C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 551–556

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Analyse d'un problème de tsunami

Bernard Di Martino, Fabien Flori, Catherine Giacomoni, Pierre Orenga

UMR 6134, Université de Corse, Quartier Grossetti, BP 52, 20250 Corte, France

Reçu le 10 septembre 2001 ; accepté après révision le 4 février 2002

Note présentée par Pierre-Louis Lions.

Résumé Nous proposons une modélisation et son analyse mathématique d'un problème de tsunami provoqué par un déplacement de la lithosphère. Nous donnons des résultats d'existence, de régularité et d'unicité de la solution. ***Pour citer cet article : B. Di Martino et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 551–556.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Analysis of a tsunami problem

Abstract This article presents a model and a mathematical analysis of a tsunami problem due to the displacement of the lithosphere. We give some results showing the existence, smoothness and uniqueness of the solution. ***To cite this article: B. Di Martino et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 551–556.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Off shore, tsunami waves have a 600–800 km$\cdot$h^{-1} velocity but they are only a few centimeters high. Yet, whenever this happens near the coastline, i.e., in shallow water, the velocity is weaker but the waves can be several meters high. This is this situation which is analyzed in this article. The earth's crust and the water surface occupy a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^2$, simply connected, with boundary γ smooth enough. Let us set $Q = \Omega\times\,]0, T[$ and $\Sigma = \gamma\times\,]0, T[$. The lithosphere, which is around 60 kilometers thick, is divided into mobile plates moving on the asthenosphere. Faults in the earth's crust make it possible for these plates to adapt their motion to one another. The faults can remain blocked for quite a long time before suddenly releasing the energy produced by the stress. Since a plate's horizontal dimensions (around 1000 km) are far greater than its thickness, the motion of the lithosphere can be modelized by a thin plate operator

$$(\mathcal{S})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 d}{\partial t^2} - \Delta\dfrac{\partial^2 d}{\partial t^2} + \Delta^2 d = f_0 - gh & \text{in } Q,\\ d = f_1, \quad \nabla d\cdot n = f_2 & \text{on } \Sigma,\\ d(t=0) = d_0(x), \quad \dfrac{\partial d}{\partial t}(t=0) = d_1(x) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

where d is the vertical displacement, f_1 and f_2 are the constraints applied to a plate on the faults. In the mathematical analysis of this problem, let us posit that $f_1 = f_2 = 0$ to avoid unnnecessary technicalities. The action of the water on the plate is taken into account by a term of pressure $-gh$ where $h = \zeta + H - d$, ζ is the water surface rise and $H > 0$ is a bathymetry constant. Last, let us suppose that the model is

Adresses e-mail : dimartin@univ-corse.fr (B. Di Martino); flori@univ-corse.fr (F. Flori).

balanced at $t=0$ from where f_0 is given by $f_0 = g(\zeta_0 + H - d_0)$ (and $d_0 = d_1 = 0$). Since the most significant tsunamic waves happen near the coastline, the ocean motion can be described by a shallow water model (SW) [8]

$$(\mathcal{F})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\nabla u^2 + \operatorname{rot} u \wedge u - A\Delta u + g\nabla\zeta + \omega_c \wedge u + C_d|u|u = f_3 & \text{in } Q,\\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(uh) = 0, & \text{in } Q,\\ \operatorname{rot} u \wedge n = 0, \quad u\cdot n = 0 & \text{on } \Sigma,\\ u(t=0) = u_0(x), \quad h(t=0) = h_0(x) \geqslant 0 & \text{on } \Omega, \end{cases}$$

where u is the velocity, $\omega_c \wedge u$ is the coriolis term, $C_d|u|u$ is the bottom shear and f_3 is the action of the wind on the water surface [4,7]. Let us note that this model results from integration on the vertical of the three-dimensional equations of the geophysic fluids and naturally takes into account the variations of the lithosphere. In Section 2 we show an existence result for a finite time and for small data. In Section 3 we give the necessary conditions to obtain the smoothness and the uniqueness of the solution. In Lemma 2.1, if $h_0 \geqslant 0$, $h_0 \log h_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ and $\Delta^{-1}\operatorname{div}(u_0)h_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, with the technics used in [1–3], it is shown how to obtain a bound on h in $\mathrm{L}^2(Q)$ according to bounds on u in $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega)) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega))$, $h\log h$ in $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))$ and d in $\mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathrm{H}^1_0(\Omega)) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^2_0(\Omega))$. In Lemma 2.2, this bound is used in the natural energy estimate and if $u_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $d_0 \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$, $d_1 \in \mathrm{H}^2_0(\Omega)$, we find the estimate (2.4). Finally, using this estimate, we show:

THEOREM 0.1. – *Under the assumptions of Lemmas* 2.1 *and* 2.2, *and if the data verify the conditions* $\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} < \theta k_3$, $k_1 + Tk_1k_2\exp(k_2T) < \theta^2 k_3^2$, $\|h_0\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} < k_4$ *where* $\theta \in (0,1)$ *and* k_1, k_2, k_3, k_4 *depend on the data, then the problem admits a solution* (u,h,d) *satisfying* $u \in \mathrm{C}([0,T];\mathrm{L}^2(\Omega)) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega))$, $h \in \mathrm{L}^2(Q)$, $h\log h \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))$, $d \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathrm{H}^1_0(\Omega)) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^2_0(\Omega))$ *and* $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))} < \theta k_3$.

We conclude this Note with the following smoothness and uniqueness result:

THEOREM 0.2. – *Under the assumptions of Theorem* 0.1 *and if* $h_0 \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $u_0 \in \mathrm{L}^{1+p}(\Omega)$, *then* $h \in \mathrm{L}^{1+p}(Q)$ *and* $u \in \mathrm{L}^{1+p}(0,T;\mathrm{W}^{1,1+p}(\Omega))$, $p < \infty$. *Moreover, if* $h_0 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *then* $h \in \mathrm{L}^\infty(Q)$ *and the solution is unique.*

1. Position du problème

Nous proposons un modèle ainsi que l'analyse mathématique d'un phénomène de tsunami dû à un déplacement de la lithosphère. Lorsqu'un tsunami a lieu à proximité des côtes, c'est-à-dire en eau peu profonde, la hauteur de sa vague peut atteindre plusieurs mètres. Ce type de tsunami est le plus destructeur et c'est cette situation que nous considérons dans ce travail. Dans ce qui suit, toutes les constantes physiques ont été prises égales à 1 exceptées la viscosité A et l'accélération $g = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ dont dépend le choix des données. L'écorce terrestre et la surface du fluide occupent un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$, simplement connexe (pour simplifier) avec une frontière γ de classe $\mathrm{C}^{1,1}$. On note Q le cylindre $\Omega \times\,]0,T[$ et on pose $\Sigma = \gamma \times\,]0,T[$. Epaisse d'environ 60 km, la lithosphère est découpée en plaques mobiles qui se déplacent sur l'asthénosphère. Des failles permettent à ces plaques d'accomoder leur mouvement. Avant que l'énergie emmagasinée par les contraintes soit soudainement libérée au dessous des océans, les failles restent bloquées pendant de longues années. Les dimensions horizontales d'une plaque, de l'ordre du millier de kilomètres, étant grandes devant son épaisseur, le déplacement d de la lithosphère peut être modélisé par l'opérateur de plaque mince $(\mathcal{S})$ où f_1 et f_2 sont les contraintes subies par la plaque au niveau des failles. Dans l'analyse mathématique du problème on posera $f_1 = f_2 = 0$ pour ne pas alourdir inutilement les calculs. L'action du fluide sur la plaque est prise en compte par un terme de pression $-gh$, $h = \zeta + H - d$,

ζ étant l'élévation du niveau de l'eau et $H > 0$ la bathymétrie supposée constante. Enfin, on suppose que le modèle est à l'équilibre à $t = 0$ d'où f_0 est donné par $f_0 = g(\zeta_0 + H - d_0)$ et $d_0 = d_1 = 0$. Le mouvement de l'océan est décrit par un modèle (SW) d'eau peu profonde $(\mathcal{F})$ [8] dans lequel $\omega_c \wedge u$ est le terme de Coriolis, $C_d|u|u$ est le frottement du fluide sur la plaque et f_3 est l'action du vent à la surface [4,7]. Notons que ce modèle est issu de l'intégration sur la verticale des équations tridimensionnelles des fluides géophysiques et prend naturellement en compte les variations de la lithosphère.

2. Un résultat d'existence

L'existence de solutions pour le modèle de shallow water a été établie dans [6], quant au modèle de plaque il ne présente pas de difficultés particulières. Pour démontrer le résultat d'existence du modèle couplé, on utilise des techniques employées dans [1–3]. Ce résultat est obtenu pour T fini et des données petites. Ceci est dû aux difficultés engendrées par le couplage entre la plaque et le fluide. Afin d'alléger les calculs nous ne prenons pas en compte les actions de Coriolis, du vent et du frottement au fond. L'obtention de ce résultat d'existence se fait en trois étapes. Au Lemme 2.1 nous montrons comment obtenir une borne sur h dans $\mathrm{L}^2(Q)$ en fonction de bornes sur u dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega)) \cap \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega))$, $h\log h$ dans $\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))$ et d dans $\mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathrm{H}^1_0(\Omega)) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^2_0(\Omega))$. On introduit au Lemme 2.2 cette borne dans l'estimation d'énergie naturelle ce qui donne suffisamment de compacité pour obtenir une solution pour des données petites précisées au Théorème 2.3. Nous pouvons alors montrer l'existence d'une solution (u,h,d) du problème couplé vérifiant les équations $(\mathcal{F})_1$, $(\mathcal{F})_2$ et $(\mathcal{S})_1$ respectivement dans $\mathrm{L}^{4/3}(0,T;\mathrm{H}^{-1}(\Omega))$, $\mathrm{L}^{4/3}(0,T;\mathrm{W}^{-1,4/3}(\Omega))$ et $\mathrm{W}^{-1,\infty}(0,T;\mathrm{H}^{-2}(\Omega))$. Notons que l'on peut obtenir une solution sans la borne sur h dans $\mathrm{L}^2(Q)$ mais alors pour des données plus restrictives.

Avant de développer ces résultats, précisons que l'on utilise l'inversion de l'opérateur $-\Delta$. Plus précisément, pour toute fonction g telle que $\int_\Omega \operatorname{div} g \,\mathrm{d}x = 0$, on note $w = (-\Delta)^{-1} \operatorname{div} g$ l'unique solution de $-\Delta w = \operatorname{div} g$ dans Ω avec $\partial w/\partial n = 0$ sur γ et $\int_\Omega w\,\mathrm{d}x = 0$. Dans ce qui suit on raisonne formellement sur $(\mathcal{F})_1$. Cette démarche est ensuite appliquée aux solutions approchées qui vérifient les hypothèses nécéssaires. Alors, en appliquant l'opérateur $(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}$ à chaque terme de $(\mathcal{F})_1$ et en notant que $u \in V = \{\varphi \in \mathrm{H}^1(\Omega),\ \varphi \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma\}$ peut se décomposer de façon unique sous la forme $u = \nabla p + \operatorname{Rot} q$, avec $\partial p/\partial n = 0$ et $q = 0$ sur γ, il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial t} - A\Delta p + gh = -gd + \int_\Omega (gh_0 + gd)\,\mathrm{d}x - \Delta^{-1}\operatorname{div}\big[(u\cdot\nabla)u\big]\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Avec ce résultat, on montre le lemme suivant :

LEMME 2.1. – *Si $h_0 \geqslant 0$, $h_0 \log h_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ et $p_0 h_0 \in \mathrm{L}^1(\Omega)$, alors h vérifie l'estimation* :

$$\begin{aligned}\int_Q h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant k_0\bigg(1 + \varepsilon\|u\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))} + \varepsilon^{-1}\|h_0\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \sup_\tau \int_\Omega h(\tau)\log^+ h(\tau)\,\mathrm{d}x\bigg)\\ + k_0\bigg(\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;V)}\|u\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))} + \int_0^t \bigg\|\frac{\partial d}{\partial t}(\tau)\bigg\|^2_{\mathrm{H}^1_0(\Omega)} + \big\|\Delta d(\tau)\big\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\bigg),\end{aligned} \tag{2.2}$$

où k_0 dépend des données.

Eléments de démonstration. – Soit χ_δ, $\delta \in\,]0,T[$, défini par $\chi_\delta(t) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant T-\delta$ et $\chi_\delta(t) = \frac{T-t}{\delta}$ si $T-\delta \leqslant t \leqslant T$. En multipliant l'équation (2.1) par $\chi_\delta h$ et en intégrant sur Q, il vient :

$$\begin{aligned}g\int_Q \chi_\delta h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_Q \frac{\partial p}{\partial t}\chi_\delta h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_Q \chi_\delta\big(\Delta^{-1}\operatorname{div}\big[(u\cdot\nabla)u\big]\big)h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + A\int_Q \Delta p\chi_\delta h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ + g\int_Q \mathrm{d}\chi_\delta h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T \bigg\{\int_\Omega (gh_0 + gd)\,\mathrm{d}x \int_\Omega \chi_\delta h\,\mathrm{d}x\bigg\}\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Estimons les cinq termes du second membre de (2.3), notés respectivement T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Le premier est celui qui pose le plus de difficultés et dont nous donnons les principales étapes de l'estimation. Tout d'abord, en utilisant la définition de χ_δ, on obtient :

$$T_1 = -\int_Q \frac{\partial p}{\partial t}\chi_\delta h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Omega p(0)h(0)\,\mathrm{d}x + \int_Q p\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q p\chi_\delta\frac{\partial h}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\int_Q p\chi_\delta\frac{\partial h}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = -\int_Q p\chi_\delta\,\mathrm{div}(hu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_Q uh\nabla p\chi_\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$, il vient :

$$T_1 = \int_\Omega p(0)h(0)\,\mathrm{d}x + \int_Q p\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_Q \big((\nabla p)^2 + \nabla p\,\mathrm{Rot}\,q\big)\chi_\delta h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Omega p(0)h(0)\,\mathrm{d}x + T_{1,1} + T_{1,2}.$$

Estimons $T_{1,1}$ et $T_{1,2}$. On introduit les espaces de Orlicz $\mathrm{L}_{\mathcal{A}}(\Omega)$, $\mathrm{L}_{\mathcal{A}'}(\Omega)$ et $\mathrm{L}_{\tilde{\mathcal{A}}'}(\Omega)$ où $\mathcal{A}$ est la N-fonction définie par $\mathcal{A}(x) = \exp(x^2) - 1$ et $\mathcal{A}'$ est la N-fonction complémentaire à $\mathcal{A}$, équivalente à la N-fonction $\tilde{\mathcal{A}}'$ définie par $\tilde{\mathcal{A}}'(x) = x\sqrt{\log^+(x)}$. On obtient, en utilisant le fait que $\|p\|_{\mathrm{L}_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leqslant k\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$:

$$T_{1,1} \leqslant 2\int_0^T \left|\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t}\right| \|p\|_{\mathcal{A}(\Omega)}\|h\|_{\mathcal{A}'(\Omega)} \leqslant C\int_0^T \left|\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t}\right| \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\left(\int_\Omega \tilde{\mathcal{A}}'(h)\,\mathrm{d}x + 1\right)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, en utilisant la formule de Young, on parvient à :

$$T_{1,1} \leqslant C\varepsilon\int_0^T \left|\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t}\right| \|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t + \frac{C}{2\varepsilon}\int_0^T \left|\frac{\partial \chi_\delta}{\partial t}\right| \left\{1 + \left(\int_\Omega \sqrt{h^2\log^+ h}\,\mathrm{d}x\right)^2\right\}\mathrm{d}t$$

avec $\left(\int_\Omega \sqrt{h^2\log^+ h}\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \|h_0\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}\|h\log^+ h\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}$ grâce à l'équation $(\mathcal{F})_2$ qui donne $\int_\Omega h\,\mathrm{d}x = \int_\Omega h_0\,\mathrm{d}x$. Finalement, comme $\partial\chi_\delta/\partial t = 0$ pour $t \in [0, T-\delta[$ et $\partial\chi_\delta/\partial t = -1/\delta$ pour $t \in [T-\delta, T]$, on obtient :

$$T_{1,1} \leqslant C\varepsilon\|u\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))}\,\mathrm{d}t + \frac{C}{2\varepsilon}\left\{1 + \|h_0\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}\sup_\tau\int_\Omega h(\tau)\log^+ h(\tau)\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Pour estimer $T_{1,2}$, on utilise successivement les inégalités de Hölder et de Gagliardo–Nirenberg :

$$T_{1,2} \leqslant \frac{1}{2}\int_Q \chi_\delta h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C'\int_0^T \|\nabla p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\big(\|\nabla p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \|\mathrm{Rot}\,q\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\big)\|u\|_V^2\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, puisque $\mathrm{L}^2(\Omega) = \nabla\mathrm{H}^1(\Omega) \oplus \mathrm{H}_0(\mathrm{div}\,0, \Omega)$, alors $\|\mathrm{Rot}\,q\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ et $\|\nabla p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$. Ainsi, on peut remplacer $\mathrm{Rot}\,q$ et ∇p par u dans le dernier terme de $T_{1,2}$. Passons à l'estimation des autres termes de (2.3). Sans plus de détails, on montre que $T_2 \leqslant \frac{1}{4}\int_Q \chi_\delta h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C''\|u\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;V)}$ et $T_3 \leqslant A\int_\Omega h_0\log h_0 + 1 - h_0\,\mathrm{d}x$ et $T_4 + T_5 \leqslant C[h(0)] + \frac{g}{4}\int_Q \chi_\delta h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + C'''\int_0^T \|d\|^2_{\mathrm{H}_0^2(\Omega))}\,\mathrm{d}t$. En appliquant les estimations sur les T_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ à (2.3) on obtient (2.2) en faisant tendre δ vers 0.

LEMME 2.2. – *On note C_1, C_2 et C_3 des constantes dépendant uniquement des données. Sous les hypothèses du Lemme* 2.1 *et si $u_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $d_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, $d_1 \in \mathrm{H}_0^2(\Omega)$ alors u, d et h vérifient l'estimation* :

$$\begin{aligned}&\|u\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))} + G(u)\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;V)} + \big(g - \varepsilon^{-1}\|h_0\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)}\big)\sup_\tau\int_\Omega h(\tau)\log^+ h(\tau)\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \sup_\tau\int_\Omega h(\tau)\log^- h(\tau)\,\mathrm{d}x + y(t) + \|h\|^2_{\mathrm{L}^2(Q)} \leqslant k_1 + k_2\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{2.4}$$

où $G(u) = C_1 - C_2\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))} - C_3\|u\|^2_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))}$ et $y(t) = \left\|\frac{\partial d}{\partial t}(t)\right\|^2_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} + \left\|\Delta d(t)\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$.

Eléments de démonstration. – En multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par u et en intégrant sur Ω, il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + A\|u\|_V^2 + g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_\Omega h\log h - h + 1\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{div}\,u\,\mathrm{d}x + g\int_\Omega d\,\mathrm{div}\,u\,\mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

où avec les inégalités de Gagliardo–Nirenberg, $\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\,\mathrm{div}\,u\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{2}\|u\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\|u\|_V^2$ et avec les inégalités de Young et de Poincaré, $g\int_\Omega d\,\mathrm{div}\,u\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon\|u\|_V^2 + \frac{C}{\varepsilon}\|d\|^2_{\mathrm{H}_0^2(\Omega)}$. En outre, en multipliant l'équation de plaque par $\partial d/\partial t$ et en intégrant sur Q, on montre que :

$$y(t) \leqslant C' + g\int_Q h\frac{\partial d}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C' + \varepsilon g\|h\|^2_{\mathrm{L}^2(Q)} + \frac{C''}{\varepsilon}\int_0^T \left\|\frac{\partial d}{\partial t}\right\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Finalement, en sommant (2.2) obtenu au Lemme 2.1, (2.5) et (2.6) on obtient (2.4).

THÉORÈME 2.3. – *Sous les hypothèses des Lemmes* 2.1 *et* 2.2, *et si les données vérifient les conditions* $\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} < \theta k_3 = \theta\frac{C_2+\sqrt{C_2+4C_1C_3}}{2C_3}$, $k_1 + Tk_1k_2\exp(k_2T) < \theta^2k_3^2$, $\|h_0\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} < k_4$ *où* $\theta \in (0,1)$ *et* k_1, k_2, k_3, k_4 *dépendent des données, alors* $G(u) > 0$ *et le problème admet une solution* (u,h,d) *telle que* $u \in \mathrm{C}([0,T];\mathrm{L}^2(\Omega)) \cap \mathrm{L}^2(0,T;V)$, $h \in \mathrm{L}^2(Q)$, $h\log h \in \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^1(\Omega))$, $d \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathrm{H}^1_0(\Omega)) \cap \mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{H}^2_0(\Omega))$ *et* $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))} < \theta k_3$.

Eléments de démonstration. – On peut appliquer le lemme de Gronwall à (2.4) et obtenir les estimations annoncées si $\|h_0\|_{\mathrm{L}^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon g = k_4$ et $G(u) > 0$. Cette dernière condition n'est vérifiée que si $\|u\|_{\mathrm{L}^\infty(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega))} \leqslant k_3$. Pour montrer ce point, on utilise les conditions sur les données. Puisqu'en dimension finie u est continue de $[0,T]$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ et que $\|u_0\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \theta k_3$ avec $\theta \in (0,1)$, il existe alors un temps $t_1 \leqslant T$ tel que $\|u(t_1)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \leqslant \theta k_3$. Par conséquent, pour tout $t \in [0,t_1]$, $G(u)$ est positif et (2.4) donne $y(t) \leqslant k_1 + k_2\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ ce qui avec le lemme de Gronwall conduit à $y(t) \leqslant k_1\exp(k_2T)$. Le membre de droite de (2.4) peut alors être estimé par $k_1 + Tk_1k_2\exp(k_2T)$ qui est strictement inférieur à $\theta^2k_3^2$. En notant t_2 le plus petit temps tel que $\|u(t_2)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = \theta k_3$, l'estimation (2.4) écrite pour $t = t_2$ conduit à la contradiction $\theta^2k_3^2 \leqslant k_1 + Tk_1k_2\exp(k_2T) < \theta^2k_3^2$. Ainsi $\|u(t)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} < \theta k_3$ pour tout $t \in [0,T]$ et $G(u) > 0$ ce qui permet de conclure.

Puisque $u \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega))$, $h \in \mathrm{L}^2(Q)$, $uh \in \mathrm{L}^1(Q)$, $\frac{\partial h}{\partial t} = -\operatorname{div}(hu) \in \mathrm{L}^1(0,T;\mathrm{W}^{-1,1}(\Omega))$ et d'autre part $\|u - u(\cdot+\zeta,t)\|_{\mathrm{L}^2(Q)} \to 0$ quand $|\zeta|$ tend vers 0 car $u \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\Omega))$, on peut passer à la limite au sens des distributions dans le terme hu en utilisant le Lemme 5.1, p. 12 de [5]. On utilisera encore ce lemme pour passer à la limite dans le terme non linéaire $(u\cdot\nabla)u$ en remarquant que $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathrm{L}^{4/3}(0,T;\mathrm{W}^{-1,4/3}(\Omega))$.

Pour construire des solutions approchées vérifiant les estimations, on utilise un point fixe bien adapté à la résolution numérique de ce problème. Soit $\{\phi_n\}$ une base régulière de V et V_n l'ensemble des combinaisons des n premières fonctions $\phi_i \in \mathrm{H}^4(\Omega)$ de cette base. Grâce à la régularité de cette base, les espaces $\mathrm{L}^2(0,t;V_n)$ et $\mathrm{L}^2(0,t;V_n \cap \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))$ sont algébriquement et topologiquement identiques. On fixe $u_n = u_n^* \in X = \mathrm{L}^2(0,t;V_n)$ dans l'équation de continuité que l'on résout avec la méthode des caractéristiques de ce qui permet de conserver la positivité de h_n. On obtient l'estimation $\|h_n\|^2_{(0,t;\mathrm{L}^2(\Omega))} \leqslant C\exp(\int_0^t \|u_n^*\|_{V_n\cap\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)}\,\mathrm{d}t)$. On résout ensuite l'équation de plaque avec la méthode de Galerkin ce qui donne d_n et grâce à l'estimation précédente on a $y_n(t) \leqslant C' + C''t^2\exp(t^{1/2}\|u_n^*\|_{\mathrm{L}^2(0,t;V_n\cap\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega))})$. Enfin, toujours avec Galerkin, on résout l'équation de conservation de la quantité de mouvement et on obtient l'estimation $\|u_n\|_X^2 \leqslant C''' + C''''t^2(1+t^2)\exp(t^{1/2}\|u_n^*\|_X)$ où C''' dépend des données. L'opérateur $\Pi : u_n^* \in X \mapsto u_n \in X$ est donc une application continue et on peut toujours choisir un R et un t tels que si $\|u_n^*\|_X < R$ alors $\|u_n\|_X < R$. Ainsi Π envoie la boule $B(0,R)$ de X dans elle même ce qui permet d'appliquer le théorème de point fixe de Schauder [9]. Les solutions ont été construites pour un t qui peut être petit mais on peut prolonger à T grâce aux estimations.

3. Un résultat d'unicité

La principale difficulté pour montrer l'unicité est liée aux équations de shallow water. En effet, nous devons tout d'abord établir des résultats de régularité sur u et h. En particulier, nous montrons une borne sur h dans $\mathrm{L}^{1+p}(Q)$ $(1+p<\infty)$ et sur u dans $\mathrm{L}^{1+p}(0,T;\mathrm{W}^{1,1+p}(\Omega))$ en utilisant des techniques présentées dans [5] (p. 246) dans le cas linéaire (pour $(\mathcal{F})_1$) et que nous adaptons au cas non linéaire.

THÉORÈME 3.1. – *Sous les hypothèses du Théorème* 2.3 *et si* $h_0 \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, $u_0 \in \mathrm{L}^{1+p}(\Omega)$, *alors* $h \in \mathrm{L}^{1+p}(Q)$ *et* $u \in \mathrm{L}^{1+p}(0,T;\mathrm{W}^{1,1+p}(\Omega))$, $p < \infty$. *En outre si* $h_0 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ *alors* $h \in \mathrm{L}^\infty(Q)$ *et la solution est unique.*

Eléments de démonstration. – Les équations du fluide nous conduisent à l'estimation naturelle $\|h\|_{L^{1+p}(Q)} \leqslant C_1(1 + \|S\|_{L^{1+p}(Q)})$ où $S = \operatorname{div} u - \frac{g}{A} h$. En appliquant l'opérateur div à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient $\frac{\partial S}{\partial t} - A\Delta S = \operatorname{div}(\frac{g}{A} h - (u \cdot \nabla u) + \nabla d)$ et l'estimation $\|S\|_{L^{1+p}(Q)} \leqslant C_2(1 + \|hu - (u \cdot \nabla u)\|_{L^{1+p}(W^{-1,1+p})})$ puisque $\nabla d \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Grâce à ces deux inégalités on obtient $\|h\|_{L^{1+p}(Q)} \leqslant C_3(1 + \|hu - (u \cdot \nabla)u\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))})$ où, pour estimer $\|hu\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))}$, on utilise la compacité de u dans $C([0, T], L^2(\Omega))$. On écrit alors que pour tout ε il existe u_1^ε et u_2^ε vérifiant $\|u_1^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant \varepsilon$ et $\|u_2^\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} \leqslant K_\varepsilon$ tels que $u = u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon$ [5]. Alors $\|hu\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))} \leqslant \|h\|_{L^{1+p}(Q)} \|u_1^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|hu_2^\varepsilon\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))}$ et finalement :

$$\|h\|_{L^{1+p}(Q)} \leqslant C_4\big(1 + \varepsilon\|h\|_{L^{1+p}(Q)} + CK_\varepsilon\|h\|^\theta_{L^{1+p}(Q)} + \big\|(u \cdot \nabla)u\big\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))}\big) \tag{3.1}$$

avec $\theta < 1$. Il reste le terme non linéaire à estimer. Pour cela, on remarque que :

$$\big\|(u \cdot \nabla)u\big\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))} \leqslant \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla u\|_{L^{1+p}(Q)}. \tag{3.2}$$

En appliquant à nouveau des résultats de régularité sur les équations paraboliques à $(\mathcal{F})_1$, on montre que :

$$A\|\nabla u\|_{L^{1+p}(Q)} \leqslant C_5\big(1 + \big\|(u \cdot \nabla)u\big\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))} + \|h\|_{L^{1+p}(Q)}\big)$$

et avec (3.2) on obtient :

$$\big\|(u \cdot \nabla)u\big\|_{L^{1+p}(0,T;W^{-1,1+p}(\Omega))}\big(A - C_5\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\big) \leqslant C_5\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\big(1 + \|h\|_{L^{1+p}(Q)}\big).$$

Finalement, en raisonnant comme au Théorème 2.3, on montre que si les données vérifient $\|u_0\|_{L^2(\Omega)} < AC_5^{-1}$ alors $\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} < AC_5^{-1}$. Ainsi, dans (3.1), si ε est suffisamment petit, il existe une constante $C_6[\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}] > 0$ telle que $C_6[\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}]\|h\|_{L^{1+p}(Q)} - C_7K_\varepsilon\|h\|^\theta_{L^{1+p}(Q)} - C_8 \leqslant 0$ avec $\theta \in (0, 1)$ et nous obtenons la borne sur h dans $L^{1+p}(Q)$. Cette estimation donne immédiatement l'estimation sur u dans $L^{1+p}(0, T; W^{1,1+p}(\Omega))$.

La régularité sur h dans $L^\infty(Q)$ et l'unicité de la solution du problème de shallow water ont été démontrées dans [2]. Ces résultats sont utilisables dans notre cas car le terme ∇d dans le second membre de $(\mathcal{F})_1$ est suffisamment régulier. Nous utilisons ces résultats pour montrer l'unicité du problème couplé. En particulier, si on note (u_1, h_1, d_1) et (u_2, h_2, d_2) deux solutions du problème couplé telles que $u_i = \nabla p_i + \operatorname{Rot} q_i$ et Ψ la fonction vérifiant $\Delta\Psi = h_1 - h_2$ dans Ω avec $\frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0$ sur γ, alors si on pose $V_1 = \|p_1 - p_2\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega)}$, les équations de shallow water nous donnent [2] :

$$\frac{dV_1}{dt} \leqslant C_1\big(\|d_1 - d_2\|^2_{H_0^2(\Omega)} + V_1\big) + C_2\big(\|d_1 - d_2\|^2_{H_0^2(\Omega)} + V_1\big)^{1-\delta},$$

où $\delta < 1$. En outre, dans notre problème, si on pose $V_2 = \big\|\frac{\partial d_1 - d_2}{\partial t}\big\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|d_1 - d_2\|^2_{H_0^2(\Omega)}$, l'équation de la plaque nous conduit à :

$$\frac{dV_2}{dt} = -2\int_\Omega (h_1 - h_2)\frac{\partial d_1 - d_2}{\partial t}\,dx = 2\int_\Omega \nabla\Psi\nabla\frac{\partial d_1 - d_2}{\partial t}\,dx \leqslant \frac{4}{\varepsilon}\|\nabla\Psi\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\left\|\frac{\partial d_1 - d_2}{\partial t}\right\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Finalement, en notant $V = V_1 + V_2$, alors $\frac{dV_1 + V_2}{dt} = \frac{dV}{dt} \leqslant C_3V + C_4V^{1-\delta}$ soit $V(t) \leqslant (C_4\delta)^{1/\delta}\exp(C_3t)$. On conclut sur l'unicité en remarquant que $(C_4\delta)^{1/\delta}\exp(C_3t) \to 0$ quand $\delta \to 0$.

Références bibliographiques

[1] F.J. Chatelon, M.L. Muñoz, P. Orenga, On a bi-layer shallow water problem, Preprint.
[2] F.J. Chatelon, P. Orenga, Adv. Differential Equations 3 (1998) 155–177.
[3] A.V. Kazhikhov, Progr. in theor. and comput. fluid mech., in: G.P. Galdi, J. Málek, J. Necas (Eds.), Longman, 1994.
[4] R. Lewandowski, Analyse mathématique et océanographie, Masson, 1997.
[5] P.L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 2, Oxford University Press, 1998.
[6] P. Orenga, Arch. Rational Mech. Anal. 130 (1995) 183–204.
[7] J. Pedlosky, Geophysical Fluid Dynamics, Springer, 1987.
[8] S. Tinti, E. Bertolucci, C. Chiavettieri, Pure Appl. Geophys. 158 (2001) 759–797.
[9] E. Zeidler, Applied Mathematical Sciences, Vol. 108, Springer, 1997.