C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 483–488

Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

# Bifurcations d'applications unimodales

**Artur Avila**

**Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris, France**

**Reçu le 11 janvier 2002 ; accepté après révision le 24 janvier 2002**

**Note présentée par Jean-Christophe Yoccoz.**

**Résumé** Dans les familles non triviales d'applications unimodales presque tout paramètre a de bonnes propriétés statistiques. Ceci découle de la structure d'espaces de Banach d'applications unimodales analytiques et de la relation de phase-paramètre des bifurcations génériques. ***Pour citer cet article : A. Avila, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 483–488.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

**Bifurcations of unimodal maps**

**Abstract** In non-trivial analytic families of unimodal maps, the dynamics of almost every parameter has a good stochastic description. ***To cite this article: A. Avila, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 483–488.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

## *Abridged English version*

### 1. Introduction

A unimodal map is a $C^2$ map $f : I \to I$, $I = [-1, 1]$, which has one unique critical point $c \in \operatorname{int} I$ and such that $f(-1) = f(1) = -1$. The main examples of unimodal maps are supplied by the quadratic family $f_\lambda(x) = \lambda(1 - x^2) - 1$, $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 2$.

Unimodal maps have very simple dynamics when they are hyperbolic. This is always the case when they are regular, that is, Kupka–Smale (the critical point is non-degenerate and all periodic orbits are hyperbolic) and the critical point is attracted by some periodic orbit without being preperiodic. Regular maps are structurally stable: any $C^2$ small perturbation is topologically conjugate to the map itself.

By Jakobson's theorem, the set of parameters $\lambda$ such that the quadratic map $f_\lambda$ is not regular has positive Lebesgue measure. Our aim in this work is to describe the structure of the set of non-regular parameters in families of unimodal maps and analyze the dynamics of almost every parameter from the statistical point of view. Full proofs can be found in [1]. See [9] for general background.

#### 1.1. Strategy

The complexity of the dynamics of unimodal maps can be credited to the presence of the critical point. To control the critical orbit, we will couple several results on the complex dynamics of the extensions of analytic unimodal maps in order to setup a nice framework to perform a delicate probabilistic analysis. This approach can be summarized below.

*Structure of spaces of unimodal maps.* We consider Banach spaces of analytic unimodal maps and describe the partition of non-regular maps in topological conjugacy classes: it forms an analytic lamination "almost everywhere." Notice that before this step, the very notion of generic bifurcation of unimodal maps

© 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés
S1631-073X(02)02282-3/FLA

does not make sense in general. Now it is turned into a very natural concept: transversality with respect to the above lamination. This makes the next step particularly simple:

*Analytic families bifurcate generically*. An analytic family of unimodal maps can be considered as a path in some Banach space of real analytic unimodal maps. A general transversality argument shows that such a family must be transverse almost everywhere to the foliation, unless the family is extremely degenerate.

*Relation between phase space and parameter space at generic bifurcations.* We must have a way to estimate the measure of parameters with a certain dynamical behavior near a generic bifurcation. In order to do so we define a correspondence between the phase and parameter spaces of the family. Transversality to the lamination yields the topological resemblance between phase and parameter. To quantify this relation we need several geometric estimates of Lyubich, as well as certain new tricks.

*Exclusion of parameters.* We proceed to show that suboptimal, bad, or just plain pathological dynamical behaviors correspond to a zero Lebesgue measure set of parameters. The start of this work involves results of Lyubich on the Lebesgue measure of parameters corresponding to dynamics with big non-linearity. To obtain finer results, we need to control in detail the critical orbit. To do this we develop highly effective techniques for the statistical analysis of first return maps, which are designed to be coupled with the metric estimates for the phase-parameter relation obtained in the previous step.

After describing the dynamics of analytic families, we apply those results to generic smooth families.

The first two steps are slight improvements on my collaboration with Lyubich and de Melo [2], and the later two are improvements on my collaboration with Moreira [3,4].

## 2. Main results

We say that an analytic family of unimodal maps $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, is non-trivial if the set of regular parameters is dense. Due to the description of spaces of unimodal maps [2], it follows that non-triviality is a very weak requirement (in the metrical and topological sense, moreover the set of trivial families has "infinite codimension"). We first show that (in such a family) the essential dynamics (the one that concerns the critical point $c_\lambda$) of a typical non-regular unimodal map is given topologically by a quadratic map.

THEOREM 2.1. – *Let $\{f_\lambda\}$ be a non-trivial analytic family of unimodal maps. Then for almost every non-regular parameter $\lambda$, $f_\lambda$ admits a restrictive interval $J$ of period $n$ such that $f_\lambda^n : J \to J$ is topologically conjugate to a quadratic map.*

To describe more precisely the dynamics of such maps we can use the tools developed in [3] to control the critical orbit. We obtain exponential expansion along the critical orbit (Collet–Eckmann condition), and a very precise polynomial estimate of the rate of recurrence of the critical point.

THEOREM 2.2. – *Let $\{f_\lambda\}$ be a non-trivial analytic family of unimodal maps. Then for almost every non-regular parameter $\lambda$, $f_\lambda$ satisfies the Collet–Eckmann condition and the recurrence of $c_\lambda$ is polynomial with exponent* 1: *the set of values of $n$ satisfying $|f_\lambda^n(c_\lambda) - c_\lambda| < n^{-\gamma}$ is finite if $\gamma > 1$ and infinite if $\gamma < 1$.*

A polynomial bound for the recurrence of the critical orbit had been conjectured by Sinai in the 1970s.

In the 1990s several works gave a very precise statistical description of the dynamics of unimodal maps satisfying the above conditions. Some of the most interesting results are described in the application below:

COROLLARY 2.3. – *Let $\{f_\lambda\}$ be a non-trivial analytic family of unimodal maps. For almost every non-regular parameter $\lambda$, there exists a restrictive interval $J$ of period $n$ such that the map $F_\lambda \equiv f_\lambda^n : J \to J$ is topologically mixing. The set of points which are attracted either by $J$ or by some attractive periodic orbit* (*which are in finite number*) *is open, and its complement is a uniformly expanding set. The dynamics of $F_\lambda : J \to J$ can be described by a unique ergodic absolutely continuous invariant probability measure $\mu$: for almost every $x \in J$, the distribution of $\{F_\lambda^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ is given by $\mu$. Moreover, $\mu$ has exponential decay of correlations for a certain class of observables and is stochastically stable in the strong sense.* [1]

Those arguments can be coupled with more classical "Jakobson-like" methods of Tsujii to obtain:

THEOREM 2.4. – *There exists a residual set of families of unimodal maps $\{f_\lambda\}$ with $k$-parameters, $k = 1, 2, \ldots,$ and of class $C^r$, $r = 2, 3, \ldots, \infty$, such that for almost every non-regular parameter $\lambda$, $f_\lambda$ is*

*Kupka–Smale and has a restrictive interval where the dynamics is conjugate to a quadratic map. Moreover, $f_\lambda$ satisfies the Collet–Eckmann condition and has subexponential recurrence of its critical point.*

In particular those parameters enjoy the good ergodic properties of Corollary 2.3 provided $r \geqslant 3$. In class $C^2$, we still have exponential mixing, but we have to replace stochastic stability in the strong sense by stochastic stability in the weak-$*$ sense. This answers the Palis conjecture for the unimodal case.

## 1. Introduction

Une application unimodale est un endomorphisme de l'intervalle $I = [-1, 1]$ de classe $C^2$, avec un point critique unique $c \in \operatorname{int} I$ et tel que $f(-1) = f(1) = -1$. Les exemples les plus connus d'applications unimodales sont les applications quadratiques $f_\lambda(x) = \lambda(1 - x^2) - 1$ où $\lambda$ est un paramètre entre $1/2$ et 2.

Les applications unimodales ont une dynamique très simple si elles sont hyperboliques.[2] C'est toujours le cas si $f$ est une application régulière, c'est-à-dire, Kupka–Smale[3] et dont le point critique est attiré par une orbite périodique (sans être pré-périodique). Les applications régulières sont toujours structurellement stables : toute petite perturbation de classe $C^2$ est dans la même classe de conjugaison topologique.

Le théorème de Jakobson nous montre qu'il existe beaucoup d'applications unimodales non régulières : dans la famille quadratique, l'ensemble des paramètres non réguliers a une mesure de Lebesgue positive. Ceci reste encore vrai même si on considère des familles $C^2$-proches de la famille quadratique.

Notre but dans ce travail est de décrire la structure de l'ensemble des paramètres non réguliers dans les familles d'applications unimodales, et ensuite de faire une analyse statistique de la dynamique de presque tout paramètre. Les preuves complètes sont dans [1]. Pour des références générales, voir [9].

### 1.1. Stratégie

La complexité de la dynamique des applications unimodales vient de la présence du point critique. Pour contrôler l'orbite critique, on va combiner beaucoup de résultats sur la dynamique complexe des extensions d'applications unimodales analytiques. Ceci va nous permettre d'obtenir un cadre adapté à une délicate analyse probabiliste. Cette approche est décrite ci-dessous :

*Structure des espaces d'applications unimodales.* On considère des espaces de Banach d'applications unimodales analytiques et on décrit la partition des applications unimodales non régulières en classes de conjugaison topologiques. On montre que cette partition est une lamination analytique de codimension un.

Avant cette description, la notion même de bifurcation générique n'a pas de sens précis pour des applications unimodales générales. Maintenant elle devient naturelle : transversalité à la lamination. Le prochain pas est par conséquent très facile :

*Les bifurcations dans les familles analytiques sont génériques.* Une famille analytique d'applications unimodales peut être considérée comme un chemin dans un des espaces de Banach ci-dessus. Un argument de transversalité très général nous montre qu'une famille doit être transverse presque partout, dès qu'elle n'est pas complètement dégénérée.

*Relation entre les espaces de phase et de paramètre pour des bifurcations génériques.* On a besoin d'une méthode d'estimation de mesure des paramètres avec un comportement dynamique donné près d'une bifurcation générique. Pour cela on définit une correspondance entre les espaces de phase et de paramètre de la famille. La transversalité à la lamination nous donne une relation topologique. Pour quantifier cette relation on a besoin des estimations géométriques de Lyubich et de certaines méthodes nouvelles.

*Exclusion des paramètres.* On doit montrer que les paramètres avec des dynamiques non optimales, mauvaises, ou pathologiques ont une mesure de Lebesgue nulle. Ce pas commence avec les résultats de Lyubich sur la mesure de Lebesgue nulle des paramètres avec une très grande non linéarité.[4] Pour obtenir des résultats plus fins, on a besoin d'un contrôle statistique de l'orbite critique. On développe des techniques très efficaces pour l'analyse probabiliste des applications de premier retour, qui sont conçues précisément pour être utilisées avec notre estimation de la relation entre phase et paramètre ci-dessus. Après la description de la dynamique des familles analytiques on applique ces résultats aux familles génériques lisses.

Les deux premiers pas sont de petites améliorations de mon travail en commun avec Lyubich et de Melo [2], et les deux derniers sont des raffinements de mes travaux en commun avec Moreira [3,4].

## 2. Espaces d'applications unimodales

On introduit quelques espaces de Banach d'applications analytiques de l'intervalle. Pour un $a > 0$ donné on définit $\Omega_a$, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui sont à une distance de $I$ inférieure à $a$. Soit $\mathbb{B}_{\Omega_a}$ l'espace de Banach des applications holomorphes $f : \Omega_a \to \mathbb{C}$ qui ont une extension continue à $\overline{\Omega}_a$. Soit $\mathcal{A}_a = \{f \in \mathbb{B}_{\Omega_a} \mid f(-1) = f(1) = -1\}$, un sous-espace affine de $\mathbb{B}_{\Omega_a}$, et $\mathcal{A}_a^{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A}_a \mid \overline{f(z)} = f(\overline{z})\}$. L'ensemble $\mathbb{U}_a$ des applications unimodales dans $\mathbb{B}_{\Omega_a}$ est donc un sous-ensemble de $\mathcal{A}_a^{\mathbb{R}}$.

THÉORÈME 2.1. – *Soit $f \in \mathbb{U}_a$ une application de type Kupka–Smale. Il y a un voisinage $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}_a$ de $f$ dans lequel toute classe de conjugaison topologique non régulière est une sous-variété analytique de codimension un, et ces classes forment les feuilles d'une lamination analytique réelle dans $\mathbb{V}$.*

Une lamination analytique réelle dans un ouvert de $\mathbb{U}_a$ est par définition l'intersection avec $\mathbb{U}_a$ d'une lamination complexe [5] dans un ouvert de $\mathcal{A}_a$. Il découle de la théorie générale des laminations complexes de codimension un que les applications d'holonomie de cette lamination ont des extensions quasisymétriques.

On note que l'ensemble des applications qui ne sont pas Kupka–Smale est contenu dans une réunion dénombrable d'ensembles analytiques de codimension un. Ce théorème donne donc une nouvelle démonstration du théorème de Kozlovski [5] de densité des applications unimodales régulières (qui est équivalent à dire que les classes de conjugaison topologiques non régulière sont des ensembles d'intérieur vide).

Un élément de la preuve du Théorème 2.1 est l'existence de perturbations infinitésimales de dynamiques non régulières qui sont transverses aux classes de conjugaison topologiques. Ceci peut être interprété comme une version infinitésimale du lemme de connexion de Hayashi.

### 2.1. Les bifurcations des familles analytiques sont génériques

On dit qu'une famille analytique d'applications unimodales est non triviale si les paramètres régulières sont denses. [6] Les familles non triviales sont très fréquentes. [7] De plus, un argument de transversalité donne :

PROPOSITION 2.2. – *Soit $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique non triviale d'applications unimodales. Pour presque tout paramètre $\lambda_0 \in \Lambda$, $f_{\lambda_0}$ est Kupka–Smale et $\{f_\lambda\}$ est transverse à la lamination en $\lambda_0$.*

## 3. Relation entre les espaces de phase et de paramètre

On considère des bifurcations génériques de familles analytiques à un seul paramètre. Pour établir une correspondance entre les espaces de phase et de paramètre, on considère, d'après Lyubich, certaines partitions de l'espace de phase près du point critique. Ces partitions sont associées, grossièrement, à une suite d'applications de premier retour $R_n$ à des voisinages $I_n$ du point critique. [8] Plus précisément, on considère la partition $\{I_n^j\}$ du domaine de $R_n$ en ses composantes connexes. Le complément du domaine de $R_n$ est un ensemble hyperbolique, donc il persiste pour un intervalle $J_n$ de paramètres proches.

L'application $R_n$ a un seul point critique. La valeur critique peut être n'importe où dans $I_n$ (en relation avec la partition $\{I_n^j\}$). Ceci nous permet d'obtenir une partition $\{J_n^j\}$ de l'intervalle $J_n$. La relation de phase-paramètre exprime comment ces deux partitions sont liées.

THÉORÈME 3.1. – *Soit $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille analytique à un paramètre d'applications unimodales et soit $\lambda_0$ un paramètre Kupka–Smale où l'on a une bifurcation générique telle que $f_{\lambda_0}$ a un point critique récurrent mais n'est pas infiniment renormalisable. Pour $n$ suffisamment grand, les partitions de phase et de paramètre de niveau $n$ sont liées par un homéomorphisme $h_n$. Certaines restrictions des $h_n$ ont des extensions quasisymétriques dont la constante converge vers $1$ quand $n \to \infty$.*

Ce théorème a été prouvé d'abord dans le cas quadratique dans [3] en utilisant les résultats de [7]. La propriété la plus importante de la famille quadratique qui est utilisée est qu'elle est une famille complète d'applications de type quadratique.[9] L'analyse combinatoire de l'ensemble de Mandelbrot qu'on doit à Douady–Hubbard permet à Lyubich de construire des extensions complexes des applications de premier retour qui sont elles-mêmes complètes. Ceci nous donne la relation de phase-paramètre topologique. L'analyse géométrique de Lyubich [6] peut être utilisée pour en déduire la relation métrique.

Dans le cas général, la partie topologique correspond à la transversalité. La partie quantitative est obtenue d'abord pour une famille spéciale complète (de premier retour) $\tilde{f}_\lambda$ qui passe par $f_{\lambda_0}$, qui est construite explicitement. On relie ensuite les espaces de phase et de paramètre de $f_\lambda$ et $\tilde{f}_\lambda$ en utilisant l'application d'holonomie de la lamination.

Poursuivant l'analogie avec le lemme de connexion, ce résultat peut être vu comme sa quantification.[10]

## 4. Propriétés typiques dans les familles d'applications unimodales

On montre d'abord que la dynamique essentielle (celle qui concerne le point critique $c_\lambda$) d'une application non régulière typique est donné, dans le sens topologique, par une application quadratique.

THÉORÈME 4.1. – *Soit $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille analytique non triviale d'applications unimodales. Pour presque tout paramètre $\lambda$ non régulier, il existe un intervalle restrictif $J$ de période $n$*[11] *pour lequel $f_\lambda^n : J \to J$ est topologiquement conjuguée à une application quadratique.*

En effet, une application de Kupka–Smale qui n'a pas de restriction pouvant être conjuguée à une application quadratique a un ensemble ouvert et dense qui est attiré par des orbites périodiques. C'est donc possible d'espérer que la dynamique devienne régulière sous perturbations. La quantification métrique de cette idée et l'utilisation de la relation de phase-paramètre sont la clé de ce résultat.

On est maintenant dans une situation idéale pour utiliser le théorème de Lyubich [8] et l'analyse statistique des applications de premier retour de [3] pour obtenir :

THÉORÈME 4.2. – *Soit $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille analytique non triviale d'applications unimodales. Pour presque tout paramètre $\lambda$, $f_\lambda$ satisfait la condition de Collet–Eckmann.*[12] *De plus, le point critique de $f_\lambda$ a une récurrence polynomiale avec exposant* 1.[13]

Ce théorème donne une solution à une conjecture de Sinai, qui a proposé des bornes polynomiales pour la récurrence de l'orbite critique dans les années 1970.

Plusieurs travaux ont été consacrés à la description stochastique d'applications unimodales avec un contrôle de l'orbite critique plus faible que celui des théorèmes ci-dessus. Parmi ces résultats, sont considérés l'existence des mesures invariantes absolument continues (Collet–Eckmann et d'autres), leur vitesse de mélange (Keller–Nowicki, Young) et leur stabilité (Baladi–Viana, Tsujii). Notre travail implique donc :

COROLLAIRE 4.3. – *Soit $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille non triviale d'applications unimodales. Pour presque tout paramètre non régulier $\lambda$, il y a un intervalle restrictif $J$ de période $n$ pour lequel l'application $F_\lambda \equiv f_\lambda^n : J \to J$ est topologiquement mélangeante. De plus, l'ensemble des points qui sont attirés soit par $J$, soit par une orbite périodique attractive* (*elles sont en nombre fini*) *est ouvert et son complément est un ensemble hyperbolique expansif. La dynamique de $F_\lambda$ peut être décrite par une seule mesure de probabilité invariante, ergodique et absolument continue $\mu$ : pour presque tout $x \in J$, la distribution asymptotique de l'orbite $\{F_\lambda^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est donnée par $\mu$. La mesure $\mu$ est exponentiellement mélangeante pour une certaine classe d'observables.*[14] *La mesure $\mu$ est stochastiquement stable dans un sens fort.*[15]

### 4.1. Familles lisses

Considérons des espaces de familles de classe $C^r$ à $k$ paramètres d'applications unimodales (on peut fixer l'espace de paramètre comme étant la boule unité $B^k$). Leur topologie naturelle leur donne une structure d'espace de Baire. Il est donc naturel de demander en quelle mesure les résultats ci-dessus peuvent être étendus aux familles lisses génériques. On peut coupler les résultats pour des familles analytiques avec des techniques « à la Jakobson » de Tsujii pour obtenir l'application suivante :

THÉORÈME 4.4. – *Il existe un ensemble résiduel de familles $\{f_\lambda\}_{\lambda \in B^k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ de classe $\mathrm{C}^r$, $r = 2, 3, \ldots, \infty$, telles que pour presque tout paramètre non régulier $\lambda$, $f_\lambda$ a un intervalle restrictif où la dynamique est conjuguée à une application quadratique. De plus, $f_\lambda$ est Collet–Eckmann et son point critique a une récurrence sous-exponentielle.* [16]

En particulier, les paramètres non réguliers ci-dessus ont des bonnes propriétés statistiques du Corollaire 4.3, si on suppose $r \geqslant 3$. Ceci répond à la conjecture de Palis dans le cas unimodal. [17]

---

[1] Suitable stochastic perturbations of $f$ have stationary measures close to $\mu$ in the sense of the $\mathrm{L}^1$ distance between their densities.

[2] C'est-à-dire, l'intervalle dynamique $I$ peut être décomposé en un ensemble hyperbolique expansif (d'habitude un ensemble de Cantor) et un ensemble ouvert attiré par un nombre fini d'orbites périodiques.

[3] Le point critique est non dégénéré et toutes les orbites périodiques sont hyperboliques (avec un exposant autre que $-1, 1$).

[4] Applications infiniment renormalisables et applications avec une infinité de cascades centrales.

[5] C'est-à-dire, une famille de sous-variétés complexes, localement modelé par un mouvement holomorphe. Un mouvement holomorphe sur un ouvert $\mathbb{W}$ d'un espace de Banach est une famille disjointe de graphes d'applications holomorphes de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{C}$.

[6] Si tous les paramètres de la famille ont une dérivée Schwarzienne négative et un point critique non dégénéré, cette condition est équivalente à l'existence d'un seul paramètre régulier. Ces conditions sont $\mathrm{C}^3$-ouvertes.

[7] On n'a pas introduit une topologie, ou métrique, dans l'ensemble des familles analytiques. En tous cas, la non trivialité est définie par une quantité dénombrable de conditions $\mathrm{C}^2$-ouvertes et de « codimension infinie ». Pour des topologies ou métriques raisonnables, ceci permet d'obtenir la généricité topologique et la prévalence métrique.

[8] Notre choix de $I_n$ est « l'emboîtement principal » (les cascades centrales ne sont pas considérées).

[9] Ceci peut être considéré comme l'équivalent complexe de la monotonie de la famille quadratique réelle.

[10] Une fois qu'on a des estimations métriques pour la petite perturbation dont on a besoin pour bouger la valeur critique dans la partition dynamique $\{I_n^j\}$.

[11] C'est-à-dire, $J \subset \operatorname{int} I$ est un intervalle tel que $c_\lambda \in \operatorname{int} J$ et $n > 0$ est tel que $f_\lambda^n(J) \subset J$ et $f_\lambda^k(\operatorname{int} J) \cap J = \emptyset$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

[12] Il existe $C > 0$, $\gamma > 1$ tels que $|Df_\lambda^n(f_\lambda(c_\lambda))| > C\gamma^n$ pour tout $n > 0$.

[13] L'ensemble des $n$ pour lesquels $|f_\lambda^n(c_\lambda) - c_\lambda| < n^{-\gamma}$ est fini si $\gamma > 1$ et infini si $\gamma < 1$.

[14] Par exemple, de variation bornée (Keller–Nowicki, Young). Dans cette situation, le mélange exponentiel est même équivalent à la condition de Collet–Eckmann (Nowicki–Sands).

[15] Les mesures stationnaires $\mu_\epsilon$ associées à des perturbations aléatoires convergent vers $\mu$ (dans la topologie $\mathrm{L}^1$ de leurs densités) quand le niveau de bruit $\epsilon$ tend vers zéro. Les bruits sont supposés i.i.d., additifs et absolument continus (Baladi–Viana).

[16] Pour tout $\delta > 0$, l'ensemble des $n$ pour lesquels $|f_\lambda^n(c_\lambda) - c_\lambda| < \mathrm{e}^{-\delta n}$ est fini.

[17] Le cas de la classe $\mathrm{C}^2$ peut être aussi inclus. La vitesse de mélange reste exponentielle et on peut obtenir des conditions techniques additionnelles qui permettent de remplacer la stabilité stochastique au sens fort par stabilité stochastique au sens faible (de Tsujii).

**Remerciements.** L'essentiel de ce travail a été fait en commun avec Misha Lyubich, Welington de Melo et Carlos Gustavo Moreira. Je remercie Viviane Baladi et Jean-Christophe Yoccoz de m'avoir encouragé à écrire cette Note.

## Références bibliographiques

[1] A. Avila, Bifurcations of unimodal maps: the topologic and metric picture, Thèse, IMPA, 2001, disponible à http://www.math.sunysb.edu/~artur/.
[2] A. Avila, M. Lyubich, W. de Melo, Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps, Prépublication, 2001, disponible à http://www.math.sunysb.edu/~artur/. Soumis pour publication.
[3] A. Avila, C.G. Moreira, Statistical properties of unimodal maps: the quadratic family, Prépublication, 2001, disponible à http://www.arXiv.org. Soumis pour publication.
[4] A. Avila, C.G. Moreira, Statistical properties of unimodal maps: smooth families with negative Schwarzian derivative, Prépublication, 2001, disponible à http://www.arXiv.org. Soumis pour publication.
[5] O.S. Kozlovski, Structural stability in one-dimensional dynamics, Thèse, Univ. Amsterdam, 1998.
[6] M. Lyubich, Dynamics of quadratic polynomials, I–II, Acta Math. 178 (1997) 185–297.
[7] M. Lyubich, Dynamics of quadratic polynomials, III. Parapuzzle and SBR measures, Astérisque 261 (2000) 173–200.
[8] M. Lyubich, Almost every real quadratic map is either regular or stochastic, Ann. Math. (à paraître).
[9] W. de Melo, S. van Strien, One-Dimensional Dynamics, Springer, 1993.