C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 885–888

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Sur la stabilité du fibré de Picard

Valentin Savin

Université de Lille 3, UFR MSES, BP 149, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 4 février 2002 ; accepté le 4 mars 2002

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

Résumé Nous étudions la stabilité du fibré de Picard sur l'espace de modules de fibrés vectoriels stables de rang et déterminant fixés, sur une courbe algébrique, irréductible, lisse, de genre $g \geqslant 2$. ***Pour citer cet article : V. Savin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 885–888.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the stability of the Picard bundle

Abstract We study the stability of the Picard bundle on the moduli space of stable vector bundles of fixed rank and determinant, over an irreducible, smooth, algebraic curve of genus $g \geqslant 2$. ***To cite this article: V. Savin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 885–888.***
© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit X une courbe algébrique, irréductible, lisse, de genre $g \geqslant 2$, sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. L'espace de modules de fibrés vectoriels stables sur X, de rang $r \geqslant 2$ et de déterminant isomorphe à $\xi \in \mathrm{Pic}^d(X)$ sera dénoté par $U(r,\xi)$. Si les entiers r et d sont premiers entre eux, cette variété est projective, lisse, de dimension $(r^2-1)(g-1)$, et il existe une famille de fibrés vectoriels, qu'on appelle également fibré de Poincaré :

$$W \to X \times U(r,\xi)$$

vérifiant la propriété d'universalité suivante : *Pour toute famille $E \to X \times S$ de fibrés vectoriels stables sur X, de rang r et déterminant isomorphe à ξ, paramétrée par un schéma noethérien S, il existe un unique morphisme* (*appelé de classification*) $\varphi : S \to U(r,\xi)$ *et L un fibré en droites sur S, tels que $E \cong (1_X \times \varphi)^* W \otimes (p_S)^* L$, où p_S désigne la projection de $X \times S$ sur S.*

Les faisceaux de Picard sont, par définition, les images directes $R^0(p)_* W$ et $R^1(p)_* W$, où p est la projection de $X \times U(r,\xi)$ sur $U(r,\xi)$. Si $d/r > 2g-2$ alors, par le théorème de Rimann–Roch, $R^1(p)_* W = 0$ et $R^0(p)_* W$ est un fibré vectoriel sur $U(r,\xi)$ de rang $d + r(1-g)$, appelé fibré de Picard. Le problème de la stabilité de $R^0(p)_* W$ – $U(r,\xi)$ étant canoniquement polarisé par le générateur ample de $\mathrm{Pic}\, U(r,\xi) \cong \mathbb{Z}$ – est encore un problème ouvert. Récemment, Brambila Paz, Gomez Gonzalez et Pioli [2] ont montré que $R^0(p)_* W$ est un fibré simple. Nous démontrons que, sauf pour $g = 2,\ d \equiv \pm 1 \bmod (r)$, le fibré de Picard vérifie une condition de $(0, -1/r)$-semi-stabilité sur $U(r,\xi)$. Plus précisément, on obtient :

Adresse e-mail : savin@univ-lille3.fr (V. Savin).

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés
S1631-073X(02)02349-X/FLA

THÉORÈME 1.1. – *Si* $d > r(2g-2)+1$ *et* $(g, d \bmod(r)) \neq (2, \pm 1)$*, alors pour tout sous-faisceau* $\mathcal{F}$ *de* $R^0(p)_*W$*, l'inégalité ci-dessous est satisfaite* :

$$\frac{\deg \mathcal{F}}{\operatorname{rg} \mathcal{F}} \leqslant \frac{\deg(R^0(p)_*W) + 1/r}{\operatorname{rg}(R^0(p)_*W)}.$$

On remarque également que sur $U(r,d)$ – l'espace de modules de fibrés stables avec rang et degré fixés – le fibré de Picard est stable par rapport au diviseur théta généralisé (*voir* [3]).

Dans le paragraphe suivant nous étudions certaines propriétés des transformations élémentaires des fibrés $(0,1)$-stables (pour une définition de la (k,l)-stabilité *voir* [4]), que nous utiliserons dans le troisième paragraphe pour démontrer le Théorème 1.1.

2. Transformations élémentaires

Soit $V \to X \times T$ une famille de fibrés vectoriels sur X, paramétrée par T. On dénotera par HV la famille obtenue par une transformation élémentaire de V, en un point fixé $x \in X$. On rappelle que cette famille est paramétrée par le fibré projectif $\mathbb{P}(V_x^*) \xrightarrow{\pi_V} T$, et que pour $q \in \pi_V^{-1}(t)$, HV_q est le noyau de l'application $V_t \xrightarrow{q} \mathcal{O}_x \to 0$, induite par q.

Si V un fibré $(0,1)$-stable sur X de rang r avec $\det V \cong \xi \otimes \mathcal{O}(x)$, alors HV est une famille de fibrés stables sur X, de déterminant isomorphe à ξ, et l'application de classification $\varphi : \mathbb{P}(V_x^*) \to U(r,\xi)$ est un plongement (*voir* [4] ou [6]).

Soit U l'ouvert des fibrés $(1,1)$-stables de $U(r,\xi)$. Compte tenu que $(r,d)=1$, U est un ouvert non-vide, sauf peut-être pour $g=2$, $d \equiv \pm 1 \bmod(r)$ (*cf.* [4]). On dénotera par $\mathcal{W} \to X \times U$ la restriction de W sur $X \times U$, par $K\mathcal{W} \to X \times \mathbb{P}(\mathcal{W}_x^*)$ la famille duale de la transformation élémentaire de $\mathcal{W}$ et par $K^2\mathcal{W} \to X \times \mathbb{P}(K\mathcal{W}_x^*)$ la famille duale de la transformation élémentaire de $K\mathcal{W}$. Il s'ensuit que $K^2\mathcal{W}$ est une famille de fibrés stables sur X, de rang r et déterminant isomorphe à ξ, et soient $\phi : \mathbb{P}(K\mathcal{W}_x^*) \to U(r,\xi)$ l'application de classification et $\bar{q} \in \mathbb{P}(\mathcal{W}_x^*)$. Alors ϕ est un plongement sur $\pi_{K\mathcal{W}}^{-1}(\bar{q}) = \mathbb{P}(HW_{(\bar{q},x)})$, et on notera $\mathbb{P}(\bar{q}) = \phi(\pi_{K\mathcal{W}}^{-1}(\bar{q}))$.

PROPOSITION 2.1. – *Pour tout fermé* $F \subset U(r,\xi)$ *de codimension* $\geqslant 2$*, il existe* $\bar{q} \in \mathbb{P}(\mathcal{W}_x^*)$ *tel que* $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}(\bar{q})}(F \cap \mathbb{P}(\bar{q})) \geqslant 2$.

Démonstration. – On remarque tout d'abord que toutes les fibres de ϕ sont de dimension $\leqslant 2r-2$. En effet, soit $\bar{\bar{q}} \in \mathbb{P}(K\mathcal{W}_x^*)$. Si on note $\bar{q} = \pi_{K\mathcal{W}}(\bar{\bar{q}})$ et $q = \pi_{\mathcal{W}}(\bar{q})$, on obtient les deux suites exactes :

$$0 \to H(K\mathcal{W})_{\bar{\bar{q}}} \longrightarrow K\mathcal{W}_{\bar{q}} \xrightarrow{\bar{\bar{q}}} \mathcal{O}_x \to 0,$$

$$0 \longrightarrow H\mathcal{W}_{\bar{q}} \longrightarrow \mathcal{W}_q \xrightarrow{\bar{q}} \mathcal{O}_x \longrightarrow 0$$

Si $\bar{\bar{q}} \in \phi^{-1}(V)$, alors $K\mathcal{W}_{\bar{q}} \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_x, V^*)$ et $\mathcal{W}_q \in \operatorname{Ext}^1(\mathcal{O}_x, K\mathcal{W}_{\bar{q}}^*)$. Puisque les familles de tansformations élémentaires paramétrées par $\mathbb{P}(W_{(q,x)}^*)$ et $\mathbb{P}(W_{(\bar{q},x)}^*)$ sont injectives, on trouve :

$$\dim \phi^{-1}(V) \leqslant \dim \mathbb{P}\operatorname{Ext}^1\big(\mathcal{O}_x, V^*\big) + \dim \mathbb{P}\operatorname{Ext}^1\big(\mathcal{O}_x, K\mathcal{W}_{\bar{q}}^*\big) - 2 = 2r-2.$$

Par conséquent $\dim \phi^{-1}(F) \leqslant \dim F + 2r - 2 \leqslant (r^2-1)(g-1) + 2r - 4$. D'autre part, si on suppose que $\operatorname{codim}_{\mathbb{P}(\bar{q})}(F \cap \mathbb{P}(\bar{q})) \leqslant 1$, $\forall \bar{q} \in \mathbb{P}(\mathcal{W}_x^*)$, alors $\phi^{-1}(F)$ coupe chaque fibre de $\pi_{K\mathcal{W}}$ sur un fermé de dimension $\geqslant r-2$, et on obtient $\dim \phi^{-1}(F) \geqslant \dim \mathbb{P}(\mathcal{W}_x^*) + r - 2 = (r^2-1)(g-1) + 2r - 3$. On aboutit donc à une contradiction !

Afin d'étudier la stabilité du fibré de Picard, nous avons besoin de préciser son degré. Puisque $(r,d)=1$, il existe des entiers $l \in [1,r]$ et $c \in [0,d]$ uniquement déterminés, tels que $ld - cr = 1$. D'après

Ramanan [5], on sait qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\det W_x \cong H^{\otimes(mr+l)}$, $\forall x \in X$, où H est le générateur ample du groupe de Picard de $U(r,\xi)$. Sachant que le fibré de Poincaré est déterminé modulo tensorisation par l'image réciproque d'un fibré en droites sur $U(r,\xi)$, on peut supposer que $\det W_x \cong H^{\otimes l}$ – dans ce cas on dit également que le fibré de Poincaré est normalisé. Alors, en utilisant les constructions de [5], on vérifie facilement que :

$$\deg\bigl(R^0(p)_*W\bigr) = \bigl(c + l(1-g)\bigr)\deg(H). \tag{1}$$

3. Démonstration du Théorème 1.1

Nous nous intéressons tout d'abord aux restrictions de $(p_{\mathbb{P}(H\mathcal{W})})_*K^2\mathcal{W}$ sur les fibres de $\pi_{K\mathcal{W}}$. Compte tenu de l'universalité de W, cela nous permettra de décrire les restrictions du fibré de Picard sur les sous-variétés $\mathbb{P}(\bar{q})$ de $U(r,\xi)$. Soit $\bar{q} \in \mathbb{P}(\mathcal{W}_x^*)$, alors $\pi_{K\mathcal{W}}^{-1}(\bar{q}) = \mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})$ et sur $X \times \mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})$ on a une suite exacte qui découle de la définition des transformations élémentaires :

$$0 \to H(K\mathcal{W}_{\bar{q}}) \longrightarrow p_X^*K\mathcal{W}_{\bar{q}} \longrightarrow p_X^*(\mathcal{O}_x) \otimes p^*_{\mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})}\mathcal{O}(1) \to 0,$$

où $\mathcal{O}(1)$ dénote le fibré ample tautologique sur $\mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})$. En appliquant le foncteur image directe sur la suite exacte duale, et compte tenu que $H\mathcal{W}_{\bar{q}}$ est un fibré stable de degré $d-1 > r(2g-2)$, donc $h^1(X, H\mathcal{W}_{\bar{q}}) = 0$, on obtient :

$$0 \to H^0(X, H\mathcal{W}_{\bar{q}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})} \longrightarrow (p_{\mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})})_*K^2\mathcal{W}_{\bar{q}} \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \to 0.$$

Sachant que $h^1(\mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)}), \mathcal{O}(1)) = 0$, l'extension ci-dessus est triviale, et par conséquent :

$$(p_{\mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})})_*K^2\mathcal{W}_{\bar{q}} \cong H^0(X, H\mathcal{W}_{\bar{q}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(H\mathcal{W}_{(\bar{q},x)})} \oplus \mathcal{O}(-1).$$

Considérons maintenant un sous-faisceau $\mathcal{F}$ de $R^0(p)_*W$. On supposera que le quotient $R^0(p)_*W/\mathcal{F}$ est sans torsion. D'après la Proposition 2.1, on peut trouver $\bar{q} \in \mathbb{P}(\mathcal{W}_x^*)$ et Z une droite en $\mathbb{P}(\bar{q})$ qui ne coupe ni le lieu singulier de $\mathcal{F}$, ni celui de $R^0(p)_*W/\mathcal{F}$. Notons $\deg\mathcal{F} = \delta\deg H$ et $s = \operatorname{rg}\mathcal{F}$. Compte tenu que ϕ est un plongement sur les fibres de $\pi_{K\mathcal{W}}$, nous allons identifier $\phi^{-1}(Z)$ à Z. Soient $\alpha,\ \beta$ des entiers tels que $H|_Z \cong \mathcal{O}_Z(\alpha)$ et $W|_{X\times Z} \cong K^2\mathcal{W}|_{X\times Z} \otimes \mathcal{O}_Z(\beta)$. Alors $\mathcal{F}|_Z$ est un sous-fibré de degré $\alpha\delta$ et de rang s de

$$R^0(p)_*W|_Z \cong \bigl(H^0(X, H\mathcal{W}_{\bar{q}}) \otimes \mathcal{O}_Z \oplus \mathcal{O}_Z(-1)\bigr) \otimes \mathcal{O}_Z(\beta). \tag{2}$$

On en déduit que $\alpha\delta/s \leqslant \beta$. D'autre part, le degré du fibré $R^0(p)_*W|_Z$ peut être calculé de deux manières différentes, en utilisant les équations (1) et (2), ce qui entraine :

$$\alpha\bigl(c + l(1-g)\bigr) = \deg\bigl(R^0(p)_*W|_Z\bigr) = \bigl(h^0(X, H\mathcal{W}_{\bar{q}}) + 1\bigr)\beta - 1 = \bigl(d + r(1-g)\bigr)\beta - 1.$$

Sachant que $(d + r(1-g))l - r(c + l(1-g)) = 1$, il s'ensuit qu'il existe un entier $k \geqslant 0$, tel que $\alpha = k(d + r(1-g)) + r$ et $\beta = k(c + l(1-g)) + l$. Supposons que $\mu(\mathcal{F}) \geqslant \mu(R^0p_*W)$. Alors :

$$\frac{\beta}{\alpha} \geqslant \frac{\delta}{s} \geqslant \frac{c + l(1-g)}{d + r(1-g)}$$

d'où on trouve les deux inégalités suivantes

$$1 \geqslant \frac{\alpha}{s}\Bigl(\bigl(d + r(1-g)\bigr)\delta - \bigl(c + l(1-g)\bigr)s\Bigr) \geqslant 0,$$
$$1 \geqslant \frac{d + r(1-g)}{s}(\beta s - \alpha\delta) \geqslant 0.$$

Puisque $s = \mathrm{rg}(\mathcal{F}) < \mathrm{rg}(R^0(p)_*W) = d + r(1-g)$, la deuxième inégalité entraine que $\beta s - \alpha\delta = 0$. Alors $(d + r(1-g))\delta - (c + l(1-g))s \neq 0$ et la première inégalité entraine $s \geqslant \alpha$, d'où $k = 0$. Par conséquent $\alpha = r$ et $\beta = l$, donc $ls - r\delta = 0$ et l'inégalité de l'énoncé s'ensuit.

Remarque 1. – On en déduit également de cette démonstration que, si $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau déstabilisant de $R^0(p)_*W$, alors $\mu(\mathcal{F}) = \frac{l}{r}\deg H$.

Remarque 2. – On peut vérifier facilement que, pour $y \neq x$, les restrictions de $K^2\mathcal{W}_y$ sur les fibres de $\pi_{K\mathcal{W}}$ sont isomorphes à $\mathcal{O}(\alpha)$. Alors, en employant les mêmes techniques que ci-dessus, on peut en déduire la stabilité du fibré W_y sur $U(r,\xi)$ (*voir* [6]). Pour une autre démonstration de la stabilité du fibré de Poincaré voir également [1].

Références bibliographiques

[1] V. Balaji, L. Brambila Paz, P.E. Newstead, Stability of the Poincaré bundle, Math. Nachr. 188 (1997) 5–15.

[2] L. Brambila Paz, E. Gomez Gonzalez, F. Pioli, On Picard bundles over Pyrm varieties, Collect. Math. 52 (2) (2001) 157–168.

[3] Y. Li, Picard bundles, Internat. J. Math. 2 (1991) 525–550.

[4] M.S. Narasimhan, S. Ramanan, in: C.P. Ramanujam, A. Tribute (Eds.), Geometry of Hecke Cycles I, Springer-Verlag, 1978.

[5] S. Ramanan, The moduli spaces of vector bundles over an algebraic curve, Math. Ann. 200 (1973) 69–84.

[6] V. Savin, Propriétés de bidualité des espaces de modules en termes de cohomologie de groupes, Thèse de doctorat, Université J. Fourier (Grenoble I), 2001.