C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 463–468

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Variétés complexes dont l'éclatée en un point est de Fano

Laurent Bonavero [a], Frédéric Campana [b], Jarosław A. Wiśniewski [c]

[a] Institut Fourier, UFR de mathématiques, Université de Grenoble 1, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, France

[b] Institut Élie Cartan, Université H. Poincaré, Nancy 1, UMR 7502, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, France

[c] Instytut Matematyki UW Banacha 2, PL-02-097 Warszawa, Pologne

Reçu le 21 janvier 2002 ; accepté le 24 janvier 2002

Note présentée par Jean-Pierre Demailly.

Résumé Nous classifions les variétés projectives complexes X pour lesquelles il existe un point a tel que l'éclatement de X en a soit une variété de Fano. Nous en déduisons qu'en dimension supérieure ou égale à trois, la quadrique est la seule variété complexe X pour laquelle il existe deux points distincts a et b tel que l'éclatement de X de centre $\{a, b\}$ soit une variété de Fano. ***Pour citer cet article : L. Bonavero et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 463–468.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Complex manifolds whose blow-up at a point is Fano

Abstract We classify complex projective manifolds X for which there exists a point a such that the blow-up of X at a is Fano. As a consequence, we get that, in dimension greater or equal than three, the quadric is the only complex manifold X for which there exists two distinct points a and b such that the blow-up of X with center $\{a, b\}$ is Fano. ***To cite this article: L. Bonavero et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 463–468.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

1. Introduction

Birational geometry of Fano manifolds, i.e., complex projective manifolds with ample anticanonical bundle, is an important aspect of Mori theory and the behaviour of Fano manifolds under smooth blow-ups or blow-downs is a natural question (already studied in [10]) linked to the weak factorization of birational maps [1] and the works in the toric setup of Sato [9] or Casagrande [6]. The main result of this Note is the following.

THEOREM 1.1. – *Let X be a complex connected manifold of dimension $n \geqslant 3$. Let $a \in X$ and $\pi_a : \widetilde{X} \to X$ be the blow-up of X at a. Then $\widetilde{X}$ is Fano if and only if*:

Adresses e-mail : bonavero@ujf-grenoble.fr (L. Bonavero); campana@iecn.u-nancy.fr (F. Campana); jarekw@mimuw.edu.pl (J.A. Wiśniewski).

S1631-073X(02)02284-7/FLA

(i) *either X is isomorphic to $\mathbb{P}^n$ and a is any point of X;*
(ii) *or X is isomorphic to the quadric $\mathcal{Q}_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ and a is any point of X;*
(iii) *or X is isomorphic to the manifold V_d obtained by blowing up $\mathbb{P}^n$ along a submanifold Y of dimension $n-2$, of degree d with $1 \leqslant d \leqslant n$ contained in a hyperplane H and $a \notin H$.*

This result immediately implies the following characterization of the quadric in terms of punctual blow-ups.

COROLLARY 1.2. – *Let X be a complex connected manifold of dimension $n \geqslant 3$. Let a and b two distinct points of X and $\pi_{a,b} : \widetilde{X} \to X$ be the blow-up of X with center $\{a, b\}$. Then $\widetilde{X}$ is Fano if and only if X is isomorphic to the quadric $\mathcal{Q}_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ and a and b are not on the same line of $\mathcal{Q}_n$.*

2. Main ideas of the proof of Theorem 1.1

The proof relies on Mori theory. Recall that if X is a projective manifold, $\mathrm{NE}(X)$ is the Mori cone of X, i.e., the cone of effective 1-cycles, modulo numerical equivalence. If X is Fano, $\mathrm{NE}(X)$ is closed, polyhedral and for any extremal ray of R of $\mathrm{NE}(X)$, there exists a contraction $\varphi_R : X \to Y$, where Y is projective, singular in general, such that a curve of X is contracted to a point if and only if its class belongs to R. The first easy step is the following.

LEMMA 2.1. – *Let $\widetilde{X}$ be a Fano manifold of dimension n and $\widetilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ be a divisor of $\widetilde{X}$. Then, there exists an extremal contraction $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ determined by an extremal ray $R = \mathbb{Q}^+[\widetilde{F}]$ with $\widetilde{F} \cdot \widetilde{D} > 0$ where $\widetilde{F}$ is a curve generating R.*

Then, we study the structure of φ.

PROPOSITION 2.1. – *Let $\widetilde{X}$ be a Fano manifold of dimension n, $\widetilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ be a divisor of $\widetilde{X}$ with normal bundle $N_{\widetilde{D}/\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ and $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ an extremal contraction determined by an extremal ray $R = \mathbb{Q}^+[\widetilde{F}]$ with $\widetilde{F} \cdot \widetilde{D} > 0$. Then $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ is one of the following*:
(a) *either the smooth $\mathbb{P}^1$-bundle $\varphi : \widetilde{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)) \to X' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ and $\widetilde{D}$ is the divisor $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$; or*
(b) *a smooth blow-down with smooth codimension two center $Y' \subset X'$. Moreover $\varphi_{|\widetilde{D}} : \widetilde{D} \to D' := \varphi(\widetilde{D})$ is an isomorphism, $Y' \subset D'$ has degree $d'+1$ where d' is the degree of $N_{D'/X'}$ and X' is Fano.*

To prove this result, we observe that any fiber $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ has dimension less than one and use the classification of such extremal contraction due to Ando [2] and Wiśniewski [10]. The main point is to exclude the case of singular conic bundle. It is given by the following lemma:

LEMMA 2.2. – *Let Z be a projective manifold of dimension $n \geqslant 3$ and $\varphi : Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ be an elementary contraction, which is a conic bundle wuith at least one singular fiber. Let D be a divisor of Z isomorphic to $\mathbb{P}^{n-1}$ with normal bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)$. Then d is even.*

Finally, the last step is the following:

PROPOSITION 2.2. – *Let $\widetilde{X}$ be a Fano manifold of dimension n and $\widetilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ be a divisor of $\widetilde{X}$ with normal bundle $N_{\widetilde{D}/\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$. Let $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ be a birational extremal contraction determined by an extremal ray $R = \mathbb{Q}^+[\widetilde{F}]$ with $\widetilde{F} \cdot \widetilde{D} > 0$ and $\psi : X' \to X''$ be an extremal contraction determined by an extremal ray $R' = \mathbb{Q}^+[F']$ with $F' \cdot \varphi(\widetilde{D}) > 0$. Then $\psi : X' \to X''$ is one of the following*:
(a) *either a constant map and $X' \simeq \mathbb{P}^n$;*
(b) *or the smooth $\mathbb{P}^1$-bundle $\psi : X' \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d')) \to X'' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ with $0 \leqslant d' \leqslant n-1$ and $D' := \varphi(\widetilde{D})$ is the divisor $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$.*

Pour citer cet article : L. Bonavero et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 463–468

1. Introduction

La géométrie birationnelle des variétés de Fano, i.e. des variétés complexes compactes dont le fibré anti-canonique est ample, intervient de façon essentielle en théorie de Mori et le comportement des variétés de Fano par éclatements ou contractions lisses est une question naturelle (étudiée en particulier dans [10]) à la suite d'une part du théorème de factorisation des applications birationnelles [1] et d'autre part de l'étude torique récente menée par Sato [9] (*voir* aussi le travail de Casagrande [6]). Nous démontrons dans cette Note le résultat suivant.

THÉORÈME 1.1. – *Soit X une variété complexe lisse et connexe de dimension $n \geqslant 3$. Soient $a \in X$ et $\pi_a : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de X en a. Alors $\widetilde{X}$ est une variété de Fano si et seulement si* :

(i) *soit X est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}^n$ et a est quelconque dans X* ;
(ii) *soit X est isomorphe à la quadrique $\mathcal{Q}_n$ et a est quelconque dans X* ;
(iii) *soit X est isomorphe à la variété V_d obtenue en éclatant $\mathbb{P}^n$ le long d'une sous-variété lisse Y de dimension $n-2$, de degré d avec $1 \leqslant d \leqslant n$ contenue dans un hyperplan H et $a \notin H$.*

Le premier auteur a obtenu la version torique de ce résultat en classifiant plus généralement les variétés toriques de Fano de dimension $n \geqslant 3$ contenant un diviseur torique isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}$ [5]. En dimension trois, le Théorème 1.1 peut se démontrer directement à l'aide de la classification des variétés de Fano de dimension trois de Mori et Mukai. Le Théorème 1.1 possède le corollaire immédiat suivant caractérisant la quadrique en termes d'éclatements ponctuels :

COROLLAIRE 1.2. – *Soit X une variété complexe lisse et connexe de dimension $n \geqslant 3$. Soient a et b deux points distincts de X et $\pi_{a,b} : \widetilde{X} \to X$ l'éclatement de X de centre $\{a, b\}$. Alors $\widetilde{X}$ est une variété de Fano si et seulement si X est isomorphe à la quadrique $\mathcal{Q}_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ et a et b ne sont pas sur une même droite de $\mathcal{Q}_n$.*

2. Résultats préparatoires

Si X est une variété projective, on note $\mathrm{NE}(X)$ le cône de Mori de X, ou cône des 1-cycles effectifs modulo l'équivalence numérique. Si X est non singulière de Fano, alors $\mathrm{NE}(X)$ est fermé, polyédral, et pour toute arête R de $\mathrm{NE}(X)$, il y a une contraction $\varphi_R : X \to Y$ de X sur une variété projective éventuellement singulière Y telle que les courbes irréductibles contractées par φ_R sont exactement celles dont la classe appartient à R. Il découle du critère de Kleiman que si W_d est la variété obtenue en éclatant $\mathbb{P}^n$ le long d'une sous-variété lisse Y de dimension $n-2$, de degré d contenue dans un hyperplan H de $\mathbb{P}^n$ et en un point a n'appartenant pas à H, alors W_d est de Fano si et seulement si $1 \leqslant d \leqslant n$. Les variétés V_d satisfont donc bien l'hypothèse du Théorème 1.1, les paragraphes suivants sont consacrés à la réciproque. Dans la suite, si V est un espace vectoriel, $\mathbb{P}(V)$ désigne l'espace projectif des *droites* de V.

LEMME 2.1. – *Soient $\widetilde{X}$ une variété de Fano de dimension n et $\widetilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ un diviseur de $\widetilde{X}$. Alors il existe une contraction extrémale $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ d'arête $R = \mathbb{Q}^+[\widetilde{F}]$ avec $\widetilde{F} \cdot \widetilde{D} > 0$ où $\widetilde{F}$ est une courbe rationnelle engendrant R.*

Démonstration. – Soit $\widetilde{C}$ une courbe telle que $\widetilde{C} \cdot \widetilde{D} > 0$. Cette courbe est numériquement combinaison linéaire à coefficients rationnels strictements positifs de courbes extrémales. L'une d'entre elles, notée $\widetilde{F}$ satisfait $\widetilde{F} \cdot \widetilde{D} > 0$. □

La proposition suivante précise la structure de la contraction extrémale donnée par le Lemme 2.1.

PROPOSITION 2.2. – *Soient $\widetilde{X}$ une variété de Fano de dimension $n \geqslant 3$, $\widetilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ un diviseur de $\widetilde{X}$ de fibré normal $N_{\widetilde{D}/\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ et $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ une contraction extrémale d'arête $R = \mathbb{Q}^+[\widetilde{F}]$ avec $\widetilde{F} \cdot \widetilde{D} > 0$. Alors $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ est de l'un des deux types suivants* :

(a) *la fibration lisse en* $\mathbb{P}^1$ *sur* $\mathbb{P}^{n-1}$ *donnée par* $\varphi : \widetilde{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)) \to X' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ *et* $\widetilde{D}$ *est le diviseur* $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$;

(b) *une contraction lisse de centre* $Y' \subset X'$ *lisse de codimension deux* (*i.e.* X' *est une variété projective lisse et* $\widetilde{X}$ *est obtenue en éclatant* X' *le long de* Y'). *De plus,* $\varphi_{|\widetilde{D}} : \widetilde{D} \to D' := \varphi(\widetilde{D})$ *est un isomorphisme,* $Y' \subset D'$ *est un diviseur de degré* $d'+1$ *où* d' *est le degré du fibré normal* $N_{D'/X'}$ *et* X' *est de Fano.*

Démonstration[1]. – Montrons tout d'abord que les fibres non triviales de φ sont de dimension un. En effet, si f est une fibre non triviale de φ, et si $\dim f \geqslant 2$, alors $\dim(f \cap \widetilde{D}) \geqslant 1$ et l'arête R contient donc une courbe contenue dans $\widetilde{D}$, ceci est absurde puisque $R \cdot \widetilde{D} > 0$ alors que $N_{\widetilde{D}/\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$. Il découle des résultats de Ando [2] et Wiśniewski [10] que X' est lisse et que $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ est de l'un des trois types suivants : (i) une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$, (ii) une fibration en coniques (ce qui signifie qu'il y a effectivement des fibres singulières), (iii) une contraction lisse de centre $Y' \subset X'$ lisse de codimension deux. Dans les cas (i) et (ii), $\varphi_{|\widetilde{D}} : \widetilde{D} \to X'$ est finie, et comme $\widetilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$, il s'ensuit que $X' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ d'après [7] et par suite que $\rho(\widetilde{X}) = 2$.

Dans le cas (i), soit l une droite de X' et S_l la surface réglée $S_l = \varphi^{-1}(l)$ (S_l est une surface de Hirzebruch $\mathbf{F}_a$). Comme $\widetilde{D}$ est exceptionnel dans $\widetilde{X}$, $\widetilde{D} \cap S_l$ l'est dans S_l. Il s'ensuit que $\widetilde{D}$ est une section de φ et de là $\widetilde{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1))$.

Excluons le cas (ii). Dans ce cas, il y a une courbe C (composante d'une fibre singulière) sur l'arête R telle que $-K_{\widetilde{X}} \cdot C = 1$, $\mathcal{E} := \varphi_*(-K_{\widetilde{X}})$ est un fibré vectoriel de rang 3 sur X' (*voir* par exemple [3] Theorem B), $\widetilde{X}$ est une sous-variété de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$, et $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ est la restriction de la projection naturelle $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*) \to X'$. Or, cette situation est exclue par le Lemme 2.3 ci-dessous car $N_{\widetilde{D}/\widetilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$.

Dans le cas (iii), notons $\widetilde{E}$ le diviseur exceptionnel de φ. Comme $R \cdot \widetilde{D} > 0$, chaque fibre non triviale de φ rencontre $\widetilde{D}$. Puisque $\varphi_{|\widetilde{E}} : \widetilde{E} \to Y'$ est une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$ et que $\widetilde{D} \cap \widetilde{E}$ est exceptionnel dans $\widetilde{E}$, il s'ensuit que $\widetilde{D} \cap \widetilde{E}$ est une section (*a priori* non nécessairement réduite) de $\varphi_{|\widetilde{E}}$. *Admettons un instant* que cette section est réduite (autrement dit, $\widetilde{D}$ et $\widetilde{E}$ s'intersectent transversalement). De là, $\varphi_{|\widetilde{D}} : \widetilde{D} \to D' := \varphi(\widetilde{D})$ est un isomorphisme. Donc $Y' \subset D' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ comme diviseur de degré $d'+1$ si $d' \geqslant 0$ désigne le degré du fibré normal $N_{D'/X'}$. Il s'ensuit aussi que X' est de Fano. Il nous reste à vérifier que si $Y_0 := (\widetilde{D} \cap \widetilde{E})_{\mathrm{red}}$, la multiplicité d'intersection de $\widetilde{E}$ et $\widetilde{D}$ le long de Y_0 est égale à un. Autrement dit, écrivons $\widetilde{D}_{|\widetilde{E}} = mY_0$ et montrons que $m = 1$. Soit N le fibré normal de Y_0 dans $\widetilde{E}$. Dans $\mathrm{Pic}(Y_0)$, on a $\widetilde{D}_{|Y_0} = mN$. Or, pour $n \geqslant 4$, l'application de restriction $\mathrm{Pic}(\widetilde{D}) \simeq \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(Y_0)$ est injective et son conoyau est sans torsion d'après le théorème de Lefschetz (*voir* par exemple [4], p. 51). Comme $\widetilde{D}_{|\widetilde{D}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ est un générateur de $\mathrm{Pic}(\widetilde{D})$, il s'ensuit que $m = 1$ (pour $n = 3$, la Proposition 2.2 comme le Théorème 1.1 découlent par exemple de la classification). □

LEMME 2.3. – *Soit Z une variété projective lisse de dimension $n \geqslant 3$ et $\varphi : Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ une contraction élémentaire, fibration en coniques, possédant au moins une fibre singulière. Supposons que D est un diviseur de Z isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}$ de fibré normal $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)$. Alors d est pair.*

Démonstration. – Comme précédemment, on peut supposer que Z est une sous-variété de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$ où $\mathcal{E} = \varphi_*(-K_Z)$ et que $\varphi : Z \to \mathbb{P}^{n-1}$ est la restriction de la projection naturelle $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*) \to \mathbb{P}^{n-1}$. Soit C une courbe de Z, composante d'une fibre singulière, telle que $-K_{\widetilde{Z}} \cdot C = 1$ (en particulier, C est une droite de $\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)$) et soit $a = D \cdot C$. Alors l'intersection de D avec la fibre générique de φ vaut $2a$ et $\varphi_{|D} : D \to \mathbb{P}^{n-1}$ est finie de degré (topologique) égal à $2a$. Soit r le degré algébrique de $\varphi_{|D} : D \to \mathbb{P}^{n-1}$ (autrement dit, $\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)_{|D} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(r)$) : par le théorème de Bezout, $2a = r^{n-1}$ donc r et a sont pairs. Comme $\rho(Z/\mathbb{P}^{n-1}) = 1$, l'application de restriction $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)) \to \mathrm{Pic}(Z)$ est un isomorphisme et il existe donc $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{O}(D) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)}(a)_{|Z} \otimes \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(b)$. Comme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)}(1)_{|Z} = -K_Z$, la formule d'adjonction donne $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}^*)}(1)_{|D} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(n+d)$, d'où $\mathcal{O}(D)_{|D} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(a(n+d)+br)$ donc $d = a(n+d)+br$ et d est pair. $\square$

L'idée de la démonstration du Théorème 1.1 est simple : la Proposition 2.2 produit une variété de Fano X'. Dans le cas (b), on peut appliquer le Lemme 2.1 à X' et D' et étudier la contraction extrémale obtenue $\psi : X' \to X''$. Le fait que X' provienne de $\widetilde{X}$ va nous permettre de décrire complètement la situation. Ceci est l'objet de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. – *Soient $\widetilde{X}$ une variété de Fano de dimension $n \geqslant 3$, $\widetilde{D} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ un diviseur de $\widetilde{X}$ avec $N_{\widetilde{D}/\widetilde{X}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$. Soient $\varphi : \widetilde{X} \to X'$ une contraction extrémale birationnelle d'arête $R = \mathbb{Q}^+[\widetilde{F}]$ avec $\widetilde{F} \cdot \widetilde{D} > 0$ et $\psi : X' \to X''$ une contraction extrémale d'arête $R' = \mathbb{Q}^+[F']$ avec $F' \cdot \varphi(\widetilde{D}) > 0$. Alors $\psi : X' \to X''$ est de l'un des deux types suivants :*
(a) *une application constante et $X' \simeq \mathbb{P}^n$;*
(b) *une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^{n-1}$ donnée par $\psi : X' \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d')) \to X'' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ avec $0 \leqslant d' \leqslant n-1$ et $D' := \varphi(\widetilde{D})$ est le diviseur $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$.*

Démonstration. – Puisque φ est birationnelle, nous sommes dans la situation (b) de la Proposition 2.2 dont nous gardons les notations : φ est une contraction lisse de centre $Y' \subset \varphi(\widetilde{D}) = D' \subset X'$ lisse de codimension deux. Montrons tout d'abord que soit ψ est constante (et donc $\rho(X') = 1$), soit les fibres non triviales de ψ sont de dimension un. En effet, comme pour la Proposition 2.2, si ψ possède une fibre de dimension au moins deux, alors l'arête R' contient une courbe rationnelle, notée C, contenue dans D'. Par conséquent, $d' = \deg(N_{D'/X'}) > 0$ et C est une courbe très libre, donc ses déformations avec point fixé dans D' couvrent un ouvert de X', et par suite ψ est constante et $\rho(X') = 1$. Dans ce cas, il découle du Lemme 2.5 ci-après que $X' \simeq \mathbb{P}^n$. Plaçons nous maintenant dans le cas où les fibres non triviales de ψ sont de dimension un. Comme précédemment, par [2] et [10], X'' est lisse et ψ est de l'un des trois types suivants : (i) une fibration lisse en $\mathbb{P}^1$, (ii) une fibration en coniques ou (iii) une contraction lisse de centre $Y'' \subset X''$ lisse de codimension deux.

Nous allons montrer que seul le cas (i) est possible et l'observation suivante est cruciale : *soit $C' \subset X'$ une courbe non contenue dans Y' (le centre de φ). Si $-K_{X'} \cdot C' = 1$, alors C' ne rencontre pas Y' et si $-K_{X'} \cdot C' = 2$, alors C' rencontre transversalement Y' en exactement un point.* En effet, par l'absurde, si $\widetilde{C} \subset \widetilde{X}$ est la transformée stricte de C', alors $-K_{\widetilde{X}} \cdot \widetilde{C} = -K_{X'} \cdot C' - \widetilde{E} \cdot \widetilde{C} \leqslant 0$, ce qui contredit $\widetilde{X}$ Fano. Excluons le cas (ii) : comme l'union des fibres singulières est un diviseur de X', son intersection avec D' rencontre Y' puisque Y' est de codimension deux dans X'. Ainsi Y' rencontre l'une des fibres scindées $F' = F'_1 + F'_2$ de ψ, avec $-K_{X'} \cdot F'_i = 1$, ce qui n'est pas possible d'après l'observation précédente. Excluons de même le cas (iii) : les fibres F' non triviales de ψ vérifient $-K_{X'} \cdot F' = 1$ et rencontrent toutes D', donc certaines rencontrent Y'.

Etudions maintenant le cas (i) : d'après [7], $X'' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ puisque $\psi_{|D'} : D' \to X''$ est finie. Montrons que $\psi_{|D'} : D' \to X''$ est un isomorphisme (de là, D' est une section de ψ, et la conclusion (b) s'ensuit !). Comme toutes les fibres F' de ψ vérifient $-K_{X'} \cdot F' = 2$, l'observation ci-dessus montre que les fibres de ψ rencontrant Y' le font transversalement en exactement un point. Il s'ensuit que $\psi_{|Y'} : Y' \to Y'' := \psi(Y')$ est un isomorphisme. Comme Y' (resp. Y'') est une hypersurface de l'espace projectif D' (resp. X''), le théorème de Lefschetz assure que $\psi^* : \mathrm{Pic}(X'') \to \mathrm{Pic}(D')$ est un isomorphisme et par suite que $\psi_{|D'}$ est un isomorphisme. $\square$

LEMME 2.5. – *Soit X' une variété projective lisse de dimension $n \geqslant 3$ contenant un diviseur $D' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$. Si $\rho(X') = 1$, alors $X' \simeq \mathbb{P}^n$ et D' est un hyperplan.*

Démonstration. – Puisque $\rho(X') = 1$, le diviseur D' est ample et X' est de Fano. Comme les variétés de Fano sont classifiées en dimension au plus trois où le lemme se vérifie directement, on peut supposer que $n \geqslant 4$. Le théorème de Lefschetz assure alors que l'application de restriction $\mathrm{Pic}(X') \to \mathrm{Pic}(D') = \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ est un isomorphisme. Soit donc $\mathcal{O}_{X'}(1)$ le générateur ample de $\mathrm{Pic}(X')$ dont la restriction à D'

est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$. Soit ν l'indice de $-K_{X'}$. Par la formule d'adjonction, $-K_{X'|D'} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(\nu) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(n+m)$ où m est le degré de $N_{D'/X'}$. Comme $m > 0$, il s'ensuit que $\nu \geqslant n+1$, d'où $\nu = n+1$, $X' \simeq \mathbb{P}^n$ et D' est un hyperplan. $\square$

3. Démonstration du Théorème 1.1

Soit X une variété complexe de dimension $n \geqslant 3$ et supposons qu'il existe $a \in X$ tel que l'éclatée de X en a, notée $\widetilde{X}$, soit de Fano. Notons $\widetilde{D}$ le diviseur exceptionnel de l'éclatement $\pi_a : \widetilde{X} \to X$ et appliquons la Proposition 2.2. Dans le cas (a), $\varphi : \widetilde{X} \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)) \to X' \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ et $\widetilde{D}$ est le diviseur $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$. Il s'ensuit que X est isomorphe à $\mathbb{P}^n$. Sinon, dans le cas (b), appliquons la Proposition 2.4 et il y a à nouveau deux cas. Soit $X' \simeq \mathbb{P}^n$ et $\varphi : \widetilde{X} \to X' \simeq \mathbb{P}^n$ est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long d'une quadrique $\mathcal{Q}_{n-2}$ contenue dans un hyperplan. Il s'ensuit que X est la quadrique $\mathcal{Q}_n$ de dimension n. Sinon, il y a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\mu"] & \widetilde{X} \arrow[l, "\pi_a"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"'] & X' \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(d')) \arrow[d, "\psi"'] \\
\mathbb{P}^n & \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)) \arrow[l, "\nu"'] \arrow[r, "\psi'"] & X'' \simeq \mathbb{P}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

où μ est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ le long d'une sous-variété Y de codimension deux dans $\mathbb{P}^n$, contenue dans un hyperplan H avec $\mu(a) \notin H$ et Y de degré $d'+1$ dans H. Explicitons en détail le diagramme précédent : φ est l'éclatement de centre $Y' \subset D' = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}) \subset X'$ où Y' est un diviseur de D' de degré $d'+1$. Soit $E' = \psi^{-1}(\psi(Y'))$ l'union des fibres de ψ rencontrant Y'. Alors la transformée stricte $\widetilde{E}'$ de E' par φ est exceptionnelle (*voir* par exemple [8]) et correspond à l'éclatement φ' de $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ de centre $Z \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ où Z est un diviseur de $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})$ de degré $d'+1$. Cette partie du diagramme est une transformation élémentaire de Maruyama [8]. L'application ν est la contraction sur un point du diviseur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1) \subset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))$ et μ est l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ de centre $Y := \nu(\varphi'(\widetilde{D} \cap \widetilde{E}'))$, qui est un diviseur de degré $d'+1$ de $H := \nu(\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}})) = \nu(\varphi'(\widetilde{D}))$. Enfin, $a = \mu^{-1}(\nu(\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1))))$. Autrement dit, $X \simeq V_{d'+1}$ avec les notations du théorème.

Remerciements. J.A. Wiśniewski bénéficie du soutien financier du contrat 2P03A02216 du KBN Polonais.

[1] Nous remercions le referee anonyme qui nous a mentionné les erreurs contenues dans une première version de ce travail.

Références bibliographiques

[1] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, Torification and factorization of birational maps, Preprint math.AG/9904135.
[2] T. Ando, On extremal rays of the higher-dimensional varieties, Invent. Math. 81 (2) (1985) 347–357.
[3] M. Andreatta, E. Ballico, J.A. Wiśniewski, Two theorems on elementary contractions, Math. Ann. 297 (2) (1993) 191–198.
[4] M.C. Beltrametti, A.J. Sommese, The Adjunction Theory of Complex Projective Varieties, De Gruyter Exp. Math., 1995.
[5] L. Bonavero, Toric varieties whose blow-up at a point is Fano, Tohoku Math. J. (accepté).
[6] C. Casagrande, On the birational geometry of toric Fano 4-folds, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (2001) 1093–1098.
[7] R. Lazarsfeld, Some applications of the theory of positive vector bundles, in: Complete Intersections, Acireale, 1983, Lecture Notes in Math., Vol. 1092, Springer, Berlin, 1984, pp. 29–61.
[8] M. Maruyama, Elementary transformations in the theory of algebraic vector bundles, in: Algebraic Geometry, Proc. Int. Conf., La Rabida/Spain, 1981, Lecture Notes in Math., Vol. 961, 1982, pp. 241–266.
[9] H. Sato, Toward the classification of higher-dimensional toric Fano varieties, Tohoku Math. J. (2) 52 (3) (2000) 383–413.
[10] J.A. Wiśniewski, On contractions of extremal rays of Fano manifolds, J. Reine Angew. Math. 417 (1991) 141–157.