C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 747–750

Équations différentielles/*Differential Equations*
(Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*)

Sur les exemples de Lins Neto de feuilletages algébriques

Adolfo Guillot

Instituto de Matemáticas UNAM, Unidad Cuernavaca. A.P. 273, Admón. de correos #3, C.P. 62251 Cuernavaca, Morelos, Mexique

Reçu le 25 février 2002 ; accepté le 4 mars 2002

Note présentée par Étienne Ghys.

Résumé On décrit une famille de champs de vecteurs quadratiques homogènes dans $\mathbb{C}^3$. Les solutions de ces champs sont des fonctions méromorphes globales. Sous la projection standard, les orbites de ces champs donnent les feuilletages de degré deux sur $\mathbb{CP}^2$ récemment construits par Lins Neto en connextion avec le problème de Poincaré. On montrera que ces feuilletages sont des quotients de flots linéaires sur un produit de courbes elliptiques. ***Pour citer cet article : A. Guillot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 747–750.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On Lins Neto's examples of algebraic foliations

Abstract We describe a family of quadratic homogeneous vector fields of $\mathbb{C}^3$ having global meromorphic solutions that are not completely integrable. Under the standard projection, the orbits of these fields will give the degree two foliations of $\mathbb{CP}^2$ recently constructed by Lins Neto in connection with the Poincaré problem. We will interpret these as quotients of linear flows on a product of elliptic curves. ***To cite this article: A. Guillot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 747–750.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

We will describe a one-parameter family of homogeneous quadratic polynomial complex vector fields of $\mathbb{C}^3$: the fields X_α given by $X_0 + \alpha X_\infty$ for $\alpha \in \mathbb{C}$ and the fields (2), (3). It will be proven that every solution of X_α is a single-valued holomorphic function whose domain of definition is the complement of a discrete set of points in $\mathbb{C}$, where the solution has poles (we say that the system has *global meromorphic solutions*, some authors talk about having the *Painlevé property*). A conjecture in [1]—cited as *Painlevé's conjecture*— states that polynomial vector fields in $\mathbb{C}^n$ having global meromorphic solutions are completely integrable. The set of parameters for which X_α is completely integrable will be given explicitly, giving in this way counterexamples to this conjecture. Being homogeneous, the vector field X_α gives, under the standard projection, a foliation of $\mathbb{CP}^2$; this is the foliation $\mathcal{F}_2(\alpha)$ recently constructed by Alcides Lins Neto in connection with the Poincaré problem [3], the one given in an affine chart by the kernel of

Adresse e-mail : adolfo@matcuer.unam.mx (A. Guillot).

S1631-073X(02)02343-9/FLA

the form (1). Our approach allows us to express in a simple manner most of the features of Lins Neto's foliations, identifying them to quotients of "linear" flows on a product of elliptic curves.

Our study is based on the very simple dynamics $\frac{1}{2}X_1$ and X_∞ have. These vector fields commute and are completely integrable, for the polynomial functions $b_k^i : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ given by (5) satisfy $X_i \cdot b_k^i = 0$ (for $i \in \{1, \infty\}$, $k \in \{2, 3\}$). Furthermore, relation (6) gives a common homogeneous first integral for the fields X_α which involves the quartic polynomial (4).

Let Σ be the elliptic curve $\{4x^3 - y^2 z = z^3\} \subset \mathbb{CP}^2$. It carries a unique holomorphic vector field Y with respect to which y/z is the derivative of x/z. Let $\mathcal{S}$ be the hypersurface of $\mathbb{C}^3$ where the first integral $-z_3^2 Q$ takes the value 1. Consider the function $\Phi : \mathcal{S} \to \Sigma^2$ given by $(z_1, z_2, z_3) \mapsto ([b_2^1 : b_3^1 : 1], [b_2^\infty : b_3^\infty : 1])$. It is injective. Let $\psi(t)$ be a solution of X_∞ (resp. $\frac{1}{2}X_1$) with initial values in $\mathcal{S}$ and let $y(t) = b_2^1 \circ \psi$ (resp. $y(t) = b_2^\infty \circ \psi$). We have that $(y')^2 = 4y^3 - 1$. In this way, the vector fields X_∞ and $\frac{1}{2}X_1$ on $\mathcal{S}$ are the pullback by Φ of the vector fields $(1, 0)$ and $(0, 1)$ on Σ^2 (with respect to the basis given by Y on each factor). The vector field $(\alpha - 1, 2)$ on Σ^2 can be shown to be completely integrable if and only if $(\alpha - 1)/2$ is the ratio of two elements of the lattice generated by $\{1, \omega\}$, for a primitive sixth root of unity ω. The action of ω on $\mathcal{S}$ preserves the orbits of X_α and gives on the quotient Lins Neto's foliation $\mathcal{F}_2(\alpha)$. Similar arguments can be given to prove that, in restriction to $\{-z_3^2 Q = 0\}$, the vector fields X_∞ and $\frac{1}{2}X_1$ are the pullback by the injective mapping (7) of the coordinate vector fields of $\mathbb{C}^2$.

Dans ses recherches sur le problème de Poincaré, Alcides Lins Neto construit, pour chaque degré, une famille remarquable de feuilletages holomorphes de $\mathbb{CP}^2$ [3]. Celle de degré deux est formée par les feuilletages $\{\mathcal{F}_2(\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$. Le feuilletage $\mathcal{F}_2(\alpha)$ est donné, dans la carte affine $\{z_3 \neq 0\}$, par le noyau de la forme

$$3\left[\alpha\left(z_1^2 - z_2^2\right) + 2z_2(1 - 2z_1)\right] \mathrm{d}z_1 - \left[z_2^2 + 4z_1 - 9z_1^2 + 2\alpha z_2(1 - 2z_1)\right] \mathrm{d}z_2. \tag{1}$$

Le but de cette Note est de décrire la famille de champs de vecteurs quadratiques homogènes de $\mathbb{C}^3$ qui est linéairement engendrée par les champs

$$X_0 = \left(-3z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_3\right)\frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2(-3z_1 + 2z_3)\frac{\partial}{\partial z_2} + 2z_3(3z_1 - z_3)\frac{\partial}{\partial z_3}, \tag{2}$$

$$X_\infty = 2z_2(-z_1 + z_3)\frac{\partial}{\partial z_1} + \left(3z_1^2 - z_2^2\right)\frac{\partial}{\partial z_2} + 2z_3 z_2\frac{\partial}{\partial z_3}. \tag{3}$$

Soit $X_\alpha = X_0 + \alpha X_\infty$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$. La projection standard $\Pi : \mathbb{C}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{CP}^2$ envoie les orbites de X_α sur les feuilles de $\mathcal{F}_2(\alpha)$.

Les exemples de Lins Neto sont des exemples de *feuilletages*. La famille qu'on considère fournit des exemples de *champs de vecteurs* en ce sens que les paramétrisations naturelles des orbites jouent un rôle central. Notre résultat est le suivant :

THÉORÈME 1. – *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, ω une racine primitive sixième de l'unité et soit $\Lambda_3 \subset \mathbb{C}$ le réseau engendré par* $\{1, \omega\}$ (*il ne dépend pas du choix de* ω). *Alors,*

(i) *Toutes les solutions de X_α sont uniformes. Le domaine de définition de celles-ci est $\mathbb{C} \backslash \Omega$, où Ω est un ensemble discret* (*qui dépend des conditions initiales*) *où les solutions ont des pôles* (*on dira que X_α a des solutions méromorphes globales*).

(ii) *Le champ X_α est complètement intégrable si et seulement si $(\alpha - 1)/2 = \lambda_1/\lambda_2$ pour $\lambda_i \in \Lambda_3$. En particulier, si $\alpha \in \mathbb{R}$, X_α est complètement intégrable si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Il est intéressant de comparer ces résultats avec ce qui se passe en dimension 2, où tous les champs de vecteurs quadratiques homogènes de $\mathbb{C}^2$ qui ont des solutions méromorphes globales sont complètement

Pour citer cet article : A. Guillot, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 747–750

intégrables et ne sont qu'en nombre dénombrable (à changement linéaire de variables près) [2]. La famille X_α donne aussi des contre-exemples à la conjecture suivante, qui est avancée dans [1] sous le nom de *conjecture de Painlevé* : *Tout champ de vecteurs polynomial dans* $\mathbb{C}^n$ *ayant des solutions méromorphes globales est complètement intégrable*.

Bien sûr, la nature des solutions de X_α n'est pas sans relation avec la dynamique du feuilletage $\mathcal{F}_2(\alpha)$. On verra que le champ X_α est complètement intégrable si et seulement si le feuilletage $\mathcal{F}_2(\alpha)$ a une intégrale première rationnelle. Les résultats qu'on présentera décrivent ces feuilletages comme des quotients de flots linéaires sur un produit de courbes elliptiques. Dans ce contexte, ces feuilletages sont des analogues complexes des flots linéaires sur le tore réel. Notre étude ne suppose pas la connaissance préalable des résultats de Lins Neto.

1. Préliminaires

On étudiera les champs X_α à partir des champs $\frac{1}{2}X_1$ et X_∞ ($X_\alpha = 2(\frac{1}{2}X_1) + (\alpha - 1)X_\infty$). Notre démarche se base sur le fait que ces deux champs commutent (ceci peut être calculé directement mais une preuve indirecte sera donnée plus loin) et le fait qu'ils sont complètement intégrables. Plusieurs faits seront énoncés sans preuve. Il s'agit de calculs simples et directs.

Soit $E = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. Les champs de vecteurs $\frac{1}{2}X_1$, X_∞ et E forment une algèbre de Lie isomorphe à celle du groupe de similitudes de $\mathbb{C}^2$. Le lieu de dépendance linéaire de ces trois champs est l'union de $\{z_3 = 0\}$ et de la préimage de 0 par le polynôme homogène $Q : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ donné par

$$Q = 9z_1^4 + 6z_1^2z_2^2 + z_2^4 - 4z_1^3z_3 - 12z_2^2z_1z_3 + 4z_2^2z_3^2, \tag{4}$$

comme on peut le vérifier en calculant leur déterminant. Les champs $\frac{1}{2}X_1$ et X_∞ sont colinéaires le long de cinq droites passant par l'origine : celles ayant pour directions $[1:1:2]$, $[1:-1:2]$, $[0:0:1]$ et les deux de la forme $[1:q:0]$ pour $q^2 = -3$. Notons $\mathcal{L}$ l'union de ces droites. Le rang de $\frac{1}{2}X_1$ et X_∞ est 2 dans le complémentaire de $\mathcal{L}$. En restriction à une droite de $\mathcal{L}$, le champ X_α est soit identiquement nul soit conjugué au champ $z^2\frac{\partial}{\partial z}$ (cas générique). Dans les deux cas, les solutions de X_α avec des conditions initiales dans $\mathcal{L}$ sont méromorphes globales.

Considérons, pour $i \in \{1, \infty\}$ et $k \in \{2, 3\}$, les fonctions polynomiales $b_k^i : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, homogènes de degré k, données par

$$\begin{aligned} b_2^1 &= z_3(z_1 - z_2), & b_3^1 &= z_3\bigl(3z_1^2 + z_2^2 - 2z_2z_3\bigr),\\ b_2^\infty &= z_3(-2z_1 + z_3), & b_3^\infty &= z_3\bigl(3z_1^2 - 6z_1z_3 + z_2^2 + 2z_3^2\bigr). \end{aligned} \tag{5}$$

Elles satisfont l'égalité $X_i \cdot b_k^i = 0$. Les champs X_∞ et $\frac{1}{2}X_1$ sont donc complètement intégrables. De surcroît,

$$4\bigl(b_2^1\bigr)^3 - \bigl(b_3^1\bigr)^2 = 4\bigl(b_2^\infty\bigr)^3 - \bigl(b_3^\infty\bigr)^2 = -z_3^2Q. \tag{6}$$

Le polynôme $-z_3^2Q$ est une intégrale première commune aux champs X_α en vertu de cette relation. L'homogénéité de ce dernier nous permet de restreindre notre étude aux sous-variétés irréductibles et invariantes $\mathcal{S} = \{-z_3^2Q = 1\}$, $\mathcal{R} = (\{Q = 0\}\backslash\mathcal{L})$ et $\mathcal{Z} = (\{z_3 = 0\}\backslash\mathcal{L})$. Chacune de ces trois variétés est munie de deux champs de vecteurs linéairement indépendants qui commutent. Avec $\mathcal{L}$, elles forment une partition de $\mathbb{C}^3$. On prouvera la partie (i) du théorème sur chacune de ces variétés et la partie (ii) sur le saturé de $\mathcal{S}$ par E.

2. Les champs sur $\mathcal{S}$

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ le réseau qui a une fonction $\wp$ de Weierstrass telle que $(\wp')^2 = 4\wp^3 - 1$. Il s'agit d'un multiple de Λ_3. À travers $\wp$ et $\wp'$, on identifiera $\mathbb{C}/\Lambda$ à la variété algébrique $\{4x^3 - y^2z = z^3\} \subset \mathbb{CP}^2$. Considérons l'application $\Phi : \mathcal{S} \to \mathbb{C}^2/\Lambda^2$ donnée par $(z_1, z_2, z_3) \mapsto ([b_2^1 : b_3^1 : 1], [b_2^\infty : b_3^\infty : 1])$. L'image de $\mathcal{S}$ est le complémentaire de $(\{[1:0:0]\} \times \mathbb{C}/\Lambda) \cup (\mathbb{C}/\Lambda \times \{[1:0:0]\})$. Les orbites de X_∞ et $\frac{1}{2}X_1$ s'identifient aux fibres horizontales et verticales du produit. Soit $\psi(t) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ une solution (quelconque) de X_∞. Notons $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^3$ l'image de ψ. Soit $y(t) = b_2^\infty \circ \psi$. On a $(y')^2 = 4y^3 + z_3^2 Q \circ \psi$. Via Φ, qui est injective car $\wp$ et $\wp'$ séparent les points de $\mathbb{C}/\Lambda$, le triplet $[\mathcal{C}, X_\infty|_{\mathcal{C}}, b_2^1(t)]$ s'identifie à un ouvert de $[\mathbb{C}/\Lambda, \frac{\partial}{\partial w}, \wp(w)]$. On a les mêmes relations pour $\frac{1}{2}X_1$ et b_2^∞. De ce fait, la variété $\mathcal{S}$ avec le couple de champs de vecteurs $(\frac{1}{2}X_1, X_\infty)$ s'identifie à un ouvert de $\mathbb{C}^2/\Lambda^2$ avec le couple $\left(\frac{\partial}{\partial w_1}, \frac{\partial}{\partial w_2}\right)$ et, en particulier, ces deux champs sur $\mathcal{S}$ commutent. La partie (ii) du théorème est une conséquence de la

PROPOSITION 2. – *Le champ* $c_1\frac{\partial}{\partial w_1} + c_2\frac{\partial}{\partial w_2}$ *sur* $\mathbb{C}^2/\Lambda_3^2$ *a une intégrale première méromorphe si et seulement si* $c_1/c_2 = \lambda_1/\lambda_2$ *avec* $\lambda_i \in \Lambda_3$.

Démonstration. – Soient π_1 et π_2 les projections sur les deux facteurs de $\mathbb{C}^2/\Lambda_3^2$, $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2/\Lambda_3^2$ une solution de $c_1\frac{\partial}{\partial w_1} + c_2\frac{\partial}{\partial w_2}$. Premièrement, $\pi_i \circ \psi(t) = \pi_i \circ \psi(t+\kappa)$ si et seulement si $\kappa \in c_i\Lambda_3$ (pour $i = 1, 2$). Si $\lambda_0 \in c_1\Lambda_3 \cap c_2\Lambda_3$ alors $\omega\lambda_0 \in c_1\Lambda_3 \cap c_2\Lambda_3$ et si $\lambda_0 \neq 0$, $c_1\Lambda_3$ et $c_2\Lambda_3$ ont un sous-réseau en commun et, dans ce cas, toutes les orbites de $c_1\frac{\partial}{\partial w_1} + c_2\frac{\partial}{\partial w_2}$ sont fermées. Si $c_1\Lambda_3 \cap c_2\Lambda_3 = \{0\}$ alors l'ensemble $\pi_1 \circ \psi(c_2\Lambda_3)$ est dense dans $\mathbb{C}/\Lambda_3$. Ceci prouve la proposition. □

L'action de ω sur $\mathcal{S}$ par homothéties préserve les orbites du champ X_α. L'application $\Pi|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathbb{CP}^2$ est un revêtement à six feuillets sur son image. Les orbites de X_α descendent sur les feuilles de $\mathcal{F}_2(\alpha)$.

3. Les champs sur $\mathcal{R}$ et sur $\mathcal{Z}$

Notre démarche sera tout à fait analogue. Cette fois-ci, les champs, tant sur $\mathcal{R}$ que sur $\mathcal{Z}$, s'identifieront aux champs coordonnées de $\mathbb{C}^2$. Considérons l'application $\Phi : (\mathcal{R} \cup \mathcal{Z}) \to \mathbb{C}^2$ donnée par

$$\Phi(z_1, z_2, z_3) = \left(b_2^1/b_3^1, b_2^\infty/b_3^\infty\right). \tag{7}$$

Cette application est bien définie, car en restricion à $\mathcal{R} \cup \mathcal{Z}$, la nullité de b_2^i/z_3 implique celle de b_3^i/z_3 (pour $i = 1, \infty$) et de plus,

$$\left(\{b_2^\infty/z_3 = 0\} \cap \{b_3^\infty/z_3 = 0\}\right) \subset \mathcal{L}, \qquad \left(\{b_2^1/z_3 = 0\} \cap \{b_3^1/z_3 = 0\}\right) \subset \mathcal{L}.$$

Soit $\psi(t)$ une solution (quelconque) de X_∞. Soit $y(t) = (b_2^1/b_3^1) \circ \psi$. On a $y' = 1/2 - [3z_3^2 Q/2(b_3^1)^2] \circ \psi$. Si $\psi(t) \subset \mathcal{R}$, cette relation donne $y' = 1/2$. Si $\psi(t) \subset \mathcal{Z}$, on a $y' = -1$, car $[z_3^2 Q/(b_3^1)^2]|_{\mathcal{Z}} = 1$. L'image de X_∞ en restriction à $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{Z}$ est donc un multiple (constant) de $\frac{\partial}{\partial w_1}$. Les mêmes relations ont lieu si l'on remplace X_∞ par $\frac{1}{2}X_1$, $\frac{\partial}{\partial w_1}$ par $\frac{\partial}{\partial w_2}$, etc. Il nous reste à prouver que, tant en restriction à $\mathcal{R}$ qu'en restriction à $\mathcal{Z}$, l'application Φ est injective. Commençons par $\mathcal{R}$. L'application $\Gamma : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \to \{Q = 0\} \backslash \{\mathbb{C} \cdot (0,0,1)\}$ donnée par $\Gamma(\rho, \beta) = \beta \cdot (4[\rho^2 + 1], -8\rho, [\rho^2 + 3]^2)$ est un biholomorphisme. Un calcul simple montre que $\Phi \circ \Gamma = [4\beta(3+\rho^2)(\rho^2 - 1)]^{-1} \cdot (\rho - 1, 2)$. On peut faire de même pour $\mathcal{Z}$ en considérant l'application $\Gamma'(\rho, \beta) = \beta \cdot (1, \rho, 0)$. On trouve $\Phi \circ \Gamma' = -[\beta(3+\rho^2)]^{-1} \cdot (\rho - 1, 2)$. Puisque l'inverse de Φ est rationnelle, les solutions de X_α avec des conditions initiales dans $\mathcal{R} \cup \mathcal{Z}$ le sont aussi. Toutes les solutions de X_α sont donc méromorphes globales.

Remerciements. L'auteur remercie Étienne Ghys, qui a dirigé la thèse dont ces résultats font partie.

Références bibliographiques

[1] N. Ercolani, E.D. Siggia, Painlevé property and integrability, in: What is Integrability?, Springer, Berlin, 1991, pp. 63–72.

[2] É. Ghys, J.-C. Rebelo, Singularités des flots holomorphes, II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 47 (4) (1997) 1117–1174. Erratum op. cit. 50 (3) (2000) 1019–1020.

[3] A. Lins Neto, Some examples for Poincaré and Painlevé problems, Prépublication, 2000.