C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 739–742

Théorie des groupes/*Group Theory*

Une suite spectrale de Hochschild–Serre pour l'uniformisation de Rapoport–Zink

Laurent Fargues

Institut de mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Denis Diderot, case postale 7012, 2, place Jussieu, 75251 Paris cedex, France

Reçu le 18 octobre 2001 ; accepté le 20 février 2002

Note présentée par Jean-Marc Fontaine.

Résumé Nous exposons dans cette Note les résultats constituant la première partie d'un programme visant à généraliser les articles [5,7] et ainsi construire des correspondances de Langlands locales pour d'autres groupes que GL_n (par exemple des groupes unitaires quasidéployés) dans la cohomologie ℓ-adique des espaces de Rapoport–Zink. La méthode consiste à comparer la cohomologie de ces objets locaux à celle d'objets globaux : les variétés de Shimura. Pour cela nous généralisons les suites spectrales établies dans [5] et [4]. Une partie de ces résultats est mentionnée dans [6]. ***Pour citer cet article : L. Fargues, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 739–742.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

An Hochschild–Serre spectral sequence for the Rapoport–Zink uniformization

Abstract In this Note we announce results concerning the first part of a programme intending to generalize the articles [5,7] and thus construct local Langlands correspondences for groups other than GL_n (for example, quasisplit unitary groups) inside the ℓ adic cohomology of Rapoport–Zink spaces. The method consists in comparing the cohomology of these local objects with that of global objects: Shimura varieties. For this we generalize the spectral sequences constructed in [5] and [4]. A part of these results is quoted in [6]. ***To cite this article: L. Fargues, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 739–742.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Variétés de Shimura de type P.E.L.

Soit $\mathcal{D} = (B, *, V, \langle\cdot,\cdot\rangle, h)$ une donnée de Shimura de type P.E.L. non ramifiée en p [10]. Soit $G/\mathbb{Q}$ le groupe réductif associé et E le corps réflexe de $\mathcal{D}$. À $K \subset G(\mathbf{A}_f)$ un sous-groupe compact ouvert suffisamment petit est associé une variété de Shimura Sh_K définie sur E, vérifiant

$$\mathrm{Sh}_K = \coprod_{\ker^1(\mathbb{Q},G)} \mathrm{Sh}_K(G', X),$$

où $\mathrm{Sh}_K(G', X)$ est le modèle canonique sur E d'une variété de Shimura associée à G', une forme intérieure de G [10]. Soit ρ une représentation algébrique de dimension finie de G sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ ($\ell \neq p$) et $\mathcal{L}_\rho$ le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ système local sur $(\mathrm{Sh}_K)_K$ associé [10]. Nous allons nous intéresser à la restriction du $G(\mathbf{A}_f) \times \mathbf{Gal}(\overline{E}|E)$-module admissible $\varinjlim_K H^\bullet(\mathrm{Sh}_K \times_E \overline{E}, \mathcal{L}_\rho)$ à un groupe de décomposition en une place $v|p$.

S1631-073X(02)02340-3/FLA

2. Stratification de la fibre spéciale

Fixons un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ et soit $v|p$ la place de E associée. Pour $K = K^p K_p$ avec $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ compact hyperspécial il existe un modèle entier lisse S_K de la variété de Shimura défini sur $\mathcal{O}_{E_v}$. C'est un espace de modules de variétés abéliennes munies d'une polarisation et d'une action d'un ordre de B. La fibre spéciale $\overline{S}_K = S_K \times_{\mathcal{O}_{E_v}} k(v)$ de ce modèle entier est stratifiée par le polygone de Newton muni de structures additionnelles du schéma abélien universel [14,9,11] : $\overline{S}_K = \coprod_{b \in B(G,\mu)} \overline{S}_K(b)$, où $B(G,\mu)$ est l'ensemble des classes d'isogénies de groupes p-divisibles munis de structures additionnelles sur $\overline{k(v)}$ dont le polygone de Newton vérifie le théorème de Mazur tel qu'il est généralisé dans [14].

3. Espaces de Rapoport–Zink

A $b \in B(G,\mu)$ est associé une donnée de type P.E.L. locale $(V_{\mathbb{Q}_p}, B_{\mathbb{Q}_p}, *, \langle\cdot,\cdot\rangle, b, \mu)$ ([15]) et donc un espace de modules de groupes p-divisibles rigidifiés $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ qui est un schéma formel sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ où $\breve{E}$ désigne le complété de l'extension maximale non ramifiée de E_v. Il lui est également associé une tour d'espaces analytiques lisses au sens de Berkovich $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{an}}_{K_p}(b,\mu))_{K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)}$ au-dessus de la fibre générique de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$. Cette tour classifie les structures de niveau K_p sur le module de Tate du groupe p-divisible rigide universel. Elle est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p)$ où J_b, une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique rationnel de $G_{\mathbb{Q}_p}$, est le groupe des automorphismes de l'isocristal muni de structures additionnelles associé à b. Le système des $(H_c^{\bullet}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(b,\mu) \hat{\otimes}_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}))_{K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)}$ (cohomologie ℓ-adique à support compact des espaces analytiques de [2] et [1], confère également [8]) est muni d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_{E_v}$ où l'inertie de W_{E_v}, c'est à dire $\mathbf{Gal}(\overline{\breve{E}}|E)$, agit sur l'extension des scalaires de $\breve{E}$ à $\mathbb{C}_p$ et où le Frobenius agit via la donnée de descente de Rapoport–Zink [15]. La proposition suivante résulte alors des travaux de Berkovich [3,1] :

PROPOSITION 1. – *L'action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_v}$ sur les espaces de cohomologie précédents est lisse.*

Nous ferons désormais l'abus de confondre le groupe algébrique J_b et ses points $J_b(\mathbb{Q}_p)$.

4. Un résultat de finitude

Le théorème suivant est une généralisation de la dernière partie de la démonstration du Théorème 6.30 de [15] aux espaces de Rapoport–Zink associés à des classes non forcément basiques.

THÉORÈME 1. – *Il existe un ouvert quasicompact U de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ tel que $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu) = U.J_b$.*

La démonstration repose essentiellement sur le Lemme 9 de [17] (à comparer avec le théorème de Katz utilisé dans [15], Théorème 6.30).

Remarque. – En reformulant l'énoncé dans l'esprit de [13] on peut formuler ce résultat comme un théorème de finitude de l'action de J_b sur un sous-ensemble de l'immeuble de G sur $\breve{E}$.

Ce théorème a pour conséquence au niveau de la cohomologie des espaces de Rapoport–Zink le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. – *Pour tout K_p et tout $j \in \mathbb{N}$,*

$$H_c^j\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(b,\mu)_{\mathbb{C}_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}\big)$$

est un J_b-module de type fini.

Duquel on déduit :

COROLLAIRE 2. – *Soit b basique, soit π une représentation admissible de J_b possédant un caractère central (par exemple π irréductible) alors,*

$$\forall K_p, i, j, \quad \dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} \operatorname{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}\big(H^j_c\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(b,\mu)_{\mathbb{C}_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}\big), \pi\big) < +\infty$$

et donc $\varinjlim_{K_p} \operatorname{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}(H^j_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(b,\mu)_{\mathbb{C}_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi)$ *est un* $G(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_v}$*-module admissible.*

Remarque. – Il résulte des constructions de [16] que pour i supérieur au rang semi-simple de J_b, j et K_p quelconques, b basique et π lisse, les groupes d'extension ci dessus sont nuls.

5. Uniformisation de Rapoport–Zink

Soit ϕ une classe d'isogénie de triplet (A, λ, ι) où A est une variété abélienne sur $\overline{k(v)}$, λ une polarisation première à p et ι l'action d'un ordre de B (le tout soumis à certaines conditions, confère [15]).

À une classe d'isogénie de variétés abéliennes est associée une classe d'isogénie de groupes p-divisibles. À ϕ est donc associé un $b \in B(G,\mu)$. Soit $I^\phi = \operatorname{Aut}(A,\lambda,\iota)$ le groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ associé [15]. Il y a un plongement $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ déduit de l'action d'un automorphisme d'un triplet sur sa cohomologie cristalline et sur sa cohomologie ℓ adique pour $\ell \neq p$ [15].

D'après [15] il y a des isomorphismes compatibles d'espaces analytiques pour $K = K_p K^p$ variant : $I^\phi(\mathbb{Q})\backslash(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(b,\mu) \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi)$, où $\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi)$ est un ouvert analytique dans la fibre générique de la variété de Shimura. Il est défini comme image réciproque par le morphisme de changement de niveau de K_p à un niveau compact hyperspécial en p d'un tube au dessus d'une famille de sous-schémas fermés de la fibre spéciale de la variété de Shimura.

6. Suites spectrales

Récrivons l'isomorphisme d'uniformisation sous une forme équivalente mais plus suggestive pour la suite : $(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(b,\mu) \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash(J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p))/J_b \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi)$. Nous démontrons l'existence d'une suite spectrale du type Hochschild–Serre pour ce quotient. Mais avant donnons une définition :

DÉFINITION 1. – Rappelons que ρ est une représentation algébrique de dimension finie de G sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Notons $\mathcal{A}^\phi_\rho$ l'espace des fonctions lisses à droite de $J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ dans l'espace de ρ (un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ espace vectoriel de dimension finie) se transformant via ρ par l'action à gauche de $I^\phi(\mathbb{Q})$ où $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell) \subset G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Cet espace de « formes automorphes » est un $J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$-module lisse et, pour $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$, $(\mathcal{A}^\phi_\rho)^{K^p}$ est l'espace des formes de niveau inférieur à K^p.

Remarque. – Supposons que b soit la classe basique et fixons un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \mathbb{C}$. L'espace $\mathcal{A}^\phi_\rho$ est alors l'espace des formes automorphes sur I^ϕ de type ρ à l'infini où I^ϕ est une forme intérieure de G vérifiant : $\forall \ell \neq p, \infty$, $I^\phi(\mathbb{Q}_\ell) = G(\mathbb{Q}_\ell)$, $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b$ et $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme intérieure compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$.

Le théorème principal est alors le suivant :

THÉORÈME 2. – *Il y a une suite spectrale* $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_v}$*-équivariante* :

$$E_2^{ij} = \varinjlim_{K = K_p K^p} \operatorname{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}\big(H^{2N-j}_c\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(b,\mu) \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}\big)(N), \big(\mathcal{A}^\phi_\rho\big)^{K^p}\big) \Longrightarrow \varinjlim_K H^{i+j}\big(\mathrm{Sh}^{\mathrm{an}}_K(\phi), \mathcal{L}_\rho\big),$$

où $N = \dim \mathrm{Sh}$ *et où l'action de* $G(\mathbf{A}_f) = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbf{A}_f^p)$ *sur* E_2^{ij} *se fait sur la première composante du* Ext *via* $G(\mathbb{Q}_p)$ *et sur la seconde via* $G(\mathbf{A}_f^p)$.

Nous supposerons désormais que b est basique. La strate basique est alors non vide (il s'agit d'un théorème). Nous supposerons également, afin de pouvoir appliquer les résultats de [10], que G est une forme de produit de groupes linéaires ou une forme de produit de groupes symplectiques.

Supposons ρ irréductible et notons $\mathcal{T}(I^\phi)$ l'ensemble des représentations automorphes de I^ϕ. Commençons par donner une définition :

DÉFINITION 2. – On note $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_v})$ le groupe formé des sommes formelles $\sum_\Pi a_\Pi\,[\Pi]$ où les Π sont des représentations irréductibles de $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_v}$ dans des $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espaces vectoriels vérifiant : pour tout sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbf{A}_f)$, Π^K est un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel de dimension finie sur lequel W_{E_v} agit continûment pour la topologie ℓ-adique. On suppose de plus que pour un tel K il n'existe qu'un nombre fini de a_Π non nuls tels que $\Pi^K \neq 0$.

On montre alors en utilisant le théorème précédent et des résultats de Kottwitz [10] :

COROLLAIRE 3. – *Il y a une égalité dans* $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_v})$:

$$\sum_{\substack{i,j \\ \Pi\in\mathcal{T}(I^\phi),\ \Pi_\infty=\check{\rho}}} (-1)^{i+j}\Big[\varinjlim_{K_p} \mathrm{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}}\big(H^j_c\big(\check{\mathcal{M}}_{K_p}\otimes\mathbb{C}_p,\overline{\mathbb{Q}_\ell}\big)(N),\Pi_p\big)\Big]\otimes\big[\Pi^p\big]$$
$$=\sum_i(-1)^i\Big[\varinjlim_{K} H^i\big(\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{an}}_{\mathrm{basique}},\mathcal{L}^{\mathrm{an}}_\rho\big)\Big],$$

où $\mathrm{Sh}_K(G,X)^{\mathrm{an}}_{\mathrm{basique}}$ *désigne le tube au dessus de la strate basique et où* ϕ *désigne une classe d'isogénie dans la classe basique.*

Remarque. – Dans le corollaire précédent le groupe I^ϕ ne dépend pas du ϕ choisi dans la strate basique (cela fait partie de la démonstration du corollaire).

Le second terme est un « morceau » de la cohomologie de $\mathrm{Sh}(G,X)$ qui, elle, s'exprime en termes de représentations automorphes de G. La correspondance (conjecturale dans le cas général, mais disponible sous certaines hypothèses d'après [12]) entre représentations automorphes de G et sa forme intérieure I^ϕ couplée à la formule ci-dessus devrait permettre de construire des correspondances de Langlands locales pour $G(\mathbb{Q}_p)$.

Références bibliographiques

[1] V.G. Berkovich, Étale cohomology for p-adic analytic spaces, Notes d'un exposé à Toulouse, Juin 1994.
[2] V.G. Berkovich, Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 78 (1993) 5–161.
[3] V.G. Berkovich, Vanishing cycles for formal schemes, Invent. Math. 115 (3) (1994) 539–571.
[4] G. Faltings, The trace formula and Drinfeld's upper halfplane, Duke Math. J. 76 (2) (1994) 467–481.
[5] M. Harris, Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces; elaboration of Carayol's program, Invent. Math. 129 (1) (1997) 75–119.
[6] M. Harris, Local Langlands correspondences and vanishing cycles on Shimura varieties, in: Proc. E.C.M., 2000.
[7] M. Harris, R. Taylor, On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, Ann. Math. Stud., à paraitre.
[8] R. Huber, A comparison theorem for l-adic cohomology, Compositio Math. 112 (2) (1998) 217–235.
[9] R.E. Kottwitz, Isocrystals with additional structure, Compositio Math. 56 (2) (1985) 201–220.
[10] R.E. Kottwitz, Points on some Shimura varieties over finite fields, J. Amer. Math. Soc. 5 (2) (1992) 373–444.
[11] R.E. Kottwitz, Isocrystals with additional structure. II, Compositio Math. 109 (3) (1997) 255–339.
[12] J.P. Labesse, Cohomologie, stabilisation et changement de base, Astérisque 257 (1999).
[13] J.S. Milne, The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction, in: The Zeta Functions of Picard Modular Surfaces, University Montréal, Montréal, PQ, 1992, pp. 151–253.
[14] M. Rapoport, M. Richartz, On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure, Compositio Math. 103 (2) (1996) 153–181.
[15] M. Rapoport, Th. Zink, Period Spaces for p-Divisible Groups, Ann. of Math. Stud., Vol. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
[16] P. Schneider, U. Stuhler, Representation theory and sheaves on the Bruhat–Tits building, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 85 (1997) 97–191.
[17] Th. Zink, On the slope filtration, Preprint.