C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 721–725

Théorie des nombres/*Number Theory*

Sur le nombre de points algébriques où une fonction analytique transcendante prend des valeurs algébriques

Andrea Surroca

Équipe de théorie des nombres, Institut de mathématiques, Université de Paris VI, case 247, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 13 février 2002 ; accepté le 4 mars 2002

Note présentée par Christophe Soulé.

Résumé On étudie l'ensemble des nombres algébriques de hauteur et de degré bornés où une fonction analytique transcendante prend des valeurs algébriques. ***Pour citer cet article : A. Surroca, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 721–725.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the number of algebraic points where an analytic transcendental function takes algebraic values

Abstract We study the set of algebraic numbers of bounded height and bounded degree where an analytic transcendental function takes algebraic values. ***To cite this article: A. Surroca, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 721–725.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Given a function, f, analytic and transcendental over $\mathbf{C}(z)$, we are interested on the set, S_f, of algebraic points on which f takes algebraic values. For exemple, for the exponential function, $S_f = \{0\}$, and for $f(z) = 2^z$, $S_f = \mathbf{Q}$. We know, from Stäckel ([8,3] and [6], Chapter 3), that there exist entire transcendental functions, which take algebraic value at every algebraic point, i.e., for which $S_f = \overline{\mathbf{Q}}$. In Theorem 1.1, we construct an entire transcendental function f such that, for all $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$, $f(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha)$.

We classify the countable set of all algebraic numbers by the degree and the height. If α is an algebraic number, we denote its degree by $d(\alpha)$, its Mahler mesure by $M(\alpha)$ and its absolute logarithmic height, $\frac{1}{d(\alpha)} \log M(\alpha)$, by $h(\alpha)$.

For $R \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, $r \in \mathbf{R}$ such that $R > r > 0$, and, f a function analytic over $D(0, R)$, for every integer $D \geqslant 1$ and every real $N \geqslant 0$, $\Sigma_{D,N} = \Sigma_{D,N}(f, r)$ will denote the set of numbers $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \cap \overline{D(0, r)}$ such that

$$f(\alpha) \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad \left[\mathbf{Q}\big(\alpha, f(\alpha)\big) : \mathbf{Q}\right] \leqslant D, \quad h(\alpha) \leqslant N \quad \text{and} \quad h\big(f(\alpha)\big) \leqslant N,$$

Adresse e-mail : surroca@math.jussieu.fr (A. Surroca).

S1631-073X(02)02335-X/FLA

and $\sigma_{D,N}$ will denote its cardinal. So, S_f is the union of all $\Sigma_{D,N}$ for$D \geqslant 1$ and $N \geqslant 0$.

THEOREM 0.1. – *Let ϕ be a positive function sucht that $\phi(x)/x$ tends towards 0 when $x \to \infty$. There exists an entire function f transcendental over $\mathbf{C}(z)$, such that*

$$f(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha), \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbf{Q}},$$

and for every integer $D \geqslant 1$, there is an infinite number of reals $N \geqslant 0$, verifying

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}(f,1)\big) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{D(D+1)\phi(N)}.$$

For fixed D and N, this set is finite. In fact, it is contained in the set

$$E_{D,N} = \big\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \mid \big[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}\big] \leqslant D,\ h(\alpha) \leqslant N\big\}$$

which is finite. We denote by $\varepsilon_{D,N}$ its cardinal.

LEMMA 0.2. – *For every integer $D \geqslant 1$ and every real $N \geqslant 0$, the cardinal number $\varepsilon_{D,N}$ of $E_{D,N}$ is such that*

$$\mathrm{e}^{D(D+1)(N-1)} < \varepsilon_{D,N} \leqslant \mathrm{e}^{D(D+1)(N+1)}.$$

The proof is elementary. The upper bound is easy; a more accurate estimate as N tends towards infinity is known [1], but is not explicit. To obtain the lower bound, we count the polynomials in $\mathbf{Z}[X]$ of bounded height which are 2-Eisenstein over the ring $\mathbf{Z}_2$ of 2-adic integers; a more accurate upper bound is given in [5]. It seems that no asymptotic estimate is known ([7], p. 27).

The following result is the main theorem of this paper.

THEOREM 0.3. – *Upper bound for the cardinal number of $\Sigma_{D,N}(f,r)$.*

Let $R \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, $r \in \mathbf{R}$ such that $R > r > 0$, and f a function which is analytic over $D(0,R)$. There is a constant $\gamma > 0$, which depends only on R, r and f, such that, for every integer $D \geqslant 1$, there is an infinite number of reals $N \geqslant 0$ for which

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}(f,r)\big) < \gamma D^3 N^2.$$

Even if we replace the upper bound in Theorem 0.3, by any function $\leqslant \frac{1}{2}\mathrm{e}^{D(D+1)\phi(N)}$, Theorem 0.1 (resp. Theorem 0.3) shows that we cannot replace, in Theorem 0.3 (resp. Theorem 0.1), “there is an infinity of real N” by “for all N large enough”. For the particular case $D = 1$, Elkies ([2], Theorem 4) has shown that, for every $\varepsilon > 0$, there exists a positive constant A_ε such that for every real $N \geqslant 0$, $\operatorname{card}(\Sigma_{1,N}) \leqslant A_\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon N}$.

1. Introduction et résultats

Étant donnée une fonction f analytique et transcendante sur $\mathbf{C}(z)$, on s’intéresse à l’ensemble S_f des points algébriques en lesquels la fonction f prend des valeurs algébriques. Par exemple, pour la fonction exponentielle, $S_f = \{0\}$, et si on pose $f(z) = 2^z$, alors $S_f = \mathbf{Q}$. On sait, d’après Stäckel (*cf.* [8] et aussi [3] et [6], Chapter 3), qu’il existe des fonctions entières et transcendantes, prenant des valeurs algébriques en tous les points algébriques, c’est-à-dire, telles que $S_f = \overline{\mathbf{Q}}$. Dans le Théorème 1.1, on construit une fonction f entière et transcendante vérifiant, pour tout $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$, $f(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha)$.

Nous filtrons l’ensemble dénombrable des nombres algébriques par le degré et la hauteur. Si α est un nombre algébrique, on note $d(\alpha)$ son degré, $M(\alpha)$ sa mesure de Mahler et $h(\alpha) = \frac{1}{d(\alpha)} \log M(\alpha)$ sa hauteur logarithmique absolue.

Pour des nombres $R \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et $r \in \mathbf{R}$ tels que $R > r > 0$, et une fonction f analytique sur $D(0,R)$, on note, pour tout entier $D \geqslant 1$ et tout réel $N \geqslant 0$, $\Sigma_{D,N} = \Sigma_{D,N}(f,r)$ l’ensemble des nombres

$\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \cap \overline{D(0,r)}$ tels que

$$f(\alpha) \in \overline{\mathbf{Q}}, \quad \big[\mathbf{Q}\big(\alpha, f(\alpha)\big) : \mathbf{Q}\big] \leqslant D, \quad h(\alpha) \leqslant N \quad \text{et} \quad h\big(f(\alpha)\big) \leqslant N,$$

et $\sigma_{D,N}$ son cardinal. Ainsi, S_f est la réunion des $\Sigma_{D,N}$ pour $D \geqslant 1$ et $N \geqslant 0$.

THÉORÈME 1.1. – *Soit ϕ une fonction positive telle que $\phi(x)/x$ tende vers* 0 *quand $x \to \infty$. Il existe une fonction f entière et transcendante sur $\mathbf{C}(z)$, vérifiant*

$$f(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha), \quad \forall \alpha \in \overline{\mathbf{Q}},$$

et telle que, pour tout entier $D \geqslant 1$, il existe une infinité de réels $N \geqslant 0$, vérifiant

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}(f,1)\big) \geqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{D(D+1)\phi(N)}.$$

Pour D et N fixés, cet ensemble est fini. En effet, il est contenu dans l'ensemble

$$E_{D,N} = \big\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \mid \big[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}\big] \leqslant D,\ h(\alpha) \leqslant N\big\}$$

qui est fini. Notons $\varepsilon_{D,N}$ son cardinal.

LEMME 1.2. – *Pour tout entier $D \geqslant 1$ et tout réel $N \geqslant 0$, le cardinal $\varepsilon_{D,N}$ de $E_{D,N}$ vérifie*

$$\mathrm{e}^{D(D+1)(N-1)} < \varepsilon_{D,N} \leqslant \mathrm{e}^{D(D+1)(N+1)}.$$

La démonstration est élémentaire. La majoration est facile ; une estimation plus précise quand N tend vers l'infini est connue [1], mais elle n'est pas explicite. Pour la minoration, on compte les polynômes dans $\mathbf{Z}[X]$ de hauteur bornée qui sont 2-Eisenstein sur l'anneau $\mathbf{Z}_2$ des entiers 2-adiques ; une minoration légérement plus précise se trouve aussi dans [5]. Aucune estimation asymptotique ne semble actuellement connue ([7], p. 27).

Le résultat suivant constitue le théorème principal de ce travail.

THÉORÈME 1.3. – *Majoration du cardinal de $\Sigma_{D,N}(f,r)$.*

Soient $R \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ et $r \in \mathbf{R}$ tels que $R > r > 0$, et f une fonction analytique sur $D(0,R)$. Il existe une constante $\gamma > 0$, dépendant uniquement de R, r et f, telle que, pour tout entier $D \geqslant 1$, il existe une infinité de réels $N \geqslant 0$ pour lesquels

$$\operatorname{card}\big(\Sigma_{D,N}(f,r)\big) < \gamma D^3 N^2.$$

Le Théorème 1.1 (resp. Théorème 1.3) montre qu'on ne peut pas remplacer, dans le Théorème 1.3 (resp. Théorème 1.1), « il existe une infinité de réels N » par « pour tout N assez grand », et ceci même pour une borne supérieure allant jusqu'à $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{D(D+1)\phi(N)}$. Pour le cas particulier où $D = 1$, Elkies ([2], Théorème 4) a démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $A_\varepsilon > 0$, telle que, pour tout réel $N \geqslant 0$, $\operatorname{card}(\Sigma_{1,N}) \leqslant A_\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon N}$.

2. Démonstration du Théorème 1.1

Soient ϕ une fonction vérifiant les hypothèses du Théorème 1.1, $(b_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels > 0 et telle que la série $\sum_{k\geqslant 1} b_k$ soit convergente et $x_0 \geqslant 1$ un nombre réel tel que pour tout réel $x \geqslant x_0$,

$$\phi(x) \leqslant x - 1. \tag{1}$$

Soient $(N_\delta)_{\delta\geqslant 1}$ une suite strictement croissante de nombres réels $\geqslant x_0$ tendant vers l'infini et $(a_\delta)_{\delta\geqslant 1}$ une suite de nombres rationnels vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour une infinité de δ, $a_\delta \neq 0$ et pour tout $\delta \geqslant 1$, $|a_\delta| \leqslant b_\delta(\delta + \mathrm{e}^{\delta N_\delta})^{-\delta\varepsilon_{\delta,N_\delta}}$.

(ii) Pour tout $\delta \geqslant 2$,

$$N_\delta \geqslant 2\left(\log(\delta-1) + \sum_{k=1}^{\delta-1} h(a_k) + (\delta-1)\,\varepsilon_{\delta-1,N_{\delta-1}}(\log 2 + 1 + N_{\delta-1})\right). \tag{2}$$

(iii) Pour tout $\delta \geqslant 2$,

$$\frac{N_\delta}{\phi(N_\delta)} \geqslant 2(\delta-1)\,\varepsilon_{\delta-1,N_{\delta-1}}. \tag{3}$$

On pose, pour tout $k \geqslant 1$, et tout $z \in \mathbf{C}$,

$$P_k(X) = \prod_{\beta\in E_{k,N_k}} (X-\beta) \quad \text{et} \quad f(z) = \sum_{k\geqslant 1} a_k P_k(z).$$

De la condition (i) on déduit que la fonction f est une fonction entière et non polynômiale ; elle est donc transcendante.

Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$. Montrons que $f(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha)$. Par hypothèse, la suite $(N_\delta)_{\delta\geqslant 1}$ tend vers l'infini, donc les ensembles $(E_{k,N_k})_{k\geqslant 1}$ forment une suite croissante pour l'inclusion, de réunion $\overline{\mathbf{Q}}$, et il existe $k_0 \geqslant 1$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $P_k(\alpha) = 0$ et

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{k_0-1} a_k P_k(\alpha).$$

De plus, les polynômes P_k sont fixés par tout élément du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$; ils sont donc à coefficients rationnels, et comme, par définition, les nombres a_k sont aussi rationnels, $f(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha)$.

Soient D et d deux entiers tels que $d \geqslant D \geqslant 1$. Montrons que l'ensemble

$$\Sigma_{D,N_d}(f,1) = \bigl\{\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} \cap \overline{D(0,1)} \mid \deg(\alpha) \leqslant D,\ h(\alpha) \leqslant N_d,\ h\bigl(f(\alpha)\bigr) \leqslant N_d\bigr\}$$

contient $E_{D,\phi(N_d)+1} \cap \overline{D(0,1)}$. Soit $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$ tel que

$$\deg(\alpha) \leqslant d \quad \text{et} \quad h(\alpha) \leqslant \phi(N_d)+1.$$

Comme $N_d \geqslant x_0$, alors, d'après (1), $\phi(N_d) \leqslant N_d - 1$, et $h(\alpha) \leqslant N_d$. Comme, en plus, $\deg(\alpha) \leqslant d$, alors $\alpha \in E_{d,N_d}$ et $\forall k \geqslant d,\ P_k(\alpha) = 0$.

Si $d = D = 1$, alors $f(\alpha) = 0$ et on a l'inclusion $E_{1,\phi(N_1)+1} \cap \overline{D(0,1)} \subset \Sigma_{1,N_1}(f,1)$.

Supposons maintenant que $d > D \geqslant 1$. Alors

$$f(\alpha) = \sum_{k=1}^{d-1} a_k P_k(\alpha).$$

D'après les conditions (2) et (3), on montre que la hauteur de $f(\alpha)$ est inférieure à

$$\phi(N_d)\bigl((d-1)\,\varepsilon_{d-1,N_{d-1}}\bigr) + \log(d-1) + A_{d-1} + (d-1)\,\varepsilon_{d-1,N_{d-1}}(\log 2 + 1 + N_{d-1}) \leqslant N_d.$$

En particulier, si $\alpha \in E_{D,\phi(N_d)+1} \cap \overline{D(0,1)}$, alors $\deg(\alpha) \leqslant D < d$ et $h(f(\alpha)) \leqslant N_d$, ce qui montre que $\alpha \in \Sigma_{D,N_d}(f,1)$.

Ainsi, pour $d \geqslant D \geqslant 1$, nous avons

$$\sigma_{D,N_d} = \operatorname{card}\bigl(\Sigma_{D,N_d}(f,1)\bigr) \geqslant \operatorname{card}\bigl(E_{D,\phi(N_d)+1} \cap \overline{D(0,1)}\bigr).$$

En remarquant que si $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}} - \{0\}$ on a $d(\alpha) = d(1/\alpha)$ et $h(\alpha) = h(1/\alpha)$, et en appliquant le Lemme 1.2, nous obtenons

$$\sigma_{D,N_d} \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{card}(E_{D,\phi(N_d)+1}) > \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{D(D+1)\phi(N_d)}.$$

3. Démonstration du Théorème 1.3

3.1. Choix des paramètres et construction de $S_{D,N}$

On se donne R, r et f vérifiant les hypothèses du théorème. On pose $c_0 = \log\bigl(\frac{R^2+r^2}{2rR}\bigr)$. C'est un nombre réel strictement positif. On se donne aussi un entier γ strictement positif et vérifiant $\gamma > 2(6/c_0)^2$.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe un entier $D \geqslant 1$ et un entier $N_0 \geqslant 1$ suffisamment grand tels que pour tout $N \geqslant N_0$ on ait $\operatorname{card}(\Sigma_{D,N}(f,r)) \geqslant \gamma D^3 N^2$.

Pour tout $N \geqslant N_0 - 1$, on extrait de $\Sigma_{D,N}$ un sous-ensemble $S_{D,N}$ dont le nombre d'éléments, que l'on note s_N, est exactement $\gamma D^3 N^2$. On pose

$$T = \left[\frac{c_0\gamma}{6} D^2 N_0\right] \quad \text{et} \quad u_1 = \log\bigl(2T^4\, \mathrm{e}^{2N_0T} |f|_R^T\bigr).$$

Comme N_0 est suffisamment grand on a

$$c_0 s_{N_0-1} > u_1 + (D-1)\log\bigl(2T^4\bigr) + 2TN_0(D-1) + 2TN_0D. \tag{4}$$

3.2. La fonction auxiliaire

Un lemme de Siegel [4] nous donne l'existence d'un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X,Y]$, non nul (et dépendant de N_0), dont le degré par rapport à chacune des variables est $\leqslant T$, tel que

$$P\bigl(\alpha, f(\alpha)\bigr) = 0, \quad \forall \alpha \in S_{D,N_0},$$

et dont les coefficients sont majorés en valeur absolue par $2T^2\,\mathrm{e}^{2TN_0}$.

La fonction $F(z) = P(z, f(z))$ s'annule sur tout l'ensemble S_{D,N_0}.

3.3. Récurrence et conclusion

On montre par récurrence que pour tout $N \geqslant N_0$, F s'annule sur tout l'ensemble $S_{D,N}$.

On se donne $N \geqslant N_0$ et on suppose que $F(\alpha) = 0$, pour tout $\alpha \in S_{D,N}$. En appliquant un lemme de Schwarz [9], et grâce à la borne obtenue pour les coefficients de P, on montre que, pour tout $\alpha \in \overline{D(0,r)}$, et donc, en particulier, pour tout $\alpha \in S_{D,N+1}$,

$$\bigl|F(\alpha)\bigr| \leqslant \mathrm{e}^{u_1 - c_0 s_N}.$$

Grâce à la majoration de la hauteur des coefficients de P, et de l'inégalité (4), et, en notant $L(P)$ la longueur de P, on obtient

$$\bigl|F(\alpha)\bigr| < L(P)^{-(D-1)}\mathrm{e}^{-DT(h(\alpha)+h(f(\alpha)))}.$$

L'inégalité de Liouville [9] implique $F(\alpha) = 0$.

On a ainsi montré que pour tout $N \geqslant N_0$, la fonction F s'annule sur $S_{D,N}$, ce qui contredit le théorème sur les zéros isolés d'une fonction holomorphe et nous donne le résultat cherché.

Remerciements. Je remercie Michel Waldschmidt et Joseph Œsterlé pour les nombreuses discussions sur ce sujet, ainsi que François Gramain et Marc Hindry pour leurs lectures et leurs encouragements.

Références bibliographiques

[1] S. Chern, J.D. Vaaler, The distribution of values of Mahler's measure, J. Reine Angew. Math. 540 (2001) 1–47.
[2] N.D. Elkies, Rational points near curves and small nonzero $|x^3 - y^2|$ via lattice reduction, in: Algorithmic Number Theory, Leiden, 2000, Lectures Notes in Comput. Sci., Vol. 1838, Springer, Berlin, 2000, pp. 33–63.
[3] F. Gramain, Fonctions entières arithmétiques : un aperçu historique, Pub. IRMA-Lille, Vol. VI, Fasc. 2, n. 1, 1984.
[4] F. Gramain, M. Mignotte, M. Waldschmidt, Valeurs algébriques de fonctions analytiques, Acta Arith. XLVII (1986) 97–120.
[5] T. Loher, Counting points of bounded height, Inauguraldissertation, Basel, 2001.
[6] K. Mahler, Lectures on Transcendental Numbers, Lectures Notes in Math., Vol. 546, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
[7] W. Schmidt, Diophantine Approximations and Diophantine Equations, Lectures Notes in Math., Vol. 1467, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
[8] P. Stäckel, Ueber arithmetische Eingenschaften analytischer Functionen, Math. Ann. 46 (1895) 513–520.
[9] M. Waldschmidt, Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups: Transcendence Properties of the Exponential Function in Several Variables, Grundlehren Math. Wiss., Vol. 326, Springer-Verlag, Berlin, 2000.