $\lambda_2 = -\sigma_t(u)$  sur  $\Gamma_c$ . Lorsque la solution  $u$  est suffisamment régulière ( $u \in (H^\tau(\Omega))^2, \tau > 3/2$ ),  $\sigma_n(u)$  peut être définie ponctuellement; par suite  $\lambda_1 = -\sigma_n(u)|_{\Gamma_c}$ .

## 2. Problème approché et estimation d'erreur

Afin d'approcher le problème de point-selle (7), on suppose pour simplifier que  $\Omega$  est polygonal. Pour tout paramètre  $h > 0$ , on considère une partition  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  en triangles (ou en quadrangles) de taille maximale  $h$ . La triangulation  $\mathcal{T}_h$  est supposée régulière au sens de [5]. Pour chaque élément  $\kappa \in \mathcal{T}_h$ ,  $\mathcal{P}_k(\kappa)$  désigne l'ensemble des polynômes de degré total inférieur ou égal à  $k$ . On pose :

$$\mathbf{V}_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}), \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, v_h|_\kappa \in \mathcal{P}_1(\kappa), v_h|_{\Gamma_u} = 0\}. \quad (9)$$

La zone de contact  $\Gamma_c$  hérite d'un maillage monodimensionnel noté  $\mathcal{T}_h^c$  caractérisé par l'ensemble des noeuds  $\xi = \{x_0 < x_1 < \dots < x_{N(h)-1} < x_{N(h)}\}$ . On définit l'espace :

$$\mathbf{W}_h(\Gamma_c) = \{v_h|_{\Gamma_c}, v_h \in \mathbf{V}_h\} = W_h^1(\Gamma_c) \times W_h^2(\Gamma_c), \quad (10)$$

constitué de fonctions affines par morceaux sur  $\mathcal{T}_h$  et continues sur  $\Gamma_c$ . On introduit ensuite les cônes convexes fermés des multiplicateurs discrets :

$$M_h^{1,*} = \left\{ \mu_{1h} \in W_h^1(\Gamma_c), \int_{\Gamma_c} \mu_{1h} \psi_h \, d\Gamma \geq 0, \forall \psi_h \in M_h^1 \right\}, \tag{11}$$

$$M_h^{2,*} = \left\{ \mu_{2h} \in W_h^2(\Gamma_c), \int_{\Gamma_c} \mu_{2h} \psi_h \, d\Gamma - \int_{\Gamma_c} s |\psi_h| \, d\Gamma \leq 0, \forall \psi_h \in W_h^2(\Gamma_c) \right\}, \tag{12}$$

où  $M_h^1 = \{\mu_{1h} \in W_h^1(\Gamma_c), \mu_{1h} \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\}$ . Remarquons que  $M_h^{1,*}$  et  $M_h^{2,*}$  vérifient une condition affaiblie de négativité sur  $\Gamma_c$  et que  $M_h^{1,*} \times M_h^{2,*} \not\subset \mathbf{M}$ .

Le problème discret associé au problème continu (7) s’écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver } (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbf{M}_h \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\boldsymbol{\mu}_h - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u}_h) \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{M}_h. \end{cases} \tag{13}$$

Sous l’hypothèse  $\bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_c = \emptyset$ , le couple d’espaces  $(\mathbf{V}_h, \mathbf{W}_h(\Gamma_c))$  vérifie la condition Inf–Sup discrète suivante (voir [6]) :

il existe une constante  $\beta > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$\inf_{\substack{\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{W}_h(\Gamma_c) \\ \|\boldsymbol{\mu}_h\|_{-1/2, \Gamma_c} = 1}} \sup_{\substack{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ \|\mathbf{v}_h\| = 1}} b(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\mu}_h) \geq \beta. \tag{14}$$

Par suite le problème (13) admet une solution unique  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$  (voir [8]). Pour simplifier on suppose que  $\Gamma_g = \emptyset$ . L’analyse de la qualité de l’approximation repose sur le lemme suivant [2] :

LEMME 1. – Soit  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  la solution du problème continu et  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$  celle du problème discret. Alors, pour tout  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  et  $\boldsymbol{\mu}_h \in \mathbf{M}_h$ , on a :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) &\leq a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{u}) + b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + b(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}_h, \mathbf{u}) + b(\boldsymbol{\lambda}_h - \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}). \end{aligned} \tag{15}$$

La majoration du Lemme 1 diffère de celle figurant dans [6] pour le problème de contact sans frottement. Cette différence se traduit par l’apparition des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes tangentielles  $\lambda_2$  et  $\lambda_{2h}$  dans la forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$ . Le choix de  $M_{2h}^{2,*}$  (condition de négativité affaiblie) et l’écriture des équations (4)–(6) sous la forme  $-\lambda_2 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} + s |\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}| = 0$  sur  $\Gamma_c$  nous permet d’obtenir des estimations *a priori* optimales.

THÉORÈME 1 (voir [2]). – Si la solution  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  du problème (7) est telle que  $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ ; et si  $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_h)$  est la solution du problème discret (13), alors il existe une constante  $C(\mathbf{u}, s) > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h\|_{-1/2, \Gamma_c} \leq C(\mathbf{u}, s) h^{3/4}. \tag{16}$$

La constante  $C(\mathbf{u}, s)$  dépend de la norme de  $\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2}$  et de celle de  $\|s\|_{L^2(\Gamma_c)}$ .

Remarque 2. – L’estimation (16) reste valide lorsque on remplace l’espace  $\mathbf{W}_h(\Gamma_c)$  par l’espace des fonctions constantes par morceaux  $\mathbf{W}_h^0(\Gamma_c)$  (voir [2]) :

$$\mathbf{W}_h^0(\Gamma_c) = \{ \boldsymbol{\mu}_h, \boldsymbol{\mu}_h|_{]z_i, z_{i+1}[} \in \mathcal{P}_0(]z_i, z_{i+1}[), 0 \leq i \leq N(h) \}, \tag{17}$$

où  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{x}_0, \mathbf{z}_{N(h)+1} = \mathbf{x}_{N(h)}$  et pour  $i = 1, \dots, N(h) - 1, z_i$  désigne le milieu du segment  $[\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i]$ . Les cônes convexes fermés sont alors définis par :

$$\begin{aligned} M_h^{1,0} &= \{ \mu_{1h} \in \mathbf{W}_h^0(\Gamma_c), \mu_{1h} \geq 0 \}, \\ M_h^{2,0} &= \left\{ \mu_{2h} \in \mathbf{W}_h^0(\Gamma_c), \int_{\Gamma_c} \mu_{2h} \psi_h \, d\Gamma - \int_{\Gamma_c} s |\psi_h| \, d\Gamma \leq 0, \forall \psi_h \in \mathbf{W}_h^2(\Gamma_c) \right\}. \end{aligned}$$

Le couple d'espaces  $(\mathbf{V}_h, \mathbf{W}_h^0(\Gamma_c))$  ainsi défini est compatible au sens où la condition (14) est vérifiée (voir [1]). Le Théorème 1 permet alors d'améliorer l'estimation d'erreur obtenue dans [8] pour cette situation.

### 3. Résultats numériques

Dans cette partie, on étudie numériquement les performances des méthodes présentées ci-dessus pour  $\mathbf{M}_{0h} = M_h^{1,0} \times M_h^{2,0}$  et  $\mathbf{M}_h = M_h^{1,*} \times M_h^{2,*}$ . Ces méthodes ont été implémentées dans **PLAST2** (voir [3]), un code d'éléments finis en dynamique explicite basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour ces tests numériques la loi de comportement utilisée est celle de Hooke pour des matériaux isotropes et homogènes :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\mathbf{u}) + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}),$$

avec  $E = 7 \times 10^4$  MPa et  $\nu = 0,3$ .

Le domaine  $\Omega$  est un rectangle de dimension 1,3 mm  $\times$  0,3 mm. La discrétisation est faite avec des éléments finis rectangulaires de type  $Q_1$  (cf. [5]) en déformations planes. L'origine de l'abscisse curviligne est définie à partir du point  $O$  dans le sens trigonométrique. On impose sur les parties  $\Gamma_u^1$  et  $\Gamma_u^2$  un déplacement total de  $2 \times 10^{-3}$  mm (voir Fig. 1). Le déplacement horizontal est nul sur  $\Gamma_u^1$ . Le déplacement vertical sur  $\Gamma_u^2$  est libre ce qui permet un décollement du corps déformable pour une abscisse supérieure à 0,7 mm (voir Fig. 3). Le seuil de Tresca  $s$  est égal à 200 MPa. Comme on ne dispose pas de solution

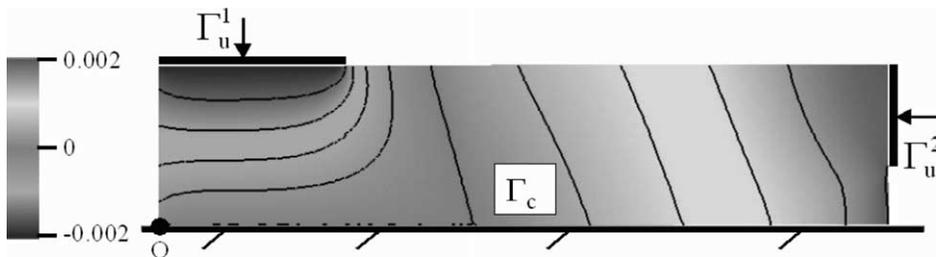


Figure 1. – Champ de déplacement vertical sur le maillage de référence.

Figure 1. – Vertical displacement field on the reference mesh.

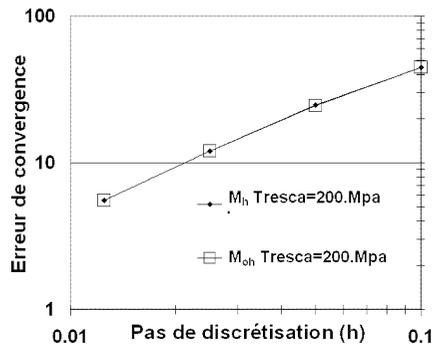


Figure 2. – Taux de convergence des deux approches.

Figure 2. – Convergence rate of the two approaches.

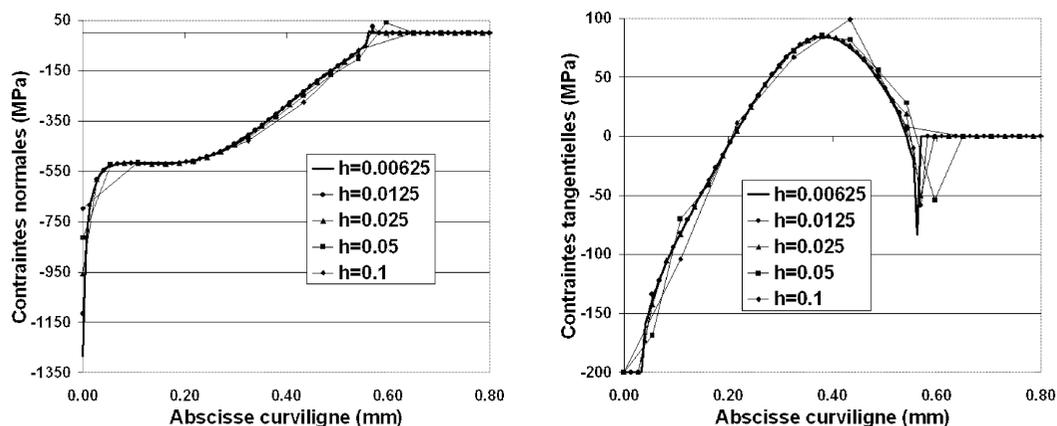


Figure 3. – Contraintes normales et tangentielles pour différents pas de discrétisation.

Figure 3. – Normal and tangential stresses for different discretization parameter  $h$ .

analytique pour notre problème, l'erreur  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$  est évaluée numériquement par  $\|\mathbf{u}_{\text{ref}} - \mathbf{u}_h\|$ . La solution de référence  $\mathbf{u}_{\text{ref}}$  est calculée sur un maillage de référence comportant 9678 éléments.

La Fig. 1 représente la composante verticale de  $\mathbf{u}_{\text{ref}}$ . Sur la Fig. 2 l'ordre de convergence des différentes méthodes pour différents pas de discrétisation  $h$  est représenté. Nous constatons que le taux de convergence est similaire pour les deux approches ( $\mathbf{M}_{0h}$  et  $\mathbf{M}_h$ ). Sur la Fig. 3, on peut constater que la contrainte normale n'est pas négative sur toute l'interface, ceci est dû à l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange faiblement négatifs  $M_h^{1,*}$ . Néanmoins cette méthode permet d'atténuer les singularités de la contrainte sur les bords [2].

### Références bibliographiques

- [1] A. Agouzal, J.M. Thomas, Une méthode d'éléments finis hybrides en décomposition de domaines, *Model. Math. Anal. Numer.* 29 (6) (1995) 749–764.
- [2] L. Baillet, T. Sassi, Mixed finite element methods for Signorini's problem with friction, en préparation.
- [3] L. Baillet, T. Sassi, Nonconforming finite element methods for contact problem with friction, in: 3rd Contact Mechanics International Symposium, CMIS 2001, Peniche, Portugal, June 17–21, 2001.
- [4] G. Bayada, M. Chambat, K. Lhalouani, T. Sassi, Eléments finis avec joints pour des problèmes de contact avec frottement de Coulomb nonlocal, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* 325 (1997) 1323–1328.
- [5] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [6] P. Coorevits, P. Hild, K. Lhalouani, T. Sassi, Mixed finite element method for unilateral problem: Convergence analysis and numerical studies, *Math. Comp.* 71 (237) (2002) 1–25.
- [7] G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [8] J. Haslinger, I. Hlaváček, Approximation of Signorini problem with friction by a mixed finite element method, *J. Math. Anal. Appl.* 86 (1982) 99–122.
- [9] J. Haslinger, I. Hlaváček, J. Necas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, in: P.G. Ciarlet, J.-L. Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV, Part 2*, North-Holland, 1996.
- [10] P. Hild, Éléments finis non conformes pour un problème de contact unilatéral avec frottement, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* (1997) 707–710.