C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 797–801

Probabilités/*Probability Theory*

Grandes déviations du temps local du mouvement brownien fractionnaire *

El Hassan Lakhel

Laboratoire de probabilités et de statistique, Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences, Semlalia, BP 2390, Marrakech, Maroc

Reçu le 27 novembre 2001 ; accepté après révision le 19 février 2002

Note présentée par Marc Yor.

Résumé L'objet de cette Note est d'établir un principe de grandes déviations pour le temps local du mouvement brownien fractionnaire B^H pour tout $H \in (0, 1)$. ***Pour citer cet article : E.H. Lakhel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 797–801.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Large deviations for the fractional Brownian local time

Abstract The purpose of this paper is to prove a large deviation principle for a local time of fractional Brownian motion B^H for all $H \in (0, 1)$. ***To cite this article: E.H. Lakhel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 797–801.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Local time has been an important subject of study in probability. According to Berman [1], the smoothness of the local time of a function implies the irregularity of the function itself. This principle has been verified for a large class of stochastic processes. For this reason, local time, besides its own importance, has served as a useful tool in studying fractal proprerties of the sample paths for Gaussian processes. In the case of the fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in]0, 1[$, the local time, defined as the density of the occupation measure $\Gamma \mapsto \int_0^t \mathbf{1}_\Gamma(B_s^H)\,\mathrm{d}s$ and denoted λ_t^a, exists and it has a continuous version in the variables a and t (*see* Berman [1] and Geman and Horowitz [2]). More precisely (*see* Table 2 in [2]), the local time λ_t^a has Hölder continuous paths of order $\delta < 1 - H$ in time, and order $\gamma < \frac{1-H}{2H}$ in the space variable, provided $H \geqslant \frac{1}{3}$. If $H < \frac{1}{3}$ the local time is absolutely continuous in a, it is continuously differentiable if $H < \frac{1}{5}$, with increasing smoothness when H decreases. We recall first the result concerning the classical Brownian motion $B = B^H$ where $H = \frac{1}{2}$. It has been shown (*see* Roynette [7]) that the local time of the Brownian motion satisfies a large deviation principle. We seek to generalise this result to the case of fractional Brownian motion for all $H \in (0, 1)$.

Adresse e-mail : lakhel@ucam.ac.ma (E.H. Lakhel).

S1631-073X(02)02342-7/FLA

1. Introduction

Pour $H \in]0,1[$, le mouvement brownien fractionnaire B^H de paramètre de Hurst H est l'unique processus Gaussien centré, de noyau de covariance $R_H(s,t) = \frac{V_H}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H})$, avec $V_H = \frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}$ et $\Gamma(p) = \int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-v} v^{p-1}\,\mathrm{d}v$.

Remarquons que pour $H = \frac{1}{2}$, $B^{1/2}$ est le mouvement brownien usuel.

Les techniques classiques permettent de montrer que B^H admet une version continue dont les trajectoires ne sont presque sûrement höldériennes que pour des ordres strictement inférieurs à H. Par conséquent, plus H est petit, plus les trajectoires sont irrégulières ; ce phénomène semble dû à ce que les accroissements, qui sont stationnaires pour toutes les valeurs de H, sont positivement corrélés dans le cas $H > \frac{1}{2}$ et négativement corrélés dans le cas $H < \frac{1}{2}$. L'une des propriétés du mouvement brownien fractionnaire de paramètre H est son auto-similarité : le processus $\{B^H_{\alpha t},\ t \geqslant 0\}$ a la même loi que le processus $\{\alpha^H B^H_t,\ t \geqslant 0\}$, cette dernière propriété justifie l'intérêt de ce processus pour les modélisations de fluctuations boursières ou de trafic dans les réseaux de télécommunications [3]. Le processus B^H pour $H \neq \frac{1}{2}$ n'est pas une semi-martingale, on ne peut donc lui appliquer le calcul stochastique usuel. Pour tout $t > 0$ on définit la mesure aléatoire $\Gamma \mapsto \int_0^t \mathbf{1}_\Gamma(B^H_s)\,\mathrm{d}s$ (où Γ est un borélien de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{1}_\Gamma$ est la fonction indicatrice de Γ). Il est bien connu d'après Berman [1] et Geman et Horowitz [2] que cette mesure admet une densité notée λ^a_t par rapport à la mesure de Lebesgue ; $\{\lambda^a_t,\ t \geqslant 0,\ a \in \mathbb{R}\}$ est appelé famille des temps locaux associée à B^H, de plus λ^a_t admet une version p.s. continue (en t et a) et λ^a_t vérifie la formule de densité d'occupation suivante : $\int_0^t f(B^H_s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda^x_t\,\mathrm{d}x$ pour toute f borélienne bornée. Dans cette Note nous nous sommes intéressés aux grandes déviations du temps local du mouvement brownien fractionnaire B^H pour tout $H \in (0,1)$, ce qui généralise le résultat de Roynette [7] pour le temps local du mouvement brownien.

2. Préliminaires et notations

Considérons $\mathcal{C}_0([0,1],\ \mathbb{R})$, l'espace de Banach des fonctions continues, nulles en 0, muni de la norme uniforme, P_H l'unique mesure sur cet espace qui fait du processus canonique $W_t : \omega \mapsto W_t(\omega) = \omega(t)$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre H et $\{\mathcal{F}^H_t,\ t \in [0,1]\}$ la filtration canonique, i.e. $\mathcal{F}^H_t = \sigma\{W_s,\ s \leqslant t\} \vee \mathcal{N}_H$ où $\mathcal{N}_{\mathcal{H}}$ est l'ensemble des P_H-négligeables. Notons $\mathcal{H}_H$ l'espace de Cameron-Martin associé à $(\mathcal{C}_0([0,1]), P_H)$, nous avons la caractérisation suivante :

THÉORÈME 2.1 (Decreusefond–Üstünel [4]). – *$\mathcal{H}_H$ est l'ensemble des fonctions h qui peuvent s'écrire sous la forme* :

$$h(t) = \int_0^t K_H(t,r)g(r)\,\mathrm{d}r \quad \textit{avec } g \in \mathrm{L}^2\big([0,1]\big)$$

et K_H défini par :

$$K_H(t,r) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} F\left(H - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - H, H + \frac{1}{2}, 1 - \frac{t}{r}\right)(t-r)^{H-1/2},$$

où $F(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ est la fonction hypergéométrique, prolongement analytique de l'intégrale :

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-\tau u)^{-\beta}\,\mathrm{d}u.$$

Nous noterons dorénavant par $\dot{h}$ l'unique élément de $\mathrm{L}^2([0,1])$ tel que

$$h(t) = \int_0^t K_H(t,r)\dot{h}(r)\,\mathrm{d}r.$$

La norme sur $\mathcal{H}_H$ est définie par $\|h\|_{\mathcal{H}_H} = \|\dot{h}\|_{\mathrm{L}^2([0,1])}$.

On désigne par $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence étroite, ce qui en fait un espace topologique métrique séparable. La formule d'occupation $\int_0^1 h(B_s^H)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} h(y)\lambda(1,y)\,\mathrm{d}y$ montre que la mesure $\lambda(1,y)\,\mathrm{d}y$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Dans tout ce qui suit on identifiera donc la fonction $y \to \lambda(1,y)$ avec un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on fera de même avec la fonction $y \to \lambda^\varepsilon(y) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\lambda(1, y/\sqrt{\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$.

Soient $m \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $m = \psi\,\mathrm{d}x + \nu$ sa décomposition de Radon–Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue. Soient $\psi^+ = \psi\mathbf{1}_{[0,\infty[}$ et $\psi^- = \psi\mathbf{1}_{]-\infty,0[}$. Définissons la fonction $1/\psi^+$ par $1/\psi^+(x)$ si $0 < \psi^+(x) < +\infty$, par 0 sinon, et la fonction $1/\psi^-$ de la même manière. On définit $\mathcal{L} : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{L}(m) = \left(4\int \frac{1}{\psi^+(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\psi^-(x)}\,\mathrm{d}x\right) \wedge \left(4\int \frac{1}{\psi^-(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\psi^+(x)}\,\mathrm{d}x\right).$$

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $\varphi(0) = 0$, φ continue, on note $m = \Theta\varphi$ l'image de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ par φ, soit :

$$\forall h \text{ continue}, \quad \int_0^1 h(\varphi_s)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} h(y)(\Theta\varphi)\,\mathrm{d}y.$$

Soit φ^* la réarrangée croissante de φ ; d'après [6], nous avons les résultats suivants :

- φ^* est non décroissante, $\varphi^*(0) = 0$ et $\Theta\varphi^* = \Theta\varphi$.
- Si $\varphi \in \mathcal{H}_H$, alors $\varphi^* \in \mathcal{H}_H$ et on a $\int_0^1 \dot{\varphi^*}(s)^2\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s$.
- Soit $m = \psi\,\mathrm{d}x + \nu$ sa décomposition de Radon–Nikodym, alors, d'après [6, Appendice 3, p. 78] il n'est pas difficile de voir que $\int_0^1 \dot{\varphi^*}(s)^2\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\psi}(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Grandes déviations

Nous avons le résultat principal suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Soit* Γ *un borélien de* $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. *Alors on a* :

$$-\inf_{m\in\Gamma^0} \mathcal{L}(m) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\lambda^\varepsilon \in \Gamma) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\lambda^\varepsilon \in \Gamma) \leqslant -\inf_{m\in\bar{\Gamma}} \mathcal{L}(m).$$

La démonstration de ce théorème est basée sur le résultat classique suivant :

THÉORÈME 3.2 (Principe de contraction). – *Soit* E *un espace métrique séparable,* μ_ε $(\varepsilon > 0)$ *une famille de probabiliés sur* E, $I : E \to \mathbb{R}^+$ *tels que* :

(i) I *est s.c.i.*
(ii) $\forall l > 0$, $\{e \in E;\ I(e) \leqslant l\}$ *est un compact.*
(iii) $\forall \Gamma$ *borélien de* E,
alors

$$-\inf_{e\in\Gamma^0} I(e) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\mu_\varepsilon \in \Gamma) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log P(\mu_\varepsilon \in \Gamma) \leqslant -\inf_{e\in\bar{\Gamma}} I(e).$$

Soient maintenant F *un second espace topologique séparable et* $\Theta : E \to F$, *continue. Soit* ν_ε *l'image de* μ_ε *par* Θ *et* $J(f) = \inf_{\{e;\ \Theta(e)=f\}} I(e)$ $(= +\infty$ *si* $\Theta^{-1}(f) = \emptyset)$. *Alors* (F, J, ν_ε) *possède les propriétés* (i), (ii) et (iii).

Démonstration du Théorème 3.1. – Soit $\Theta : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall h \text{ continue}, \quad \int_0^1 h\big(\varphi(s)\big)\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} h(y)(\Theta\varphi)\,\mathrm{d}y.$$

Il est clair que Θ est continue.

Soit μ_ε l'image de la loi du mouvement brownien fractionnaire par la dilatation de $\sqrt{\varepsilon}$. Alors, d'après [8], la famille μ_ε satisfait un principe de grandes déviations, dans l'espace des fonctions continues muni de la norme uniforme, avec la bonne fonction de taux :

$$I(h) = \inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{h}^2(s)\,\mathrm{d}s;\ \dot{h} \in \mathrm{L}^2\big([0,1]\big),\ h(\cdot) = \int_0^{\cdot} K_H(\cdot,s)\dot{h}(s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

D'autre part, la formule d'occupation implique que l'image de μ_ε par Θ est la loi de λ^ε. Ainsi, d'après le principe de contraction $(\mathcal{M}_1, \lambda^\varepsilon, J)$ satisfait un P.G.D. avec la bonne fonction de taux :

$$\begin{aligned} J(m) &= \inf_{\{\varphi;\ \Theta(\varphi)=m\}} I(\varphi) \\ &= \inf_{\{\varphi;\ \Theta(\varphi)=m\}} \inf\left\{\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s;\ \dot{\varphi} \in \mathrm{L}^2,\ \varphi(\cdot) = \int_0^{\cdot} K_H(\cdot,s)\dot{\varphi}(s)\,\mathrm{d}s\right\} \\ &= \frac{1}{2}\inf_{\{\varphi\in\mathcal{H}_H;\ \Theta(\varphi)=m\}} \int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Le Théorème 3.1 sera donc prouvé si l'on montre le :

LEMME 3.3. – $J(m) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(m)$.

Démonstration. – On commence par montrer cette égalité dans le cas $\operatorname{supp} m \subset [0,\infty[$. Notons que $J(m) = +\infty$ si $\Theta^{-1}(m) = \emptyset$ ou si $\Theta^{-1}(m) \cap \mathcal{H}_H = \emptyset$. Soit donc m telle qu'il existe $\varphi \in \mathcal{H}_H$ et $\Theta\varphi = m$ ($\varphi \geqslant 0$ car $\operatorname{supp} m \subset [0,+\infty[$). Soit φ^* la réarrangée croissante de φ. On a donc

$$\varphi^* \in \mathcal{H}_H, \quad \int_0^1 \dot{\varphi}^*(s)^2\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \int_0^1 \dot{\varphi^*}(s)^2\,\mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\psi}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donc $J(m) = \frac{1}{2}\mathcal{L}(m)$ et le lemme est prouvé dans ce cas.

On ne suppose plus que $\operatorname{supp} m \subset [0,\infty[$. Soit comme précédemment $\varphi \in \mathcal{H}_H$ et $\Theta\varphi = m$. Soit $a = \inf_{s\in[0,1]} \varphi(s)$ ($a < 0$ et $\alpha = \inf_s\{\varphi(s) = a\}$). On définit $\varphi^+ = 0 \vee \varphi$, $\varphi_1^- = 0 \wedge \varphi \mathbf{1}_{[0,\alpha]}$ et $\varphi_2^- = 0 \wedge \varphi \mathbf{1}_{[\alpha,1]}$. Soit φ^* obtenue par recollement de :

- la réarrangée décroissante φ_1^{-*} de φ_1^-,
- la réarrangée décroissante φ_2^{-*} de φ_2^- et
- la réarrangée croissante φ^{+*} de φ^+.

Il est clair que $\Theta\varphi^* = \Theta\varphi$ et qu'en passant de φ à φ^* on a diminué $\int_0^1 \dot{\varphi}^2(s)\,\mathrm{d}s$.

On a donc :

$$\inf_{\Theta\varphi=m} \int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s = \inf_{\{\rho;\ 0\leqslant\rho\leqslant\psi^-\}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\psi^+}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\psi^- - \rho}(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Mais : $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\rho}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\psi^- - \rho}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\psi^-}{\rho(\psi^- - \rho)}(x)\,\mathrm{d}x$. Posons $\rho(x) = k(x)\psi^-(x)$ $(0 \leqslant k(x) \leqslant 1)$; on a $\int \frac{\psi^-}{\rho(\psi^- - \rho)}(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\psi^- k(1-k)}(x)\,\mathrm{d}x$. Il est alors clair que cette quantité est minimum quand $k(x)(1-k(x))$

est maximum. Elle vaut alors $\frac{1}{4}$. Par conséquent :

$$\inf_{\Theta\varphi=m}\int_0^1 \dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s = \int \frac{1}{\psi^+}(x)\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{\psi^-}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette formule a été obtenue lorsque φ atteint son minimum avant d'atteindre son maximum. D'où le lemme et sa forme symétrique dans la situation générale. □

COROLLAIRE 3.4 (Varadhan). – *Soit $\phi : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, ϕ continue et minorée. Alors* :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{-\phi(\lambda^\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right] = -\inf_{m\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})}\big(\mathcal{L}(m)+\phi(m)\big).$$

La démonstration de ce corollaire est classique à partir du (Théorème 2.1.10, *voir* [5]). □

Remarque 3.5. – Si on prend dans le corollaire précédent $\phi(\mu) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\,\mathrm{d}\mu(s)$, f borélienne bornée. Alors, l'application du Corollaire 3.4 coïncide avec le principe classique de grandes déviations pour B^H. En effet :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp(\frac{-1}{\varepsilon}\phi\big(\lambda^\varepsilon\big)\right] &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\lambda\left(1,\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\,\mathrm{d}x\right)\right]\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)\int_0^1 f\big(\sqrt{\varepsilon}B_s^H\big)\,\mathrm{d}s\right]\\ &= -\left(\inf_{\{\varphi\in\mathcal{H}_H\}}\frac{1}{2}\int_0^1\dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}} f\big(\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -\inf_{\{\varphi\in\mathcal{H}_H;\ \Theta(\varphi)=m\}}\left\{\frac{1}{2}\int_0^1\dot{\varphi}(s)^2\,\mathrm{d}s + \int_{\mathbb{R}} f(x)m(\mathrm{d}x)\right\}\\ &= -\inf_{m\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})}\big(\mathcal{L}(m)+\phi(m)\big).\end{aligned}$$

[*] Cette Note a été rédigée au moment où l'auteur était en visite au département de Probabilités Nancy I (France), dans le cadre de l'action intégrée MA/01/02.

Acknowledgement. I wish to thank Professor Bernard Roynette for his useful remarks.

Références bibliographiques

[1] S. Berman, Local nondeterminism and local time of Gaussian processes, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973) 69–94.
[2] D. Geman, J. Horowitz, Occupation densities, Ann. Probab. 8 (1980) 1–6.
[3] R. Coelho, L. Decreusefond, Video correlated traffic models communications networks, in: Proc. to the ITC Seminar on Telegraphic Management, 1995.
[4] L. Decreusefond, A.S. Uštünel, Stochastic analysis of the fractional Brownian motion, Potential Anal. 10 (1997) 177–214.
[5] J.D. Deuschel, D. Stroock, in: Large Deviations, Academic Press, San Diego, 1989.
[6] J.M. Coron, The continuity of rearrangement in $W^{1,p}(\mathbb{R})$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 11 (1984) 57–85.
[7] B. Roynette, Grandes déviations du temps local brownien, C. R. Acad. Paris, Série I 314 (1992) 855–858.
[8] C. Tudor, C. Apdo, On the large deviations for S.D.E. driven by a fractional Brownian motiom, Preprint.