C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 639–642

**Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations***

# Monodromie du problème de Cauchy ramifié

**Renaud Camalès**

**Laboratoire de mathématiques pour l'industrie et la physique (UMR CNRS 5640), Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne, Toulouse, France**

**Reçu le 26 novembre 2001 ; accepté le 4 février 2002**

**Note présentée par Paul Malliavin.**

**Résumé** Dans cette Note, nous étudions la monodromie de la solution du problème de Cauchy ramifié pour des opérateurs à caractéristiques multiples de multiplicité constante. Plus précisément, nous donnons une estimation du spectre de la monodromie de la solution, tout d'abord dans le cadre du théorème d'Hamada–Leray–Wagschal, puis dans celui du théorème de Leichtnam. ***Pour citer cet article : R. Camalès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 639–642.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**Monodromy of the ramified Cauchy problem**

**Abstract** In this Note, we study the monodromy of the ramified Cauchy problem for operators with multiple characteristics of constant multiplicity. More precisely, we give an estimation of the eigenvalues of the solution's monodromy, first with the assumptions of the theorem of Hamada–Leray–Wagschal, then with the assumptions of the theorem of Leichtnam. ***To cite this article: R. Camalès, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 639–642.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## 1. Notations et résultats

Les coordonnées d'un point $x$ de $\mathbf{C}^{n+1}$ seront notées $(x_0, \ldots, x_n)$ ; on posera $x' = (x_1, \ldots, x_n)$. Soit $a(x, D) = \sum_{|a| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients holomorphes. On suppose l'hyperplan $S : x_0 = 0$ non caractéristique : autrement dit, on peut supposer que $a_{(m,0,\ldots,0)} = 1$. Soit $g(x, \xi)$ le symbole principal de $a(x, D)$. On suppose l'opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constante : ceci signifie que le symbole principal peut s'écrire $g(x, \xi) = \prod_{i=1}^{d} (\xi_0 - \lambda_i(x, \xi'))^{m_i}$ et $\lambda_i(0; 1, \ldots, 0) \neq \lambda_j(0; 1, \ldots, 0)$ si $i \neq j$. On note, pour $i = 1, \ldots, d$, $K_i = \{k_i(x) = 0\}$ où $k_i$ est la solution du problème de Cauchy non linéaire du premier ordre

$$\begin{cases} D_0 k_i(x) = \lambda_i(x, D' k_i(x)), \\ k_i(x) = x_1 \quad \text{pour } x_0 = 0, \end{cases}$$

où $D' k_i(x) = (D_1, k_i(x), \ldots, D_n k_i(x))$.

Si on note $T : x_0 = x_1 = 0$, les $K_i$ sont les hypersurfaces caractéristiques issues de $T$. Si $X$ est une variété holomorphe connexe, on notera $\mathcal{R}(X)$ son revêtement universel. On a alors le théorème suivant dû à Leichtnam [3], redémontré par Pongérard–Wagschal [4].

*Adresse e-mail :* camales@mip.ups-tlse.fr (R. Camalès).


S1631-073X(02)02296-3/FLA

THÉORÈME 1.1. – *Soient* $\Omega$ *un voisinage ouvert connexe de l'origine de* $\mathbf{C}^{n+1}$*, tel que* $\Omega \cap S$ *soit connexe,* $a \in \Omega \cap S \setminus T$*,* $(w_h)_{0 \leqslant h \leqslant m}$ *et* $v$ *des germes au point* $a$ *se prolongeant en des fonctions holomorphes sur* $\mathcal{R}(\Omega \cap S \setminus T)$ *et* $\mathcal{R}(\Omega \smallsetminus \bigcup_{i=1}^d K_i)$ *respectivement ; alors il existe un voisinage ouvert connexe de l'origine de* $\mathbf{C}^{n+1}$*,* $\Omega' \subset \Omega$*, tel que le germe au point* $a$*, solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(x, D)u(x) = v(x), \\ D_0^h u(x) = w_h(x') \quad \textit{pour } x_0 = 0,\ 0 \leqslant h < m, \end{cases} \tag{1}$$

*se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathcal{R}(\Omega' \smallsetminus \bigcup_{i=1}^d K_i)$.

Soit $X$ une variété holomorphe connexe, on notera $\mathcal{O}_a(X; E)$, l'espace vectoriel des germes holomorphes au point $a \in X$ à valeurs dans l'espace de Banach complexe $E$ et $\mathcal{H}(X; E)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $X$. Si $u \in \mathcal{O}_a$ se prolonge analytiquement le long d'un chemin $\gamma : I \mapsto X$, d'origine $a$ et d'extrémité $b$, on note $u_\gamma \in \mathcal{O}_b$ le germe au point $b$ obtenu par prolongement analytique du germe $u$ le long de $\gamma$. Notons $\Gamma_a = \Gamma_a(X)$ l'espace des lacets d'origine $a$ et soit $u \in \mathcal{O}_a$ un germe se prolongeant analytiquement le long de tout lacet $\gamma \in \Gamma_a$. On notera alors $F_a^u$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{O}_a$ engendré par l'ensemble $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_a}$ et $A_\gamma^u \in \mathrm{GL}(F_a^u)$ l'automorphisme

$$A_\gamma^u : \theta \in F_a^u \longmapsto \theta_\gamma \in F_a^u.$$

Cet automorphisme ne dépend que de la classe d'homotopie de $\gamma$. Si $F_a^u$ est de dimension finie, on dit que $u$ est de détermination finie et on note $\mathcal{O}_a^f(X)$ l'ensemble des germes au point $a$ de détermination finie. De plus, on note $\sigma_\gamma(u)$ le spectre de l'automorphisme $A_\gamma^u$.

*Note*. – Par exemple, si $u$ est holomorphe sur $X$, on $\sigma_\gamma(u) = \{1\}$ si $u \neq 0$ et $\sigma_\gamma(u) = \emptyset$ si $u = 0$.

THÉORÈME 1.2. – *Il esiste* $\Omega'$*, voisinage, ouvert de l'origine de* $\mathbf{C}^{n+1}$*, tel que le problème* (1) *admette une solution* $u$*, holomorphe sur* $\mathcal{R}(\Omega' \smallsetminus \bigcup_{i=1}^d K_i)$ *et tel que si les données* $v$*,* $w_h$ *sont de détermination finie, alors* $u$ *est aussi de détermination finie et pour tout* $\gamma \in \Gamma_a(\Omega' \smallsetminus \bigcup_{i=1}^d K_i)$*, on*

$$\sigma_\gamma(v) \subset \sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \sigma_{\gamma_i}(v) \cup \bigcup_{i=1}^{d} \bigcup_{h=0}^{m-1} \sigma_{\gamma_i}(w_h), \tag{2}$$

*où* $\gamma_i$ *désigne le lacet* $s \mapsto (0, k_i(\gamma(s)), a'')$.

On peut montrer que l'on peut choisir $\Omega'$ tel qu'il satisfasse au Théorème 1.1 et vérifie

$$\pi_1\left(\Omega' \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{d} K_i, a\right) \simeq \mathbf{Z} \times (\underbrace{\mathbf{Z} \star \cdots \star \mathbf{Z}}_{d-1 \text{ fois}}), \quad \pi_1\big(\Omega' \smallsetminus K_i, a\big) \simeq \mathbf{Z} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, d.$$

## 2. Monodromie d'un problème de Cauchy intégro-différentiel

On considère le problème intégro-différentiel suivant

$$\begin{cases} \big(D_0^m - A_m(x, D)\big)U(t, x) = \sum_{l \in \mathcal{L}} A_l^m(x, D) D_t^{-l} U(t, x) + y_m(t, x), \\ \big(D_0^h - A_h(x, D)\big)U(t, x) = \sum_{l \in \mathcal{L}} A_l^h(x, D) D_t^{-l} U(t, x) + y_h(t, x) \quad \text{pour } x_0 = 0,\ 0 \leqslant h < m \end{cases} \tag{3}$$

avec les hypothèses de [4] :

$t \in \mathbf{C}$, $x \in \mathbf{C}^{n+1}$, $\mathcal{L}$ est une partie finie de $\mathbf{Z}^*$, $E$ et $F$ sont deux espaces de Banach complexes et $(a, u) \in E \times F \mapsto au \in F$ est une application bilinéaire continue. $A_h(x, D)$ et $A_l^h(x, D)$ sont des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes dans un voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, à valeurs dans $E$ et pour $0 \leqslant h \leqslant m$

$$\text{ordre}\, A_h \leqslant h, \qquad \text{ordre}_{x_0} A_h < h,$$

$$\operatorname{ordre} A_l^h \leqslant \begin{cases} h+l-1 & \text{si } l<0, \\ h+l & \text{si } l \geqslant 0. \end{cases}$$

Soit $O$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ et $b \in O$ ; on définit la primitive de $U \in \mathcal{O}_{(b,0)}(O \times \mathbf{C}^{n+1})$ par rapport à $t$ en posant, pour $(t,x)$ voisin de $(b,0)$,

$$D_t^{-1} U(t,x) = \int_b^t U(\tau, x)\, \mathrm{d}\tau,$$

l'intégrale s'effectuant le long du segment $[b,t]$. On obtient ainsi un germe $D_t^{-1} U \in \mathcal{O}_{(b,0)}$ et, par récurrence, des germes $D_t^{-1} U \in \mathcal{O}_{(b,0)}$ pour tout entier $l \in \mathbf{N}$.

On a le théorème suivant [4]

THÉORÈME 2.1. – *Soit $\Omega$ un voisinage ouvert simplement connexe de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$, il existe alors un voisinage ouvert simplement connexe $\Omega' \subset \Omega$ de l'origine de $\mathbf{C}^{n+1}$ et $\eta > 0$ tel que : soient $O$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ de diamètre $< \eta$, $y_h : \mathcal{R}(O) \times \Omega \to F$, $0 \leqslant h \leqslant m$ des fonctions holomorphes, alors le problème* (3) *possède une unique solution holomorphe $U : \mathcal{R}(O) \times \Omega' \to F$.*

On pose $y = (y_h)_{0 \leqslant h \leqslant m}$ et on note $U = S(y)$ la solution de (3). On considère $y$ comme un germe au point $(b,0) \in O \times \mathbf{C}^{n+1}$ et on suppose les germes $y_h$ indépendants de $x_0$ pour $0 \leqslant h < m$.

THÉORÈME 2.2. – *Si $\pi_i(O,b)$ est de type fini, on a*

$$y \in \mathcal{O}^f_{(b,0)}\big(O \times \Omega; F^{m+1}\big) \Longrightarrow U \in \mathcal{O}^f_{(b,0)}\big(O \times \Omega'; F\big),$$

*et*

$$\sigma_\gamma(y) \cup \{1\} = \sigma_\gamma(U) \cup \{1\} \quad \textit{pour tout } \gamma \in \Gamma_{(b,0)}\big(O \times \Omega'\big).$$

*Schéma de preuve.* – Nous aurons besoin, du point de vue algébrique, du lemme suivant

LEMME 2.3. – *Soit $F$ un espace vectoriel de dimension finie, $A \in \mathcal{L}(F)$ un endomorphisme qui admet dans un système de générateurs de $F$ une représentation matricielle par une matrice $M$, alors $\sigma(A) \subset \sigma(M)$.*

À présent, on remarque que $P^l_\gamma(U) = (D_t^{-l} U)_\gamma - D_t^{-l}(U_\gamma)$, $l > 0$, est un polynôme en $t$ à coefficients holomorphes sur $\Omega'$. On a donc

$$U_\gamma = U_1^\gamma + U_2^\gamma,$$

où $U_1^\gamma = S(y_\gamma)$, $U_2^\gamma = S(Q_\gamma U)$ avec

$$Q_\gamma U = \left( \sum_{l \in \mathcal{L}_+} A_l^h(x,D) P^l_\gamma(U) \right)_{0 \leqslant h \leqslant m} \qquad \big(\mathcal{L}_+ = \{l \in \mathcal{L};\ l > 0\}\big).$$

1. Soit $(\theta_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ une base de $F^y_{(b,0)}$, $U_j = S(\theta_j)$ et soit $H$ l'espace vectoriel engendré par $(U_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ ; on a alors $U_1^\gamma \in H$ pour tout $\gamma$.

2. On note $O' = \mathbf{C} \setminus C$ où $C$ est la composante connexe non bornée du complémentaire de $O$. $O'$ est simplement connexe et $\operatorname{diam} O' = \operatorname{diam} O < \eta$. De plus, $Q_\gamma U$ est un polynôme en $t$ à coefficients holomorphes sur $\Omega'$ ; d'après le Théorème 2.1, avec un $\Omega'$ plus petit, on a $U_2^\gamma$ holomorphe sur $O' \times \Omega'$, donc sur $O \times \Omega'$. A présent, vu que $\pi_1(O,b)$ est de type fini, il existe des lacets $\gamma_i \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')$, $i = 1, \dots, p$, tels que tout lacet $\gamma \in \Gamma_{(b,0)}(O \times \Omega')$ soit homotope à un lacet de la forme

$$\gamma_{i_1} \cdots \gamma_{i_l}, \quad 1 \leqslant i_j \leqslant p.$$

On pose $U_{ij} = S(Q_{\gamma_i} U_j) \in \mathcal{H}(O \times \Omega')$, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant k$. On montre que $U_2^\gamma$ appartient à l'espace vectoriel $G$ engendré par $(U_{ij})$. Ceci montre que $F^u_{(b,0)} \subset G + H$ et que $u$ est de détermination finie.

L'espace $G+H$ est invariant par toutes les applications $\theta \mapsto \theta_\gamma$ et ces applications possèdent dans le système de générateurs $(U_{ij}, U_j)$ une représentation matricielle de la forme

$$\begin{pmatrix} Id & B_\gamma \\ 0 & M_\gamma^y \end{pmatrix},$$

où $M_\gamma^y$ est la matrice de $A_\gamma^y$ dans la base $(\theta_j)$. On obtient donc $\sigma_\gamma(u) \subset \sigma_\gamma(y) \cup \{1\}$. De là, on en déduit le Théorème 2.2.

## 3. Idée de la preuve du Théorème 1.2

On s'intéresse tout d'abord au cas $v=0$. On sait, d'après [4], que la solution du problème (1) s'écrit sous la forme

$$u(x) = \sum_{i=1}^{d} \left[D_0^{m-m_i} D_t^{m_i} U_i(t,x)\right]_{|t=k_i(x)},$$

où $U_i$ est un germe au point $(a_1, a)$ se prolongeant en une fonction holomorphe sur le revêtement universel de $D_\omega \times \Omega'$ où $\dot{D}_\omega = \{t \in \mathbf{C};\ 0 < |t| < \omega\}$. $U = (U_1, \ldots, U_d)$ est solution d'un problème intègro-différentiel de la forme (3) avec $y_m = 0$ et

$$y_h(t,x) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} P_{1,k,h}\left(x', D_t^{-1}\right) w_k(t,x), \ldots, \sum_{k=0}^{m-1} P_{d,k,h}\left(x', D_t^{-1}\right) w_k(t,x)\right),$$

où $P_{i,k,h}(x',\xi)$ est un polynôme en $\xi$ à coefficients holomorphes en la variable $x'$. On peut montrer qu'alors $\sigma_y(y) \subset \sigma_\gamma(w) \cup \{1\}$ où $w = (w_h)_{0 \leqslant h \leqslant m-1}$. Pour prouver le Théorème 1.2 dans le cas $v=0$ il suffit de montrer que $\{1\}$ n'apparaît pas dans la formule (2). Pour cela, on utilise le lemme suivant

LEMME 3.1. – *Soient $X$ une variété holomorphe connexe et $a \in X$ tels que $\pi_1(X,a)$ soit isomorphe à* $\mathbf{Z}$ *et engendré par la classe d'homotopie d'un lacet $\gamma$, soient $u \in \mathcal{O}_a^f(X)$ tel que $1 \notin \sigma_\gamma(u)$ et $v \in \mathcal{H}(X)$ ; alors*

$$1 \notin \sigma_\gamma(u+v) \ \Leftrightarrow\ v = 0.$$

Le cas général $(v \neq 0)$ se déduit du cas précédent et du fait que

$$\pi_1\left(\Omega' \setminus \bigcup_{i=1}^{d} K_i\right) \simeq \mathbf{Z} \times (\underbrace{\mathbf{Z} \star \cdots \star \mathbf{Z}}_{d-1 \text{ fois}}).$$

**Remerciements.** Je tiens à remercier Claude Wagschal pour les nombreuses discussions et relectures de cet article. Les détails des preuves seront publiés dans [1].

## Références bibliographiques

[1] R. Camalès, Monodromie du problème de Cauchy ramifié, en préparation.
[2] Y. Hamada, J. Leray, C. Wagschal, Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifé ; hyperbolicité partielle, J. Math. Pures Appl. 55 (1976) 297–352.
[3] E. Leichtnam, Le problème de Cauchy ramifié, Ann. Sci. École Norm. Sup. 23 (1990) 369–443.
[4] P. Pongérard, C. Wagschal, Ramification non abélienne, J. Math. Pures Appl. 77 (1998) 51–88.