C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 713–716

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source

Gérard Gallice

CEA-CESTA, BP 2, 33114 Le Barp, France

Reçu le 18 janvier 2002 ; accepté le 4 février 2002

Note présentée par Philippe G. Ciarlet.

Résumé On définit la notion de solveur de Riemann simple pour des systèmes hyperboliques avec terme source et on construit des schémas de type Godunov entropiques pour la dynamique des gaz avec gravité et le système de Saint-Venant. ***Pour citer cet article : G. Gallice, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 713–716.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Entropic Godunov-type schemes for hyperbolic systems with source term

Abstract The notion of simple Riemann solver is introduced for hyperbolic systems with source term and entropic Godunov-type schemes are derived for gas dynamic system with gravity and Saint-Venant system. ***To cite this article: G. Gallice, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 713–716.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

On aborde dans cette Note la résolution numérique de systèmes hyperboliques avec terme source. De nombreux travaux ont déjà été réalisés sur ce sujet [1–3,5–8]. On propose une définition de schémas de type Godunov pour de tels systèmes et on caractérise la classe des solveurs simples. Pour de tels solveurs et pour les systèmes physiques possédant à la fois une forme eulérienne et lagrangienne, on établit, sous certaines conditions naturelles, une correspondance biunivoque entre schémas de type Godunov lagrangiens et eulériens. De cette propriété, après construction de solveurs de Riemann entropiques et positifs pour la dynamique des gaz avec gravité et le système de Saint-Venant en coordonnées lagrangiennes, on déduit des solveurs de Riemann entropiques et positifs pour les mêmes systèmes en coordonnées eulériennes.

2. Définitions et construction

On considère le système hyperbolique avec terme source suivant :

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}, x). \tag{1}$$

On suppose que ce système possède un couple entropie-flux (η, q) et si $p = \nabla\eta \cdot \mathbf{P}$ désigne la production d'entropie, on cherche alors des solutions entropiques vérifiant l'inégalité :

$$\partial_t \eta + \partial_x q \leqslant p. \tag{2}$$

Adresse e-mail : gallice@bordeaux.cea.fr (G. Gallice).

S1631-073X(02)02307-5/FLA

Pour une grille régulière $(x_{i+1/2})_i$, on notera $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ et $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$. Soit maintenant $\mathbf{W}_{i+1/2}(x,t)$ une approximation de (1) avec la donnée initiale $\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_i$, si $x < x_{i+1/2}$, $\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}_{i+1}$ si $x \geqslant x_{i+1/2}$. Considérons alors le schéma défini par,

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2}\big(\mathbf{U}_{i-1/2}^{+} + \mathbf{U}_{i+1/2}^{-}\big), \qquad \mathbf{U}_{i\mp1/2}^{\pm} = \pm\int_{x_{i\mp1/2}}^{x_i} \mathbf{W}_{i\mp1/2}(x,\Delta t)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

On adopte les notations $\Delta y = y_d - y_g$, $y_\alpha = \alpha y_g + \beta y_d$ où $\alpha + \beta = 1$, et y_a pour la moyenne arithmétique. Pour une suite $(X_k)_k$, on notera aussi, $\delta X_k = X_{k+1} - X_k$, et $X_{\alpha,k} = \alpha X_k + \beta X_{k+1}$. On propose la définition suivante d'un schéma de type Godunov :

DÉFINITION 1. – On dira que $\mathbf{W}$ est de type Godunov pour (1) s'il existe $\widetilde{\mathbf{P}}$ consistant, i.e. $\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U},\mathbf{U},x,x) = \mathbf{P}(\mathbf{U},x)$, telle que pour τ suffisamment petit et tout $\mathbf{U}_g$, $\mathbf{U}_d$:

$$\int_{x_g}^{x_d} \mathbf{W}(x,\tau;\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d)\,\mathrm{d}x = \frac{\Delta x}{2}(\mathbf{U}_g + \mathbf{U}_d) - \tau\Delta\mathbf{F} + \tau\Delta x\widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d,x_g,x_d). \tag{4}$$

On dira que $\mathbf{W}$ est de type Godunov entropique pour (1) s'il existe $\tilde{p}$ consistant, i.e. $\tilde{p}(\mathbf{U},\mathbf{U},x,x) = p(\mathbf{U},x)$, telle que pour τ suffisamment petit et tout $\mathbf{U}_g$, $\mathbf{U}_d$:

$$\int_{x_g}^{x_d} \eta\big(\mathbf{W}(x,\tau;\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d)\big)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\Delta x}{2}(\eta_g + \eta_d) - \tau\Delta q + \tau\Delta x\,\tilde{p}(\mathbf{U}_g,\mathbf{U}_d,x_g,x_d). \tag{5}$$

On montre aisément que si $\mathbf{W}$ est de type Godunov, le schéma (3) s'écrit :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{H}_{1+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}) + \frac{\Delta t}{2}\big(\widetilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} + \widetilde{\mathbf{P}}_{i-1/2}\big), \quad \widetilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} = \widetilde{\mathbf{P}}(\mathbf{U}_i,\mathbf{U}_{i+1}x_i,x_{i+1}), \quad \text{et}$$

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1} - \frac{\Delta x}{2\Delta t}\big(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1/2}^{+} + \mathbf{U}_{i+1/2}^{-}\big)\right]. \tag{6}$$

Dans cette étude, on considère la classe des solveurs simples [4] constitués de $(m+1)$ états constants $(\mathcal{U}_k)_{k=1,m+1}$, séparés par des droites de pentes $(\Lambda_k)_{k=1,m}$, avec $\mathcal{U}_1 = \mathbf{U}_g$ et $\mathcal{U}_{m+1} = \mathbf{U}_d$. On notera $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_k)_k$ et $\Lambda = (\Lambda_k)_k$ et on désignera le solveur par le couple $(\mathcal{U},\Lambda)$.

Soit (η,q,p) un triplet entropie-flux-production. On obtient facilement le résultat suivant :

PROPOSITION 1. – *Le solveur* $(\mathcal{U},\Lambda)$ *est de type Godunov si et seulement s'il existe* $\widetilde{\mathbf{P}}$ *consistant tel que* $\Delta\mathbf{F} - \Delta x\widetilde{\mathbf{P}} = \sum_{k=1}^{m}\Lambda_k\delta\mathcal{U}_k$, *et de type Godunov entropique si et seulement s'il existe* $\tilde{p}$ *consistant tel que* $\Delta q - \Delta x\,\tilde{p} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\Lambda_k\delta\eta_k$.

Pour des problèmes du type (1) la préservation des solutions stationnaires vérifiant $\partial_x\mathbf{F} = \mathbf{P}$ est souvent un problème crucial. On propose la définition suivante de solutions équilibres :

DÉFINITION 2. – On dira qu'une suite $(\mathbf{U}_i)_i$ est solution d'équilibre pour le schéma (3) si à chaque interface les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{-} = \mathbf{U}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_{i+1/2}^{+} = \mathbf{U}_{i+1}. \tag{7}$$

Il est intéressant de remarquer, en considérant l'expression (6), que ces conditions consistent à annuler la dissipation numérique du schéma. En outre, ces solutions satisfont une relation d'équilibre simple à chaque interface. En effet, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2. – *Les solutions d'équilibre satisfont la relation de consistance* : $\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = \Delta x\widetilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}$.

3. Correspondance Lagrange–Euler

On considère ici uniquement des systèmes physiques ayant une forme eulérienne et une forme lagrangienne pour lesquels $\mathbf{F} = u\mathbf{U} + \mathbf{G}_0$, avec $\mathbf{G}_0$ de première composante nulle et u la vitesse. Si la densité ρ est la première composante de $\mathbf{U}$, on définit les variables $\tau = t$, $m = \int\rho\,\mathrm{d}x$ et aussi :

$$ {}^t\mathbf{n} = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{U} = \rho\mathbf{n} + \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{V}_0 = \vartheta\mathbf{U}_0, \quad \mathbf{V} = \vartheta\mathbf{n} + \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{G} = -u\mathbf{n} + \mathbf{G}_0, \quad \vartheta = 1/\rho. $$

Posons $\mathbf{P}_l = \vartheta\mathbf{P}_e$. La forme lagrangienne du système (1) est alors donnée par :

$$ \partial_\tau\mathbf{V} + \partial_m\mathbf{G}(\mathbf{V}) = \mathbf{P}_l. \tag{8} $$

Si (s, q, p_l) est un triplet entropie–flux–production pour le système (8), alors $(S, uS + q, p_e)$ où $S = \rho s$ et $p_e = \rho p_l$, est un triplet entropie–flux–production pour le système (1).

Considérons un solveur de Riemann lagrangien $(\mathcal{V}, \lambda)$. La première équation de (8) est linéaire et s'écrit : $\partial_\tau\vartheta - \partial_m u = 0$. On impose alors à $(\mathcal{V}, \lambda)$ de vérifier l'analogue discret de celle-ci au travers de chaque changement d'états, soit $\delta u_k + \lambda_k\delta\vartheta_k = 0$, pour $k = 1, m$ (H1). On demandera aussi que $\vartheta_k > 0$ pour $k = 1, m$ (H2). On définit un solveur simple eulérien $(\mathcal{U}, \Lambda)$ par $\mathcal{U}_k = \mathbf{U}(\mathcal{V}_k)$ et $\Lambda_k = u_{\alpha,k} + \lambda_k\vartheta_{\alpha,k}$. On a alors :

PROPOSITION 3. – *Supposons* (H1) *et* (H2) *vraies. Alors, le solveur* $(\mathcal{U}, \Lambda)$ *ci-dessus est un solveur de type Godunov si et seulement si le solveur lagrangien* $(\mathcal{V}, \lambda)$ *en est un. Il est positif si et seulement si le solveur lagrangien l'est. Enfin, il est entropique si et seulement si le solveur lagrangien l'est. En particulier, si* $\Delta m = \rho_a\Delta x$*, on a pour toute entropie,*

$$ \Delta(uS + q) - \Delta x\,\tilde{p}_e \leqslant \sum_{k=1,m} \Lambda_k\delta S_k \Longleftrightarrow \Delta q - \Delta m\,\tilde{p}_l \leqslant \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\delta s_k \quad \textit{avec } \tilde{p}_e = \rho_a\tilde{p}_l. \tag{9} $$

Démonstration. – On montre uniquement l'inégalité d'entropie. On a d'une part :

$$ \begin{aligned} \sum_{k=1,m} \Lambda_k\delta S_k &= \sum_{k=1,m} [u_{\alpha,k} + \lambda_k\vartheta_{\alpha,k}]\delta S_k = \sum_{k=1,m} \big[u_{\alpha,k}\delta S_k + \lambda_k\big(\delta(\vartheta S)_k - S_{\beta,k}\delta\vartheta_k\big)\big] \\ &= \sum_{k=1,m} \lambda_k\delta s_k + \sum_{k=1,m} [u_{\alpha,k}\delta S_k - \lambda_k S_{\beta,k}\delta\vartheta_k] \end{aligned} $$

et en utilisant (H1), on a : $\sum_{k=1,m}[u_{\alpha,k}\delta S_k - \lambda_k S_{\beta,k}\delta\vartheta_k] = \sum_{k=1,m}[u_{\alpha,k}\delta S_k + S_{\beta,k}\delta u_k] = \Delta(uS)$. On a donc montré que : $\sum_{k=1,m}\Lambda_k\delta S_k = \sum_{k=1,m}\lambda_k\delta s_k + \Delta(uS)$. On en déduit facilement (9).

4. Application à la dynamique des gaz avec gravité

Si ρ est la pression, $\varepsilon = p\vartheta/(\gamma - 1)$ l'énergie interne, $s = f(p\vartheta^\gamma)$ l'entropie où f croissante convexe, $E = \varepsilon + u^2/2$ l'énergie totale, g la constante de gravité, les modèles eulérien et lagrangien de la dynamique des gaz avec gravité sont caractérisés par les vecteurs suivants,

$$ \mathbf{U} = {}^t(\rho, \rho u, \rho E), \quad \mathbf{F} = {}^t(\rho u, \rho u^2 + p, \rho uE + pu), \quad \mathbf{P}_e = {}^t(0, -\rho g, -\rho ug), \tag{10} $$

$$ \mathbf{V} = {}^t(\vartheta, u, E), \quad \mathbf{G} = {}^t(-u, p, pu), \quad \mathbf{P}_l = {}^t(0, -g, -ug). \tag{11} $$

Enfin, les triplets entropie–flux–production sont $(\rho s, \rho us, 0)$ en Euler et $(s, 0, 0)$ en Lagrange. Posons $\alpha = C_-/(C_- + C_+)$ et $\beta = 1 - \alpha$. On définit alors pour le système (11) le solveur simple suivant,

$$ \mathbf{W}(m, \tau) = \begin{cases} \mathbf{V}_g & \text{si } m/\tau \leqslant -C_-, \\ \mathbf{V}_g^* = \mathbf{V}_g + \phi_-\mathbf{R}_- & \text{si } -C_- < m/\tau \leqslant 0, \\ \mathbf{V}_d^* = \mathbf{V}_d - \phi_+\mathbf{R}_+ & \text{si } 0 < m/\tau \leqslant C_+, \\ \mathbf{V}_d & \text{si } C_+ < m/\tau, \end{cases} \qquad \mathbf{R}_\pm = {}^t(-1, \pm C_\pm, P_\beta \pm u_\alpha C_\pm) \qquad \phi_\pm = \frac{\Delta P \pm C_\mp\Delta u}{C_-C_+ + C_\pm^2}, \tag{12} $$

où $P = p + p_h$ avec p_h défini par $\Delta p_h = g\Delta m$.

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 4. – *Le solveur de Riemann* (12) *est de type Godunov pour le système lagrangien de la Dynamique des gaz avec gravité. Il est positif* ($\vartheta > 0$ *et* $\varepsilon > 0$) *et entropique pour* $C_\pm$ *assez grands. En particulier, on a les relations* :

$$-C_-\big(\vartheta_g^*-\vartheta_g\big)+C_+\big(\vartheta_d-\vartheta_d^*\big)=-\Delta u,\quad -C_-\big(u_g^*-u_g\big)+C_+\big(u_d-u_d^*\big)=\Delta p+\Delta mg,$$
$$-C_-\big(E_g^*-E_g\big)+C_+\big(E_d-E_d^*\big)=\Delta(pu)+u^*\Delta mg\quad \textit{avec}\ u_g^*=u_d^*=u^*=\frac{C_-u_g+C_+u_d-\Delta P}{C_-+C_+}.$$

Il satisfait (H1), (H2) *et induit un solveur de Godunov eulérien positif et entropique. Les solutions définies par* $p_{i+1}-p_i=(\rho_{i+1}+\rho_i)\Delta x/2$*, et* $u_i=0$ *pour tout* i *sont solutions d'équilibre pour* (10).

5. Application aux équations de Saint-Venant

Soient h la hauteur d'eau, Z la bathymétrie, E l'énergie donnée par $E=gh/2+u^2/2$ et $\vartheta=1/h$. Les modèles eulérien et lagrangien de Saint-Venant sont caractérisés par les vecteurs suivants,

$$\mathbf{U}={}^t(h,hu),\quad \mathbf{F}={}^t\big(hu,hu^2+gh^2/2\big),\quad \mathbf{P}_e={}^t(0,-gh\partial_x Z),\tag{13}$$

$$\mathbf{V}={}^t(\vartheta,u),\quad \mathbf{G}={}^t\big(-u,gh^2/2\big),\quad {}^t\mathbf{P}_l=(0,-gh\partial_m Z).\tag{14}$$

L'inéquation d'entropie eulérienne est donnée par, $\partial_t(hE)+\partial_x(uhE+ugh^2/2)\leqslant -ghu\partial_x Z$, et l'inéquation d'entropie lagrangienne est la suivante, $\partial_\tau E+\partial_m(ugh^2/2)\leqslant -ghu\partial_m Z$.

On définit le solveur lagrangien suivant pour le système de Saint-Venant lagrangien (14),

$$\mathbf{W}(m,\tau)=\begin{cases}\mathbf{V}_g & \text{si } m/\tau\leqslant -C_-, \qquad \mathbf{R}_\pm={}^t(-1,\pm C_\pm),\\ \mathbf{V}_g^*=\mathbf{V}_g+\phi_-\mathbf{R}_- & \text{si } -C_-<m/\tau\leqslant 0,\\ \mathbf{V}_d^*=\mathbf{V}_d-\phi_+\mathbf{R}_+ & \text{si } 0<m/\tau\leqslant C_+,\\ \mathbf{V}_d & \text{si } C_+<m/\tau, \qquad \phi_\pm=\frac{\overline{\Delta p}\pm C_\mp\Delta u}{C_-C_++C_\pm^2},\end{cases}\tag{15}$$

où $\overline{\Delta p}=\Delta p+gh_a\Delta Z$. On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 5. – *Pour* $C_\pm$ *assez grands, le solveur de Riemann* (15) *est de type Godunov positif* ($\vartheta>0$) *et entropique pour le système lagrangien de Saint-Venant* (14). *En particulier, on a l'inégalité d'entropie :*

$$\Delta\left(g\frac{h^2}{2}u\right)+u^*gh_a\Delta Z\leqslant -C_-\big(E_g^*-E_g\big)+C_+\big(E_d-E_d^*\big).$$

Il satisfait (H1), (H2) *et induit un solveur de Godunov eulérien positif et entropique. Les solutions définies par* $u_i=0$ *et* $h_i+Z_i=h_{i+1}+Z_{i+1}$ *pour tout* i *sont solutions d'équilibre pour* (13).

Remarque. – En pratique, on choisit $C_-=C_+=C$ avec C évalué itérativement de façon à satisfaire le critère d'entropie.

Références bibliographiques

[1] E. Audusse, M.O. Bristeau, B. Perthame, Kinetic schemes for Saint-Venant equations with source terms on unstructured grids, Rapport de Recherche INRIA, N° 3989, 2000.
[2] A. Bermudez, M.E. Vazquez, Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms, Comput. Fluids 23 (8) (1994) 1049–1071.
[3] A. Chinnayya, A.Y. Leroux, A new general Riemann solver for the shallow-water equations with friction and topography, Preprint, 1999.
[4] G. Gallice, Schémas de type Godunov entropiques et positifs préservant les discontinuités de contact, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 331 (2000) 149–152.
[5] T. Gallouet, J.-M. Hérard, N. Seguin, Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography, AIAA J., 2001, à paraître.
[6] S. Jin, A steady-state captuting method for hyperbolic systems with geometrical source terms, Math. Modelling Numer. Anal. 35 (4) (2001) 631–645.
[7] R.J. Leveque, Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave propagation algorithm, J. Comput. Phys. 146 (1998) 346–365.
[8] J.G. Zhou, D.M. Causon, C.G. Mingham, D.M. Ingram, The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations, J. Comput. Phys. 168 (2001) 1–25.