C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 811–816

Physique mathématique/*Mathematical Physics*

Sur l'existence des opérateurs d'onde pour l'équation de Wigner dans les espaces $\mathrm{L}^{2,p}$

Hassan Emamirad, Philippe Rogeon

Laboratoire de modélisation mécanique et de mathématiques appliquées, Université de Poitiers, boulevard Marie et Pierre Curie, téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope cedex, France

Reçu le 31 janvier 2002 ; accepté le 19 février 2002

Note présentée par Peter Lax.

Résumé En utilisant le formalisme établi par Markovich, nous montrons la complétude des opérateurs d'onde pour l'équation de Wigner dans L^2. Dans la seconde partie, grâce à des estimations de Castella et Perthame d'une part, et à l'estimation $\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q$ pour le groupe de Schrödinger d'autre part, nous montrons l'existence des opérateurs d'onde dans les espaces $\mathrm{L}^{2,p}$. ***Pour citer cet article : H. Emamirad, P. Rogeon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 811–816.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Existence of wave operators for the Wigner equation in $\mathrm{L}^{2,p}$ spaces

Abstract Basing on the formalism established by Markovich, we show the completeness of wave operators for the Wigner equation in L^2. In the second part, using estimations proved by Castella and Perthame on the one hand, and the $\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q$ estimations for the Schrödinger group on the other hand, we prove the existence of the wave operators in $\mathrm{L}^{2,p}$ spaces. ***To cite this article: H. Emamirad, P. Rogeon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 811–816.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In this Note, we have examined some in sights of scattering theory for the Wigner equation, in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$, but also in $\mathrm{L}^2_x(\mathrm{L}^p_\xi)$ spaces.

We recall the Schrödinger equation

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \end{cases}$$

with $H = H_0 + V = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$. By the Wigner transformation [12] we get the Wigner, or quantum Liouville problem:

$$\text{(WP)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \xi \nabla_x w - P_\hbar(x,\nabla_\xi)w = \dfrac{\partial w}{\partial t} - L_0 w - P_\hbar(x,\nabla_\xi)w = \dfrac{\partial w}{\partial t} - L_\hbar w = 0, \\ w(x,\xi,0) = w_I(x), \end{cases}$$

Adresses e-mail : emamirad@l3ma.univ-poitiers.fr (H. Emamirad); philippe.rogeon@l3ma.univ-poitiers.fr (P. Rogeon).

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés
S1631-073X(02)02332-4/FLA

where $P_\hbar$ is a pseudo-differential operator. The existence of the Wigner strongly continuous semigroup $\mathrm{e}^{tP_\hbar}$ in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ is discussed by Markowich and Ringhofer in [7], and in $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$ by Emamirad and Rogeon in [4].

The equivalence between the Schrödinger and quantum Liouville equations, has been shown by Markovich in [6].

He proved that the action of the Fourier transformation on the Wigner equation leads back to a problem of Schrödinger type:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(r,s,t) - \dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\left(\dfrac{-\hbar^2\Delta_r}{2} + V(r)\right) - \left(\dfrac{-\hbar^2\Delta_s}{2} + V(s)\right)\right] z(r,s,t) = 0, \\ z(r,s,t=0) = z_I(r,s). \end{cases}$$

Working not directly on $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$, but on the tensor product $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_r) \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_s)$, he obtained the existence of a tensorial C_0-group $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tQ} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_r} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_s}$ for this last problem. He also justified the existence of the wave operators $W_\pm(L_\hbar, L_0)$ and their expression from $W_\pm(H, H_0)$ and $W_\mp(H, H_0)$, and proved that, for a given potentiel V, if the wave operators exist for the Schrödinger equation, then they also exist for the Wigner problem. We can now add the transmission of the property of completness. By using an Umeda result [11], we conclude also

THEOREM 1. – *We suppose that the potentiel V is chosen in such a way that the wave operators $W_\pm(H, H_0)$ are complete* (*in particular if V satisfies the Agmon condition* [1]). *Then the wave operators $W_\pm(L_0, L_\hbar)$ and $W_\pm(L_\hbar, L_0)$ exist and are complete.*

In order to handle a more general class of potential, we performed in the third section a scattering theory for the Wigner problem in $\mathrm{L}^2_x(\mathrm{L}^p_\xi)$ spaces, or in abridged notation $\mathrm{L}^{2,p}$. For simplification, we will fix $\hbar = 1$, and keep the notation $L_0 \equiv -\xi\nabla_x$. Let now L be the perturbed transport operator for the perturbation P. We first prove two lemmas:

LEMMA 1. – *For* $2 \leqslant r \leqslant p$:

$$\left\| P\,\mathrm{e}^{tL_0} w \right\|_{r,p} \leqslant K_{V,r,p} |t|^{-n(1/r'-1/p)} \|w\|_{r',p} \tag{1}$$

with $K_{V,r,p} = 2(4\pi)^{n(1/p+1/r-1)}\|V\|_s$, $s = (p'^{-1} - p^{-1})^{-1}$ *where p' and r' are the conjugates of p and r.*

First we use the Weyl's formula [9], and we obtain a new expression of P. Then we used an $\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q$ estimation for the Schrödinger group. For concluding (1) we used a ponctual estimation on the free transport equation for $1 \leqslant r \leqslant p$:

$$\left\| w(x,\xi,t) \right\|_{p,r} = \left\| \mathrm{e}^{tL_0} w_0(x,\xi) \right\|_{p,r} \leqslant t^{-n[1/r-1/p]} \|w_0\|_{r,p},$$

where w_0 is the initial data of the problem (WP) (*see* [2]). For $r = 2$, we get

LEMMA 2. – *Choose $V \in \mathrm{L}^s(\mathbb{R}^n)$ such that*

$$\|V\|_s \leqslant \frac{\gamma - 1}{\alpha\gamma} \tag{2}$$

with $\gamma = n(1/2 - 1/p)$ and $\alpha = 2(4\pi)^{-\gamma}$. Then the evolution group $\{\mathrm{e}^{tL}\}$ is uniformely bounded.

Using the classical Cook's lemma, together with the previous results, we obtain

THEOREM 2. – *Let $p > 2$ be such that $n(1/2 - 1/p) > 1$, and $V \in \mathrm{L}^s(\mathbb{R}^n)$ satisfying* (2). *Then the wave operators $W_\pm(L, L_0)$ and $W_\pm(L_0, L)$ exist in $\mathrm{L}^{2,p}$.*

This theorem implies the existence of the scattering operator $S := W_+(L_0, L)W_-(L, L_0)$ and the similarity between the operators L_0 and L in $\mathrm{L}^{2,p}$.

Pour citer cet article : H. Emamirad, P. Rogeon, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 811–816

1. Introduction

Dans cette Note, nous avons examiné certains aspects de la théorie de scattering pour l'équation de Wigner, dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$, mais également dans les espaces $\mathrm{L}^2_x(L^p_\xi)$.

Considérons une solution φ de l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = H\varphi, \\ \varphi(x,0) = \varphi_0(x) \end{cases}$$

avec $H = H_0 + V = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$. La transformée de Wigner [12] de φ

$$W_\varphi(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot y} \varphi\left(x + \frac{\hbar y}{2}\right) \overline{\varphi}\left(x - \frac{\hbar y}{2}\right) \mathrm{d}y$$

est alors solution du problème de Wigner, ou Liouville quantique :

$$\text{(PW)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} + \xi \nabla_x w - P_\hbar(x, \nabla_\xi) w = \dfrac{\partial w}{\partial t} - L_0 w - P_\hbar(x,\nabla_\xi) w = \dfrac{\partial w}{\partial t} - L_\hbar w = 0, \\ w(x,\xi,0) = w_I(x), \end{cases}$$

où $P_\hbar$ est un opérateur pseudo-différentiel de symbole

$$P_\hbar(x,\nabla_\xi) = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[V\left(x + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}\nabla_\xi\right) - V\left(x - \frac{i\hbar}{2}\nabla_\xi\right)\right].$$

La théorie de scattering a été largement étudiée dans le cas du problème de Schrödinger dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$, et Markovich a fait le lien avec le problème de Wigner dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$. Nous avons fait une étude de la complétude des opérateurs d'onde pour le problème de Wigner dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$, et établi une condition suffisante d'existence de ces opérateurs dans les espaces $\mathrm{L}^2_x(\mathrm{L}^p_\xi)$.

2. Complétude des opérateurs d'onde pour l'équation de Wigner

L'exsitence du semi-groupe fortement continu de Wigner $\mathrm{e}^{tP_\hbar}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$ a été étudiée par Markowich et Ringhofer dans [7], et sur $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^{2n})$ par Emamirad et Rogeon dans [4]. L'équivalence entre les équations de Schrödinger et de Wigner, ou Liouville quantique, a été formalisée par Markovich dans [6]. Il y prouve en particulier que pour un potentiel V donné, si les opérateurs d'onde existent pour l'équation de Schrödinger, il en est alors de même pour le problème de Wigner. Nous sommes en mesure d'y adjoindre la transmission de la propriété de complétude.

Il est connu que L_0 engendre un C_0-groupe d'isométries, et que c'est également le cas pour $L_\hbar$ si le potentiel V est choisi convenablement. Markovich a montré que si l'on fait agir la transformation de Fourier sur l'équation de Wigner, on retrouve un problème « de type Schrödinger » :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(r,s,t) - \dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\left(\dfrac{-\hbar^2\Delta_r}{2} + V(r)\right) - \left(\dfrac{-\hbar^2\Delta_s}{2} + V(s)\right)\right] z(r,s,t) = 0, \\ z(r,s,t=0) = z_I(r,s). \end{cases}$$

L'idée est de faire une étude non pas directement sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$, mais sur le produit tensoriel $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_r) \otimes \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_s)$.

En notant $Q = -H_r \oplus H_s \equiv -H_r \otimes I_s + I_r \otimes H_s$, $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier en variable ξ et $\mathcal{C}$ la transformation unitaire définie par $\mathcal{C}g(r,s) = g(x,\xi)$ avec $r = (x + \hbar\xi/2)$ et $s = (x - \hbar\xi/2)$, Markovich montre que $\mathrm{i}Q$ engendre un C_0-groupe tensoriel vérifaint la relation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tQ} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_r} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_s}$$

et que, pour l'opérateur d'évolution quantique

$$\mathrm{e}^{(tL_\hbar)} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1} \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t H_r\right) \otimes \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar} t H_s\right) \mathcal{C}\mathcal{F}.$$

Nous noterons désormais

$$W_\pm(H, H_0) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} P_{ac}(H_0).$$

Or, dans le cas de l'opérateur de Schrödinger, il est connu que $P_{ac}(H_0) = I$, et donc que $W_\pm(H, H_0) = s - \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}$.

Il existe de multiples conditions sur V assurant la complétude des opérateurs d'onde pour ce problème. Nous pouvons alors prendre une condition de référence pour illustrer notre propos. Nous ne cherchons, en effet, pas à établir une condition supplémentaire, mais à justifier la transmission de la complétude entre les deux problèmes. Nous avons donc choisi de travailler avec les potentiels d'Agmon [1], qui induisent une large classe de potentiels, et qui de plus assurent la complétude de $W_\pm(H, H_0)$. Ainsi, pour de tels potentiels, les opérateurs d'onde du problème de Wigner $W_\pm(L_\hbar, L_0)$ existent [10], et vérifient

$$W_\pm(L_\hbar, L_0) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}^{-1} W_\pm(H, H_0) \otimes W_\mp(H, H_0)\mathcal{C}\mathcal{F}.$$

Pour montrer désormais la complétude, nous avons besoin de plusieurs résultats intermédiaires. Nous utilisons d'abord le fait que, pour des opérateurs A et B, si les opérateurs d'onde $W_\pm(A, B)$ existent, leur complétude équivaut à l'exitence et la complétude de $W_\pm(B, A)$ [3]. De plus, si les opérateurs $W_\pm(A, B)$ existent et sont complets, alors il existe une égalité sur les spectres : $\sigma(B) = \sigma_{ac}(B) = \sigma_{ac}(A) = \sigma(A)$ [8].

Nous utilisons ensuite deux résultats d'Umeda [11] pour prouver que $\mathcal{H}_{ac}(Q_0) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n}) = \mathcal{H}_{ac}(L_0)$, et donc que $P_{ac}(L_0) = I$. Nous avons alors tous les éléments pour énoncer le

THÉORÈME 1. – *Supposons que le potentiel V soit choisi de sorte que les opérateurs d'onde $W_\pm(H, H_0)$ soient complets* (*c'est en particulier le cas si V remplit les conditions d'Agmon*). *Alors les opérateurs d'onde $W_\pm(L_0, L_\hbar)$ et $W_\pm(L_\hbar, L_0)$ existent et sont complets.*

3. Équation de Wigner dans les espaces $\mathrm{L}^{2,p}$

Nous montrons dans cette partie l'existence des opérateurs d'onde associés au problème de Wigner dans les espaces $\mathrm{L}^2_x(\mathrm{L}^p_\xi)$ ou en notation abrégée, $\mathrm{L}^{2,p}$. Pour simplifier l'écriture, nous avons fixé $\hbar = 1$, conservé la notation $L_0 \equiv -\xi\nabla_x$, notons L l'opérateur de transport perturbé par la perturbation P. Pour p et $r \geqslant 1$, nous noterons

$$\|w\|_{r,p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^n_x}\bigl|w(x,\xi)\bigr|^r\,\mathrm{d}x\right)^{p/r}\mathrm{d}\xi\right)^{1/r}$$

la norme sur les espaces $\mathrm{L}^{r,p}$.

En utilisant la formule de Weyl [9]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH_0} V(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0} = V(x - \mathrm{i}t\nabla_\xi)$$

nous avons établi dans [10] une nouvelle expression de P

$$P(x,\nabla_\xi) = \mathrm{i}\bigl[\mathrm{e}^{-L_0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2H_{0,\xi}}\,\mathrm{e}^{L_0} V(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2H_{0,\xi}} - \mathrm{e}^{-L_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/2H_{0,\xi}}\,\mathrm{e}^{L_0} V(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2H_{0,\xi}}\bigr]$$

avec $H_{0,\xi} w(x,\xi) = -\frac{1}{2}\Delta_\xi w(x,\xi)$.

Nous établissons dans un premier temps une estimation de $\|P\mathrm{e}^{tL_0}w\|_{r,p}$ pour $2 \leqslant r \leqslant p$. Pour obtenir notre résultat, nous avons utilisé d'une part des estimations sur le groupe d'évolution $\{\mathrm{e}^{tL_0}\}$ établies par Castella et Perthame [2], d'autre part une estimation $\mathrm{L}^p \to \mathrm{L}^q$ sur le groupe de Schrödinger applicable à $H_{0,\xi}$.

Dans [2], Castella et Perthame montrent que, pour $1 \leqslant r \leqslant p$, la solution de l'équation de transport libre vérifie l'estimation ponctuelle :

$$\bigl\|w(x,\xi,t)\bigr\|_{p,r} = \bigl\|\mathrm{e}^{tL_0} w_0(x,\xi)\bigr\|_{p,r} \leqslant t^{-n[1/r-1/p]}\|w_0\|_{r,p}$$

lorsque w_0 est la donnée initiale du problème.

D'autre part, si $\{U(t)\}$ est le groupe engendré par $\mathrm{i}\Delta$, alors pour $t \neq 0$ et $p \geqslant 2$:

$$\left\|U(t)v\right\|_p \leqslant \left(4\pi|t|\right)^{n/p-n/2}\|v\|_{p'}$$

avec $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ (*voir* par exemple [5]).

Nous pouvons alors établir le

LEMME 1. – *Pour* $2 \leqslant r \leqslant p$:

$$\left\|P\,\mathrm{e}^{tL_0}w\right\|_{r,p} \leqslant K_{V,r,p}|t|^{-n(1/r'-1/p)}\|w\|_{r',p}$$

avec r' le conjugué de r, $K_{V,r,p} = 2(4\pi)^{n(1/p+1/r-1)}\|V\|_s$ et $s = (p'^{-1} - p^{-1})^{-1}$.

Pour le cas particulier où $r = 2$, nous avons également $r' = 2$, et donc :

$$\left\|P\,\mathrm{e}^{tL_0}w\right\|_{2,p} \leqslant K_{V,2,p}|t|^{-n(1/2-1/p)}\|w\|_{2,p}. \tag{1}$$

Si nous notons $\gamma = n(1/2 - 1/p)$ et $\alpha = 2(4\pi)^{-\gamma}$, l'estimation (1) et le fait que e^{tL_0} est un opérateur unitaire dans $\mathrm{L}^{2,p}$ conduit au

LEMME 2. – *Supposons que $V \in \mathrm{L}^s(\mathbb{R}^n)$ soit tel que*

$$\|V\|_s \leqslant \frac{\gamma - 1}{\alpha\gamma}. \tag{2}$$

Alors le groupe d'évolution $\{\mathrm{e}^{tL}\}$ est uniformément borné.

La condition imposée à V implique dans ce cas l'inégalité

$$\beta = \int_0^\infty \left\|P\,\mathrm{e}^{tL_0}\right\|_{2,p} \mathrm{dt} < 1, \tag{3}$$

ce qui assure grâce à la formule de Duhamel :

$$\mathrm{e}^{tL} = \mathrm{e}^{tL_0} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)L} P\,\mathrm{e}^{L_0}\,\mathrm{d}s,$$

le caractère uniformément borné du groupe $\{\mathrm{e}^{tL}\}$.

THÉORÈME 2. – *Soit $p > 2$ tel que $n(1/2 - 1/p) > 1$, et $V \in \mathrm{L}^s(\mathbb{R}^n)$, satisfaisant à la condition* (2)*. Alors les opérateurs d'onde $W_\pm(L, L_0)$ et $W_\pm(L_0, L)$ existent dans* $\mathrm{L}^{2,p}$.

Ce théorème est une conséquence directe du lemme de Cook qui nous permet grâce à (3) d'établir l'existence des opérateurs d'ondes $W_-(L, L_0)$ et $W_+(L_0, L)$. Comme $\{\mathrm{e}^{tL_0}\}$ est aussi un opérateur unitaire pour $t \leqslant 0$, par symétrie on obtient aussi $\int_0^\infty \|P\,\mathrm{e}^{tL_0}f\|_{2,p}\,\mathrm{d}t < \beta\|f\|_{2,p}$ ce qui permet d'appliquer encore une le lemme de Cook et obtenir l'existence de $W_+(L, L_0)$ et $W_-(L_0, L)$.

Ce théorème a pour conséquence l'existence de l'opérateur de scattering $S := W_+(L_0, L)W_-(L, L_0)$ et la similarité des opérateur L_0 et L dans $\mathrm{L}^{2,p}$.

Références bibliographiques

[1] S. Agmon, Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 4 (1975) 151–217.

[2] F. Castella, B. Perthame, Estimations de Strichartz pour les équations de transport cinétique, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (1996) 535–540.

[3] R. Dautray, J.-L. Lions, Analyse Mathématique et Calcul Numérique, Vol. 7, Spectre des Opérateurs, Masson, Paris, 1987.

[4] H. Emamirad, Ph. Rogeon, An existence family for the Husimi operator, Transport Theory Statist. Phys. 30 (2001) 673–685.

[5] J. Ginibre, G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case, J. Funct. Anal. 32 (1979) 1–32.

[6] P.A. Markowich, On the equivalence of the Schrödinger and the quantum Liouville equations, Math. Methods Appl. Sci. 11 (1989) 459–469.
[7] P.A. Markowich, C.A. Ringhofer, On the equivalence of the Schrödinger and the quantum Liouville equations, Math. Meth. Appl. Sci. 11 (1989) 459–469.
[8] M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. III, Scattering Theory, Academic Press, Londres–New York, 1979.
[9] D. Robert, Autour de l'Approximation Semi-Classique, Birkhäuser, Basel–Boston, 1987.
[10] Ph. Rogeon, Autour de la théorie de scattering pour l'équation de Wigner, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2000.
[11] T. Umeda, Scattering theory for pseudo-differential operators (II). The completness of wave operators, Osaka J. Math. 19 (1982) 511–526.
[12] E.P. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, Phys. Rev. 40 (1932) 749–759.