C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 855–858

Équations différentielles/*Ordinary Differential Equations*

Pinceau intégral enlacé

Felipe Cano [a], Robert Moussu [b], Fernando Sanz [a]

[a] **Dept. de Algebra, Geometria y Topologia, Universidad de Valladolid, Facultad de Ciencias, 47005 Valladolid, Espagne**

[b] **Université de Bourgogne, Laboratoire de topologie, UMR 5584 du CNRS, BP 47870, 21078 Dijon cedex, France**

Reçu le 26 février 2002 ; accepté le 4 mars 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé Soit γ_0 une courbe intégrale d'un champ de vecteurs analytique réel sur une variété de dimension 3. Supposons que γ_0 a des tangentes itérées orientées. Le pinceau intégral $PI(\gamma_0)$ est l'ensemble des courbes intégrales γ qui ont les mêmes tangentes itérées orientées que γ_0. Les courbes de $PI(\gamma_0)$, sont soit deux à deux sous-analytiquement séparables soit deux à deux asymptotiquement enlacées. Dans ce dernier cas, $PI(\gamma_0)$ possède un axe formel divergent si et seulement ces courbes sont non oscillantes. ***Pour citer cet article : F. Cano et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 855–858.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Linked integral pencils

Abstract Let γ_0 be a integral curve of an analytic vector field on a manifold of dimension 3. We suppose that γ_0 has oriented, iterated tangents. The integral pencil $PI(\gamma_0)$ is the set of integral curves γ which have the same oriented, iterated tangent as γ_0. The curves of $PI(\gamma_0)$ are either subanalitically separated or asymptotically linked. In this case $PI(\gamma_0)$ has a formal axis which is divergent if and only if the curves of $PI(\gamma_0)$ are not oscillating. ***To cite this article: F. Cano et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 855–858.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit X un champ de vecteurs analytique réel sur une variété M_0 de dimension 3 et soit $\gamma_0 : t \mapsto \gamma_0(t)$, $t \geqslant 0$, une courbe intégrale de X d'ensemble ω-limite, $\omega(\gamma_0) = p_0$, un point singulier isolé de X. Cette Note porte sur la question suivante : comment, d'un point de vue analytique, γ_0 peut-elle tendre vers p_0 ? Rappelons tout d'abord deux concepts basiques. On dit que γ_0 est *oscillante* s'il existe une surface analytique qui coupe une infinité de fois l'image $|\gamma_0|$ de γ_0. On dit que γ_0 possède des *tangentes itérées* $TI(\gamma_0) = \{p_n\}$ s'il existe une suite d'éclatements ponctuels

$$M_0 \xleftarrow{\pi_1} M_1 \xleftarrow{\pi_2} M_2 \cdots M_n \xleftarrow{\pi_{n+1}} M_{n+1} \cdots$$

de centres respectifs $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ telle que p_n soit l'unique point ω-limite de $\gamma_n = \pi_n^{-1} \circ \gamma_{n-1}$. Les courbes non oscillantes possèdent des tangentes itérées mais la réciproque n'est pas vraie. Dans [5], nous

Adresse e-mail : rmoussu@u-bourgogne.fr (R. Moussu).

S1631-073X(02)02348-8/FLA

avons étudié les courbes oscillantes qui possèdent des tangentes itérées. Dans cette Note, nous étudions le comportement analytique relatif des courbes intégrales qui ont les mêmes tangentes itérées.

Supposons que γ_0 possède des tangentes itérées $TI(\gamma_0) = \{p_n\}$. La droite tangente à γ_{n-1} en p_{n-1}, représentée par le point p_n de $\mathbb{R}P(2)$, est naturellement orientée par γ_{n-1}. Nous notons $(p_{n,+})$ le point de S^2 correspondant et $TI^+(\gamma_0) = \{(p_{n,+})\}$ est la suite des *tangentes itérées orientées* de γ_0. *Le pinceau intégral* de γ_0 est l'ensemble $PI(\gamma_0)$ des courbes intégrales γ de X qui possèdent des tangentes itérées orientées $TI^+(\gamma) = TI^+(\gamma_0)$.

THÉORÈME 1. – *Si γ_0 est une courbe intégrale de X qui possède des tangentes itérées on a l'alternative suivante* :

(1) *Deux courbes distinctes, quelconques, de $PI(\gamma_0)$ sont sous-analytiquement séparables.*

(2) *Deux courbes distinctes, quelconques, de $PI(\gamma_0)$ sont asymptotiquement enlacées.*

Dans le cas (1) nous dirons que $PI(\gamma_0)$ est un *pinceau intégral séparé*. Dans le cas (2) nous dirons que $PI(\gamma_0)$ est un *pinceau intégral enlacé*. La structure de tels pinceaux est décrite dans le Théorème 2 ci-dessous. Avant de l'énoncer définissons brièvement les concepts qui apparaissent dans le théorème précédent. Soient $\gamma,\ \gamma'$ deux courbes intégrales de X qui appartiennent à $PI(\gamma_0)$ et soient $|\gamma|,\ |\gamma'|$ leurs images. On dit que $\gamma,\ \gamma'$ sont *distinctes* si $|\gamma|,\ |\gamma'|$ ne sont pas contenues dans une même orbite du flot de X. On dit que $\gamma,\ \gamma'$ sont *sous-analytiquement séparables* s'il existe une submersion sous-analytique $f : U \to \mathbb{R}^2$ telle que $\gamma(t),\ \gamma'(t)$ appartiennent à U pour t assez grand et dont la restriction à $|\gamma| \cup |\gamma'|$ est injective.

Supposons que γ_0 possède des tangentes itérées et soit $\gamma : t \to \gamma(t),\ t \geqslant 0$, un élément de $PI(\gamma_0)$. Des coordonnées (x, y, z) sont *adaptées à γ* si elles sont centrées en 0, si la tangente orientée $(p_1, +)$ à γ_0 est contenue dans le demi-espace $z > 0$ et si, pour t assez grand, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z(t)) < 0$. Si c'est le cas, on peut reparamétrer le germe de $|\gamma|$ en p_0 par z ; ce que nous écrirons encore $\gamma : z \mapsto \gamma(z) = (x(z), y(z), z)$, $0 < z \ll 1$.

Deux courbes distinctes $\gamma,\ \gamma'$ de $PI(\gamma_0)$ sont *asymptotiquement enlacées relativement à des coordonnées* (x, y, z) si (x, y, z) sont adaptées à γ et γ' et si l'angle $\Theta(z)$ du vecteur $\gamma(z)\ \gamma'(z)$ avec un vecteur fixé de $z = 0$ tend vers plus ou moins l'infini lorsque z tend vers 0. Ce concept est en fait indépendant des coordonnées adaptées choisies pour le définir. Il peut même être défini de façon intrinsèque [10].

Soit $PI(\gamma_0)$ un pinceau intégral de X et soit $\widehat{\Gamma}$ une courbe formelle (éventuellement convergente) au point p_0. On dit que $\widehat{\Gamma}$ est *un axe du pinceau $PI(\gamma_0)$* si la suite de points infiniment proches de $\widehat{\Gamma}$, au sens de [1], coïncide avec $TI(\gamma_0)$.

THÉORÈME 2. – *Soit $PI(\gamma_0)$ un pinceau intégral enlacé. Alors $PI(\gamma_0)$ possède un axe $\widehat{\Gamma}$ qui est une courbe intégrale formelle de X et on a l'alternative suivante* :

(1) *L'axe $\widehat{\Gamma}$ est convergent et les courbes de $PI(\gamma_0)$ distinctes de $\widehat{\Gamma}$ sont oscillantes.*

(2) *L'axe $\widehat{\Gamma}$ n'est pas contenu dans une surface analytique et les courbes de $PI(\gamma_0)$ sont non oscillantes.*

Les deux corollaires suivants précisent les propriétés des pinceaux enlacés.

COROLLAIRE 1 (détermination finie). – *Soit $PI(\gamma_0)$ un pinceau intégral de X d'axe formel $\widehat{\Gamma}$ et soient (x, y, z) des coordonnées adaptées aux courbes de $PI(\gamma_0)$. Il existe des entiers r et k tels que $PI(\gamma_0)$ soit enlacé si et seulement si le jet d'ordre k en p_0 de X possède un pinceau enlacé d'axe une courbe formelle tangente à $\widehat{\Gamma}$ à l'ordre r.*

COROLLAIRE 2 (représentation locale). – *Soit $PI(\gamma_0)$ un pinceau intégral enlacé de X. Quel que soit le voisinage V de p_0 il existe un ouvert sous-analytique $U(\gamma_0) \subset V$ positivement invariant par le flot de X tel qu'une courbe intégrale γ de X appartient à $PI(\gamma_0)$ si et seulement s'il existe t_γ tel que $\gamma(t_\gamma)$ appartient à $U(\gamma_0)$.*

Remarque. – Soit $PI(\gamma_0)$ un pinceau intégral enlacé constitué de courbes non oscillantes. Son axe $\widehat{\Gamma}$ n'étant pas contenu dans une surface analytique, une courbe quelconque γ de $PI(\gamma_0)$ ne peut pas être contenue dans une surface analytique. Cette propriété de transcendance a deux conséquences intéressantes.

(1) $PI(\gamma_0)$ est analytiquement irréductible au sens suivant : un ouvert sous-analytique comme dans le Corollaire 2 ne peut pas être la réunion de deux ensembles sous-analytiques disjoints, positivement invariants par X.

(2) L'application $\gamma^* : f \to f \circ \gamma$ de l'anneau O_{p_0} des germes en p_0 de fonctions analytiques dans l'anneau des germes en $+\infty$ de fonctions réelles est injective. Son image A_γ est stable par dérivation et elle est constituée de germes de fonctions qui ne s'annulent pas. Son corps des fractions K_γ est un corps de Hardy et γ^* s'étend en un isomorphisme du corps des fractions de O_{p_0} sur K_γ. Ceci conduit à une question importante : *existe-t-il une structure* o*-minimale dont K_γ soit le corps des fonctions définissables* [15,16].

Exemple de l'équation d'Euler. – Dans $\mathbb{C}^2$ muni des coordonnées (u, v), considérons les équations différentielles

$$(E_\varepsilon) \qquad v^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = u - \varepsilon v \quad \text{avec } \varepsilon = 0, 1.$$

Pour α réel avec $|\alpha| < \pi/2$ posons $\omega = \exp(-\mathrm{i}\alpha)$ et identifions $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ à $\mathbb{C} \times \omega\mathbb{R}$ via l'injection $j_\omega : (u, z) \to (u, \omega z)$. L'image réciproque de E_ε par j_ε s'écrit

$$(E_{\varepsilon,\omega}) \qquad z^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \omega^{-1} u - \varepsilon z.$$

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via l'écriture $u = (x + iy) \equiv (x, y)$, l'équation $E_{\varepsilon,\omega}$ est une équation différentielle réelle sur $\mathbb{R}^2$ dépendant du « temps » z. Il lui correspond le champ de vecteurs

$$X_{\varepsilon,\omega} = (-\cos\alpha x + \sin\alpha y)\frac{\partial}{\partial x} + (-\sin\alpha x - \cos\alpha y)\frac{\partial}{\partial y} - z^2 \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon z \frac{\partial}{\partial x}.$$

Cas $\varepsilon = 0$. Le demi axe $\{x = y = 0,\ z > 0\} = \gamma_0$ est une courbe intégrale de $X_{0,\omega}$. Le pinceau intégral $PI(\gamma_0)$ a pour axe $\Gamma = \{x = y = 0\}$ et il est constitué des courbes

$$\gamma_c : z \mapsto \bigl(x_c(z),\ y_c(z), z\bigr) = \bigl(c \exp(-1/\omega z), z\bigr), \quad z > 0,\ c \in \mathbb{C}.$$

– Si $\omega = 1$, deux courbes $\gamma_c,\ \gamma_{c'}$ sont clairement séparées par une projection linéaire.
– Si $\omega \neq 1$, $PI(\gamma_0)$ est enlacé et les courbes γ de $PI(\gamma_0)$ distinctes de γ_0 sont oscillantes.

Cas $\varepsilon = 1$. La courbe formelle $\widehat{\Gamma}_\omega(z) = (\widehat{x}_\omega(z),\ \widehat{y}_\omega(z),\ z)$ définis par :

$$\widehat{x}_\omega + \mathrm{i}\widehat{y}_\omega(z) = \sum (n-1)!\,\omega^n z^n$$

est une courbe intégrale formelle de $X_{1,\omega}$. L'ensemble des courbes intégrales γ de $X_{1,\omega}$ situées dans $z > 0$ constitue un pinceau intégral $PI(\gamma_0)$ d'axe formel $\widehat{\Gamma}_\omega$.

– Si $\omega = 1$, deux courbes $\gamma,\ \gamma'$ de $PI(\gamma_0)$ sont séparées par une projection linéaire.
– Si $\omega \neq 1$, $PI(\gamma_0)$ est enlacé et ses courbes sont non oscillantes.

En effet si $\gamma(z) = (x(z),\ y(z), z),\ \gamma'(z) = (x'(z),\ y'(z)),\ z > 0$, appartiennent à $PI(\gamma_0)$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $(x(z) - x'(z)) + \mathrm{i}(y(z) - y'(z)) = c \exp(-1/z\omega)$.

On sait que l'équation d'Euler E_1 est sectoriellement conjuguée par « un » morphisme Gevrey à E_0 [8,13]. Ce morphisme est fibré et il respecte les hyperplans $\mathbb{C} \times \omega\mathbb{R}$. Sa restriction à un tel hyperplan conjugue $E_{1,\omega}$ à $E_{0,\omega}$. En particulier elle envoie des courbes non oscillantes sur des courbes oscillantes si $\omega \neq 1$.

Plan des démonstrations. – Dans [5], nous avons essentiellement montré que les résultats énoncés sont vrais pour des courbes intégrales oscillantes. Aussi dans la suite, γ_0 désigne une courbe intégrale non oscillante et non analytique de X. Sa tangente p_1 en p_0 est une direction propre de $DX(0)$ correspondant à une valeur propre $\lambda_1 \leqslant 0$. Nous prouvons tout d'abord que les résultats sont vrais si X est *élémentaire* ; c'est-à-dire si le spectre de $DX(0)$ noté $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$. Nous distinguons les trois cas suivants :

(1) $\lambda_1 \neq 0$. En reprenant des arguments de [11] sur les théorèmes de Poincaré–Dulac [14,7,2], on montre que les courbes de $PI(\gamma_0)$ sont pfaffiennes. Elles sont donc séparables par projection linéaire.

(2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 \neq 0$. En s'appuyant sur un théorème de variété centrale – fibration invariante que nous a enseigné F. Takens (*voir* aussi [6]) on montre l'existence de *lamelles* invariantes transverses à la variété centrale. On en déduit que les courbes de $PI(\gamma_0)$ sont séparables par projection linéaire.

(3) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \neq 0$. En précisant des arguments de [5] on montre que $PI(\gamma_0)$ est soit enlacé, soit à courbes séparables par projection linéaire.

La fin de la preuve consiste à se ramener au cas X élémentaire en utilisant des éclatements locaux de points, de courbes analytiques et des ramifications. Des coordonnées adaptées à γ_0 étant fixées on montre tout d'abord que les projections linéaires $\gamma_{0,i},\ i = 1, 2, 3$, de γ_0 sur les plans de coordonnées sont solutions d'équations différentielles du second ordre, à coefficients analytiques. Les courbes $\gamma_{0,i}$ possèdent des développements asymptotiques selon des puissances fractionnaires d'ordre fini ou infini. Dans ce dernier cas en reprenant un argument de [4,9] on montre que ce sont des solutions formelles de ces équations. Pour conclure on utilise les méthodes de [3].

Références bibliographiques

[1] S.S. Abhyankar, Algebraic Geometry for Scientifics and Engineers, Mathematical Survey, Vol. 35, American Mathematical Society, 1980.
[2] V.I. Arnold, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir, 1980.
[3] F. Cano, Desingularization Strategies for a Three-Dimensional Vector Field, Lect. Notes in Math., Vol. 1259, Springer-Verlag, 1987.
[4] J. Cano, An extension of the Newton Puiseux Polygon construction to give solutions of Pfaffian forms, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1) (1993) 125–142.
[5] F. Cano, R. Moussu, F. Sanz, Oscillation, spiralement, tourbillonnement, Comment. Math. Helv. 75 (2000) 284–318.
[6] M. Chaperon, Some results on stable manifolds, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I 333 (2001) 119–124.
[7] H. Dulac, Solutions d'un système d'équations différentielles dans un voisinage des valeurs singulières, Bull. Soc. Math. France 40 (1912) 324–330.
[8] J. Ecalle, Les fonctions résurgentes. Tome III. L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux, Publ. Math. Orsay, 1985.
[9] D.Y. Grigor'ev, F. Singer, Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents, Trans. Amer. Math. Soc. 327 (1) (1991).
[10] J.-M. Lion, Angles et structures o-minimales, Preprint électronique dans Aspects des singularités, Université de Lille, 2000.
[11] J.-M. Lion, R. Moussu, F. Sanz, Champs de vecteurs analytiques et champs de gradients, Ergodic Theory Dynamical Systems (2001).
[12] S. Lojasiewicz, Ensembles semi-analytiques, Preprint I.H.E.S., 1972.
[13] J. Martinet, J.-P. Ramis, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, Publ. Math. I.H.E.S. 55 (1982) 63–124.
[14] H. Poincaré, Sur les courbes définies par des équations différentielles III, J. Math. Pures Appl. (4) (1885).
[15] J.-P. Rolin, P. Speissegger, A. Wilkie, Quasianalytic classes and o-minimality, Preprint, 2001.
[16] L. Van Den Dries, Tame Topology and o-Minimal Structures, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Vol. 248, Cambridge University Press, 1998.