C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 779–782

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Limites de fibrés vectoriels dans $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_3}(\mathbf{0},\mathbf{2},\mathbf{0})$

Nicolas Perrin

Mathematisches Institut der Universität zu Köln, Weyertal 86-90, D-50931 Köln, Allemagne

Reçu le 19 décembre 2001 ; accepté après révision le 20 février 2002

Note présentée par Michel Raynaud.

Résumé Soit $\mathbb{Q}_3$ la quadrique lisse de $\mathbb{P}^4$. Dans cette Note, on décrit explicitement l'adhérence de l'ouvert des fibrés vectoriels de rang 2 dans $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_3}(0,2,0)$. On vérifie que les faisceaux du bord satisfont aux propriétés générales énoncés dans [3]. ***Pour citer cet article : N. Perrin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 779–782.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Limits of vector bundles in $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_3}(0,2,0)$

Abstract Let $\mathbb{Q}_3$ be the smooth quadric in $\mathbb{P}^4$. In this Note we describe the closure of the open locus of vector bundles in $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_3}(0,2,0)$. We verify that the boundary sheaves satisfy the general conditions given in [3]. ***To cite this article: N. Perrin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 779–782.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Soit $\mathbb{Q}_3$ la quadrique lisse de dimension 3 de $\mathbb{P}^4$. Dans [2], G. Ottaviani et M. Szurek décrivent l'ouvert $\mathbf{U}$ de l'espace des modules $\mathbf{M}_{\mathbb{Q}_3}(0,2,0)$ formé des fibrés vectoriels de rang 2 et de classes de Chern $(0,2,0)$. Dans cette Note, nous décrivons l'adhérence $\overline{\mathbf{U}}$ de $\mathbf{U}$ dans l'espace $\mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,2,0)$. Nous montrons que le bord est formé de deux composantes irréductibles et qu'elles vérifient les « conditions au bord » énoncées dans [3].

Plus précisément, soit X la variété $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^4}(\Lambda^2\check{\Omega}^1_{\mathbb{P}^4})$ munie de la projection π vers $\mathbb{P}^4$. Notons X_1 (resp. X_2) le fibré en quadriques naturel de $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^4}(\Lambda^2\check{\Omega}^1_{\mathbb{P}^4})$ au dessus de $\mathbb{P}^4$ (resp. le fermé $\pi^{-1}(\mathbb{Q}_3)$). Nous montrons le

THÉORÈME 1. – *La normalisée de la variété $\overline{\mathbf{U}}$ est isomorphe à X.*

Les fermés $\partial\mathbf{U}_1$ et $\partial\mathbf{U}_2$, images respectives de X_1 et X_2, forment les composantes irréductibles du bord de $\mathbf{U}$. Si E est un faisceau général de $\partial\mathbf{U}_1$, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}^2_{\mathbb{Q}_3} \longrightarrow \mathcal{O}_C(1) \longrightarrow 0,$$

où C est une conique lisse de $\mathbb{Q}_3$. Si E est un faisceau général de $\partial\mathbf{U}_2$, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0,$$

où P est un point de $\mathbb{Q}_3$ et E''est réflexif et singulier au point P.

Adresse e-mail : nperrin@mi.uni-koeln.de (N. Perrin).

S1631-073X(02)02339-7/FLA

Démonstration. – Notons V l'espace vectoriel $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)$. Si P est un point de $\mathbb{P}^4$ nous noterons $\mathbb{P}^4 \setminus \{P\} \xrightarrow{p} \mathbb{P}^3$ la projection et $\mathbb{P}^4 \setminus \{P\} \xrightarrow{i} \mathbb{P}^4$ l'immersion ouverte. Notons K le faisceau $\Omega_{\mathbb{P}^4}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1)$ sur $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$. On a la résolution suivante de la diagonale Δ (*voir* [1]) :

$$0 \longrightarrow \Lambda^4\check{K} \longrightarrow \Lambda^3\check{K} \longrightarrow \Lambda^2\check{K} \longrightarrow \check{K} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4\times\mathbb{P}^4} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0.$$

On peut définir le module reflexif $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ (muni de p_1 et p_2) par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^4}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta(1) \longrightarrow 0.$$

Au dessus du point $P \in \mathbb{P}^4$, le faisceau $\mathcal{G}|_{p_1^{-1}(P)}$ s'identifie au faisceau $i_*p^*\Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1)$. Le faisceau $p_{1*}(\underline{\mathbf{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1), \mathcal{G}))$ s'identifie à $\Lambda^2(\Omega^1_{\mathbb{P}^4}(1))$.

Sur $X \times \mathbb{P}_4$ (nous notons encore p_1 et p_2 les projections), on peut définir le faisceau sans torsion $\mathcal{E}$ par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \check{\mathcal{L}}(2) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-1) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{L}$ est le quotient tautologique (de rang 1) de l'image réciproque de $\Lambda^2(\check{\Omega}^1_{\mathbb{P}^4})$ dans X. On vérifie que $\mathcal{E}_x$ est sans torsion pour tout point $x \in X$. Nous noterons (P, s) les points de X où $P \in \mathbb{P}^4$ et $s \in H^0\mathcal{G}(1)|_{p_1^{-1}(P)}$.

FAIT 2. – *On a un isomorphisme* $\mathcal{E}|_{p_1^{-1}(P,s)} = i_*p^*N$ *où* $N \in \mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0, 1, 0)$.

Le faisceau N est soit localement libre (instanton de degré 1) soit donné par le noyau de la flèche de droite dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^3}(1) \longrightarrow \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow \mathcal{O}_{L_s}(1) \longrightarrow 0,$$

où L_s est une droite de $\mathbb{P}^3$. Dans ce cas on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}|_{p_1^{-1}(P,s)} \longrightarrow \mathcal{O}^2_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow \mathcal{O}_{H_s}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0,$$

où H_s est le plan contenant P se projettant sur L_s. Les classes de Chern de ces faisceaux sont constantes, la famille $\mathcal{E}$ est donc plate au dessus de X. Le faisceau $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{X\times\mathbb{Q}_3}$ est encore sans torsion et plat au dessus de X. Ses classes de Chern sont $(0, 2, 0)$. Il définit donc un morphisme

$$f : X \longrightarrow \mathbf{M}_{\mathbb{Q}_3}(0, 2, 0)$$

qui est birationnel sur $\overline{\mathbf{U}}$ ($X \setminus (X_1 \cup X_2)$ s'envoie bijectivement sur $\mathbf{U}$ (*cf.* [2])). Nous allons maintenant calculer la restriction de $\mathcal{E}|_{p_1^{-1}(P,s)}$ à la quadrique $\mathbb{Q}_3$ pour les points de $X_1 \cup X_2$.

PROPOSITION 3. – *Le morphisme* f *identifie* X *à la normalisée de* $\overline{\mathbf{U}}$.

Démonstration. – Il suffit de vérifier (grâce au théorème principal de Zariski) qu'il est injectif sur $X_1 \cup X_2$, c'est-à-dire que le faisceau permet de retrouver le point (P, s). Nous noterons E le faisceau $(\mathcal{E}|_{X\times\mathbb{Q}_3})|_{p_1^{-1}(P,s)}$.

Si $(P, s) \in X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$, alors on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}^2_{\mathbb{Q}_3} \longrightarrow \mathcal{O}_{H_s\cap\mathbb{Q}_3}(1) \longrightarrow 0.$$

La courbe $H_s \cap \mathbb{Q}_3$ est une conique, c'est le lieu singulier du faisceau. Elle permet de retrouver le plan H_s. Les deux sections de $\mathcal{O}_{H_s\cap\mathbb{Q}_3}(1)$ définissent le point P (c'est le lieu d'annulation de $\mathcal{O}^2_{H_s} \to \mathcal{O}_{H_s}(1)$). La projection de H_s par P définit alors la droite L_s qui permet de retrouver la section s.

Si $(P,s) \in X_2$, alors la restriction à $p_1^{-1}(P,s) \cap \mathbb{Q}_3$ de la suite exacte de définition de $\mathcal{G}$ donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}|_{p_1^{-1}(P,s)\cap\mathbb{Q}_3} \longrightarrow H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_3} \longrightarrow \mathcal{I}_{P,\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_3} \longrightarrow 0.$$

Cependant le faisceau $\mathcal{I}_{P,\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_3}$ est une extension de $\mathcal{I}_{P,\mathbb{Q}_3}$ par $\mathcal{O}_P$. Ainsi on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}|_{p_1^{-1}(P,s)\cap\mathbb{Q}_3} \longrightarrow \mathcal{G}|''_{p_1^{-1}(P,s)\cap\mathbb{Q}_3} \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0,$$

où le faisceau $\mathcal{G}|''_{p_1^{-1}(P,s)\cap\mathbb{Q}_3}$ est réflexif. Nous en déduisons la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0,$$

où E'' est réflexif singulier au point P. Le point P est le point singulier de E. Le faisceau i^*E est un fibré vectoriel sur $\mathbb{Q}_3 \setminus \{P\}$. Le faisceau p_*i^*E est le faisceau $N \in \mathbf{M}_{\mathbb{P}^3}(0,1,0)$ (tel que $\mathcal{E}|_{p_1^{-1}(P,s)} = i_*p^*N$), il détermine la section s.

Remarquons que si $(P,s) \in X_1 \cap X_2$, alors E est donné par la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_3} \oplus \mathcal{I}_{C,\mathbb{Q}_3} \longrightarrow \mathcal{O}_P \longrightarrow 0,$$

où $C \subset \mathbb{Q}_3$ est une conique contenant le point P. Ceci termine la démonstration du théorème. □

Remarque 4. – Il est ici facile de construire des déformations explicites, on peut alors montrer qu'un élément général du bord est limite « réduite » de fibrés vectoriels (au sens de [3]). Les limites ci-dessus vérifient les résultats de [3] :

Sur $X_1 \setminus (X_1 \cap X_2)$, le faisceau est localement libre en dehors d'un lieu de dimension pure égale à 1. Il vérifie la condition du théorème 0.1 : le faisceau $\mathcal{O}_C(1) \otimes \mathcal{O}_C(-\frac{3}{2})$ est une théta-caractéristique (le faisceau $\mathcal{O}_C(-\frac{3}{2})$ est une racine de $\omega_{\mathbb{Q}_3}|_C$). Les conditions des Théorèmes 0.3 et 0.4 sont vides dans cet exemple.

Sur $X_2 \setminus (X_1 \cap X_2)$, le faisceau est singulier en un point. De plus on a la composée

$$\mathrm{Hom}\big(E'', \mathcal{O}_P\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\mathcal{G}|''_{p_1^{-1}(P,s)\cap\mathbb{Q}_3}, \mathcal{O}_P\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{P,\mathbb{Q}_3}, \mathcal{O}_P) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_P, \mathcal{O}_P)$$

et l'image de la surjection de E'' dans $\mathcal{O}_P$ (définissant E) est l'élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{P,\mathbb{Q}_3}, \mathcal{O}_P)$ défini par le faisceau $\mathcal{I}_{P,\mathbb{P}^4} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_3}$. Cet élément est nul, c'est la condition du Théorème 0.3.

Remarque 5. – La situation est équivariante sous le groupe SO(5). La variété X peut s'exprimer grâce à la représentation adjointe de ce groupe (dans son algèbre de Lie $\mathfrak{so}(5) = \Lambda^2 V$).

En effet, si $P \in \mathbb{P}^4$, alors on a l'identification : $\Omega^1_{P,\mathbb{P}^4} \simeq V/P$ (on a noté V/P le noyau du morphisme de V dans P). On a alors un morphisme

$$g : X \longrightarrow \mathbb{P}\big(\mathfrak{so}(5)\big)$$

qui à (P,s) associe l'image de $s \in \Lambda^2\Omega^1_{P,\mathbb{P}^4} \simeq \Lambda^2(V/P)$ dans $\Lambda^2 V$. Dans $\mathbb{P}(\mathfrak{so}(5))$ on a un fermé isomorphe à la grassmannienne $\mathbb{G}(2,5)$ des droites de $\mathbb{P}^4$.

FAIT 6. – *Le morphisme $X \to \mathbb{P}(\mathfrak{so}(5))$ est l'éclatement du fermé* $\mathbb{G}(2,5)$.

Démonstration. – L'éclatement est simplement donné par la variété d'incidence

$$I = \left\{ (P, A) \in \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}\big(\mathfrak{so}(5)\big) \mid P \in \mathbb{P}\big(\mathrm{Ker}(A)\big) \right\}.$$

Il suffit de montrer que l'on a une bijection de X dans I. Elle est donnée par la projection de X vers $\mathbb{P}^4$ et le morphisme g. □

Remarquons enfin que l'on peut décrire les deux composantes du bord : le fermé X_1 est le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Le fermé X_2 est l'image réciproque de l'unique orbite fermé dans $\mathbb{P}^4$ (la quadrique $\mathbb{Q}_3$).

Pour une forme symplectique $w \in \Lambda^2 V$ et un point $P_0 \in \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(w))$, on peut décrire le faisceau E associé de la façon suivante : en un point $P \in \mathbb{P}^4$, la fibre du faisceau E est l'espace vectoriel $\langle P, P_0\rangle^{\perp}/\langle P, P_0\rangle$ ($\langle\cdot\rangle$ désigne l'espace vectoriel engendré et $\perp$ l'orthogonal pour la forme symplectique). On voit alors clairement le lieu où E n'est pas localement libre : si w est de rang 2 et $P \in \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(w))$ ou si $P = P_0$ (dans ce cas $E_P = P_0^{\perp}/P_0$).

Remerciements. Je tiens à remercier ici Laurent Gruson pour ses commentaires sur cette note notamment en ce qui concerne la dernière remarque.

Références bibliographiques

[1] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, Vector Bundles on Complex Projective Spaces, Progress Math., Vol. 3, Birkhäuser, Boston, MA, 1980.

[2] G. Ottaviani, M. Szurek, On moduli of stable 2-bundles with small Chern classes on Q_3. With an appendix by Nicolae Manolache, Ann. Mat. Pura Appl. (4) (1994) 167.

[3] N. Perrin, Déformation de fibrés vectoriels sur les variétés lisses de dimension 3, Prépublication disponible sur math.AG/0112199.