C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 899–902

Topologie/*Topology*

Sur des invariants galoisiens des revêtements ramifiés

Antonio F. Costa, Ana M. Porto

Departamento Matemáticas Fundamentales, Facultad de Ciencias, UNED, 28040 Madrid, Espagne

Reçu le 11 janvier 2002 ; accepté le 24 janvier 2002

Note présentée par Etienne Ghys.

Résumé Nous obtenons un invariant galoisien pour des revêtements de surfaces qui joue un rôle équivalent à celui de l'invariant Arf de Protopopov [3] pour certains types de revêtements à ramification impaire. L'approche par revêtements galoisiens associés permet de définir d'autres invariants qui peuvent s'appliquer à l'étude des revêtements avec indices de ramification non impairs. Un exemple est présenté dans la Section 4. ***Pour citer cet article : A.F. Costa, A.M. Porto, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 899–902.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On some Galois invariants of branched coverings

Abstract We obtain an invariant for branched coverings of surfaces using the regular covering associated to a given one. This invariant plays an equivalent role to the Arf invariant introduced by Protopopov in [3] for special types of coverings with odd branching indices. Our approach allows us to define other invariants for coverings with non-odd branching indices. ***To cite this article: A.F. Costa, A.M. Porto, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 899–902.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Dans cet article nous considérons des revêtements ramifiés de surfaces topologiques orientées et fermées (compactes et sans bord), ce qui entraîne que les résultats sont valables aussi pour le cas des revêtements de courbes algébriques lisses complexes et projectives et aussi pour le cas de revêtements de surfaces de Riemann (où ces revêtements ramifiés apparaissent de façon naturelle).

Soient $p_1 : R_1 \to S_1$ et $p_2 : R_2 \to S_2$ deux tels revêtements ramifiés à n feuillets. On dit que ces revêtements sont équivalents s'il existe un homéomorphisme qui préserve l'orientation $h : S_1 \to S_2$ et un homéomorphisme $k : R_1 \to R_2$, tels que $h \circ p_1 = p_2 \circ k$. La classification des revêtements ramifiés par des invariants « naturels » est un problème classique. Déjà en 1873, A. Clebsch a classifié les revêtements simples de la sphère en utilisant comme invariant le nombre de points de ramification, [1].

C'est donc une question importante que la définition d'invariants pour la classification des revêtements non-simples. J.-P. Serre dans [5] établit des relations entre certains invariants géométriques pour les revêtements à ramification impaire et certains invariants galoisiens, c'est-à-dire des invariants définis en utilisant le revêtement galoisien associé au revêtement donné, éventuellement irrégulier.

A.N. Protopopov dans [3], définit un nouvel invariant, Arf, pour certains types de revêtements à ramification impaire, en utilisant des structures spinorielles sur la sphère (*voir* [2]). Nous obtenons ici

Adresses e-mail : acosta@mat.uned.es (A.F. Costa); asilva@mat.uned.es (A.M. Porto).

S1631-073X(02)02281-1/FLA

un invariant galoisien qui joue un rôle équivalent à celui de l'invariant Arf de Protopopov et qui est défini aussi pour des revêtements d'autres surfaces que la sphère. Plus concrètement notre invariant est donné par l'existence d'une action libre du groupe $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ dans le revêtement galoisien associé à ce type de revêtements.

L'approche de Protopopov n'offre pas la possibilité de définir des invariants similaires au sien pour d'autres revêtements à indices de ramification non impairs. Par contre l'approche avec revêtements galoisiens associés permet la définition d'autres invariants qui peuvent être appliqués à des revêtements avec indices de ramification non impairs : un exemple est donné au paragraphe 4.

Nous remercions le présentateur et le rapporteur par leurs remarques et corrections intéréssantes.

2. Invariants galoisiens des revêtements

Soit $p : R \to S$ un revêtement à n feuillets, ramifié au-dessus des points $b_1, \ldots, b_s$. Une normalisation du revêtement p est une paire formée par un point $o \in S - \{b_1, \ldots, b_s\}$ et une bijection $f : p^{-1}(o) \to \{1, \ldots, n\}$. Une fois donnée une normalisation d'un revêtement p on peut construire, par relèvement de chemins, la représentation de monodromie $\omega_p : \pi_1(S - \{b_1, \ldots, b_s\}, o) \to \Sigma_n$ de p, où Σ_n est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Le groupe $G_p = \omega_p(\pi_1(S - \{b_1, \ldots, b_s\}, o))$ s'appelle *groupe de monodromie* du revêtement p. Le théorème classique de A. Hurwitz assure qu'il existe une bijection entre les représentations $\pi_1(S - \{b_1, \ldots, b_s\}, o) \to \Sigma_n$ et les revêtements de S ramifiés sur $\{b_1, \ldots, b_s\}$ avec normalisation de point base o.

Soit b_i un point de ramification de p et D_i un disque tel que $b_i \in \overset{\circ}{D}_i$ et ne contenant aucun b_j, $j \neq i$. Soit $\{D_i^{(1)}, \ldots, D_i^{(k)}\} = p^{-1}(D_i)$ et $\{b_i^{(j)} \in D_i^{(j)} : j = 1, \ldots, k\} = p^{-1}(b_i)$. Si le degré de p restreint à $D_i^{(j)}$ est $d_i^{(j)}$ on dit que l'indice de ramification de p en $b_i^{(j)}$est $d_i^{(j)}$. On appelle *méridien* de b_i tout élément de $\pi_1(S - \{b_1, \ldots, b_s\}, o)$ représenté par un chemin qui joint o à ∂D_i, ensuite parcourt ∂D_i positivement une seule fois et finalement retourne par le même chemin à o. Les *indices de ramification* des points qui sont envoyés par p sur b_i sont les longueurs des cycles dans la décomposition en cycles disjoints de la permutation $\omega_p(m_i)$ où m_i est un méridien de b_i.

Soit m l'ordre du groupe de monodromie G_p du revêtement p et soit $g : G_p \to \{1, \ldots, m\}$ une bijection. On définit $\omega_{Gp} : \pi_1(S - \{b_1, \ldots, b_s\}, o) \to \Sigma_m$ par $\omega_{Gp}(\gamma)(i) = g(\omega(\gamma)g^{-1}(i))$, où $\gamma \in \pi_1(S - \{b_1, \ldots, b_s\}, o)$ et $i \in \{1, \ldots, m\}$. Le revêtement $Gp : R_G \to S$ qui a pour monodromie ω_{Gp} est un revêtement galoisien avec groupe de Galois G_p et Gp est connu sous le nom de *revêtement galoisien associé* à p. On remarque que le revêtement Gp est déterminé complètement par p.

Supposons, maintenant, que le normalisateur de G_p dans le groupe symétrique Σ_m normalise aussi un sous-groupe F isomorphe à $(\mathbb{Z}_q)^h$, et que de plus F intersecte trivialement tous les sous-groupes cycliques $\langle \omega_p(m_i) \rangle$. Alors il y a un revêtement non-ramifié $r_p : R_G \to R_G/(\mathbb{Z}_q)^h = W_p$ qui est galoisien avec groupe de Galois $(\mathbb{Z}_q)^h$. La représentation de monodromie de r_p, $\omega_r : \pi_1(W_p) \to (\mathbb{Z}_q)^h \subset \Sigma_{q^h}$, se factorise par $\Omega_r : H_1(W_p, \mathbb{Z}_q) \to (\mathbb{Z}_q)^h$. Soit $\Omega_r^* : (\mathbb{Z}_q)^h \to \mathrm{Hom}(H_1(W_p, \mathbb{Z}_q), \mathbb{Z}_q) \simeq H^1(W_p, \mathbb{Z}_q)$ l'application transposée de Ω_r et soit $P : H^1(W_p, \mathbb{Z}_q) \to H_1(W_p, \mathbb{Z}_q)$ la dualité de Poincaré. L'application $\Delta_p = P \circ \Omega_r^*$ nous fournit une forme bilinéaire antisymétrique Q_p sur $(\mathbb{Z}_q)^h$ à partir de la forme d'intersection dans $H_1(W_p, \mathbb{Z}_q)$.

PROPOSITION 2.1. – *Les invariants linéaires de Q_p sont des invariants du revêtement p.*

Démonstration. – Soient $p_1 : R_1 \to S_1$ et $p_2 : R_2 \to S_2$ deux revêtements ramifiés à n feuillets qui sont équivalents. Soit $h : S_1 \to S_2$ l'homéomorphisme qui établit l'équivalence. Alors h se relève aussi à $W_{p_1} \to W_{p_2}$ induisant un isomorphisme de $H_1(W_{p_1}, \mathbb{Z}_q)$ vers $H_1(W_{p_1}, \mathbb{Z}_q)$ lequel implique l'équivalence linéaire entre Q_{p_1} et Q_{p_2}.

Les invariants galoisiens utilisés dans les deux paragraphes suivants seront ceux que la Proposition 2.1 décrit.

3. Les revêtements tetraédraux classifiés par des invariants galoisiens

Dans [4], l'auteur classifie les revêtements de la sphère avec indices de ramification $\{3,1,\ldots,1\}$ sur chaque point de ramification. On va considérer les revêtements à quatre feuillets et indices de ramification $\{3,1\}$ sur chaque point de ramification. La classification des revêtements avec un nombre de feuillets arbitraire et indices de ramification $\{3,1,\ldots,1\}$ se ramène aux revêtements à quatre feuillets par l'opération de somme connexe de revêtements qui sera décrite plus bas.

Soit $p : R \to S$ un revêtement à quatre feuillets, R connexe, et dont tous les indices de ramification sont $\{3,1\}$ sur chaque point de ramification. Alors, la représentation de monodromie de p est de la forme $\omega_p : \pi_1(S - \{b_1,\ldots,b_s\}, o) \to \Sigma_4$, avec $\omega_p(m_i) = (a,b,c)(d)$ où m_i est un méridien de b_i, $i = 1,\ldots,s$, et par conséquent, le groupe de monodromie de p est A_4. Nous appellerons *revêtement tétraédral irrégulier* tout revêtement vérifiant ces conditions. Le revêtement galoisien Gp associé à p a douze feuillets. Comme $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 < A_4$ on peut factoriser $Gp : R_G \to S$ par $R_G \xrightarrow{r} R_G/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = W_p \to S$, où r est un revêtement non-ramifié car tous les indices de ramification de p sont impairs.

Soit $\Delta_p : (\mathbb{Z}_2)^2 \to H_1(W_p, \mathbb{Z}_2)$, définie dans le paragraphe précédent. Soit $\{g_1, g_2\}$ une base de $(\mathbb{Z}_2)^2$, et $I(p) = \Delta_p(g_1) \cdot \Delta_p(g_2) \in \mathbb{Z}_2$, où $\cdot$ est le produit d'intersection. Le nombre $I(p)$ ne dépend pas de la base $\{g_1, g_2\}$ choisie (toutes les bases de $(\mathbb{Z}_2)^2$ sont conjuguées dans A_4). C'est à dire, $I(p)$ est un invariant du revêtement p et détermine la classe d'équivalence linéaire de la forme quadratique Q_p.

Dans l'étude des revêtements tétraédraux irreguliers il est utile de considérer la construction de somme connexe de deux revêtements : soient $p_1 : R_1 \to S_1$ et $p_2 : R_2 \to S_2$ deux revêtements à n feuillets ramifiés sur $\{b_1^{(i)},\ldots,b_{s_i}^{(i)}\}$, où $i = 1,2$. Soient (o_1, f_1) et (o_2, f_2) des normalisations de p_1 et p_2 respectivement. Soient $D_i \subset S_i - \{b_1^{(i)},\ldots,b_{s_i}^{(i)}\}$, et $o_i \in \partial D_i$, $i = 1,2$. On fait la somme connexe de S_1 et S_2 en identifiant $(\partial D_1, o_1)$ et $(\partial D_2, o_2)$; dans $R_1 - p^{-1}(D_1)$ et $R_2 - p^{-1}(D_2)$ on identifie $\partial(R_1 - p^{-1}(D_1))$ avec $\partial(R_2 - p^{-1}(D_2))$ de façon compatible avec les normalisations, obtenant ainsi une surface $R_{p_1\#p_2}$. Alors, on définit $p_1\#p_2 : R_{p_1\#p_2} \to S_1\#S_2$ de façon que la restriction sur chaque R_i soit p_i, $i = 1,2$.

L'invariant I est additif par rapport à la somme connexe (comme c'est le cas avec Arf, 4.2.2 de [4]) :

PROPOSITION 3.1. – *Soient $p_1 : R_1 \to S_1$ et $p_2 : R_2 \to S_2$ deux revêtements tétraédraux irréguliers, alors $I(p_1\#p_2) = I(p_1) + I(p_2)$.*

Démonstration. – Soit $\widehat{S_1\#S_2}$ le complexe définit à partir de $S_1\#S_2 \bigsqcup D^2$ en identifiant le borde du disque D^2 avec le cercle de somme connexe. On peut définir de façon naturelle $\widehat{p_1\#p_2} : \widehat{R}_{p_1\#p_2} \to \widehat{S_1\#S_2}$ et $\widehat{W}_{p_1\#p_2}$, $i = 1,2$, ce qui entraîne $S_i \subset \widehat{S_1\#S_2}$ et $W_{p_i} \subset \widehat{W}_{p_1\#p_2}$. Alors, étant donné que $H_1(\widehat{W}_{p_1\#p_2}) \simeq H_1(W_{p_1\#p_2})$, on a les homomorphismes $i : H_1(W_{p_1}) \to H_1(W_{p_1\#p_2})$ et $j : H_1(W_{p_2}) \to H_1(W_{p_1\#p_2})$ et, pour $g \in (\mathbb{Z}_2)^2$, on obtient $[\Delta_{p_1\#p_2}(g)]^* = i[\Delta_{p_1}(g)]^* + j[\Delta_{p_2}(g)]^*$. D'où il est facile de conclure que $I(p_1\#p_2) = I(p_1) + I(p_2)$.

En plus de l'invariant $I(p)$ et du nombre $s(p)$ de points de ramification il y a un autre invariant naturel pour les revêtements tétraédraux normalisés. Dans le groupe A_4 il y a deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre trois. Soit n_1 le nombre de points de ramification dont les méridiens correspondants sont envoyés par ω_p dans la classe de $(1,2,3)$ et n_2 le nombre de points de ramification dont les méridiens sont envoyés par ω_p dans la classe de $(1,3,2)$; alors, $\sigma(p) = n_1 - n_2$ est un invariant pour p. Il est clair que pour deux revêtements tétraédraux irréguliers normalisés p_1 et p_2 on a $\sigma(p_1\#p_2) = \sigma(p_1) + \sigma(p_2)$.

Soit $s(p)$ le nombre de points de ramification d'un revêtement p. D'après le théorème 6.3 de [4], tout revêtement tétraédral irrégulier de la sphère peut s'exprimer comme une somme connexe de quatre types de revêtements tétraédraux élémentaires. Par conséquent, pour classifier ces revêtements il suffit de trouver un système d'invariants qui prend des valeurs convenables pour les quatre types de revêtements élémentaires. Le système d'invariants $(s(p), \sigma(p), I(p))$, tout comme le système $(s(p), \sigma(p), \mathrm{Arf}(p))$ dans [4], suffit à lui seul pour classifier ces revêtements et c'est dans ce sens que nous affirmons que l'invariant $I(p)$ joue un rôle équivalent à celui de $\mathrm{Arf}(p)$. Le résultat suivant établit les valeurs du système d'invariants $(s(p), \sigma(p), I(p))$ pour les quatre revêtements tétraédraux élémentaires :

PROPOSITION 3.2. – *Soit $p_i : R_i \to S_i$ le revêtement avec représentation de monodromie $\omega_i : \pi_1(S^2 - \{b_1, \ldots, b_{s_i}\}, o) \to \Sigma_4$. Soit m_i méridien de b_j, $j = 1, \ldots, s_i$, avec $m_1 \cdots m_{s_i} = 1$, $i = 1, \ldots, 4$.*

Pour $i = 1$, $s_1 = 2$, ω_1 est défini par $\omega_1(m_1) = (1, 2, 3)$, $\omega_1(m_2) = (1, 3, 2)$, on a $(s(p_1), \sigma(p_1), I(p_1)) = (2, 0, 0)$. ($\mathrm{Arf}(p_1) = 0$.)

Pour $i = 2$, $s_2 = 3$, ω_2 est défini par $\omega_i(m_i) = (1, 2, 3)$, on a $(s(p_2), \sigma(p_2), I(p_2)) = (3, 3, 0)$. ($\mathrm{Arf}(p_2) = 1$.)

Pour $i = 3$, $s_3 = 3$, ω_3 est défini par $\omega_3(m_1) = (1, 2, 3)$, $\omega_3(m_2) = (1, 4, 2)$, $\omega_3(m_3) = (3, 2, 4)$, on a $(s(p_3), \sigma(p_3), I(p_3)) = (3, 3, 1)$. ($\mathrm{Arf}(p_3) = 0$.)

Pour $i = 4$, $s_4 = 4$, ω_4 est défini par $\omega_4(m_1) = (1, 2, 3)$, $\omega_4(m_2) = (2, 3, 4)$, $\omega_4(m_3) = (1, 2, 3)$, $\omega_4(m_4) = (2, 3, 4)$, on a $(s(p_4), \sigma(p_4), I(p_4)) = (4, 0, 1)$. ($\mathrm{Arf}(p_4) = 1$.)

Par exemple, $p_1 \# p_1$ et p_4 ne sont distingués que par I.

4. Exemple : un cas de revêtements à indices de ramification non impairs

Soient $\sigma = (1)(2, 4, 3, 7)(5, 6, 9, 8)$, $\tau_1 = (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9)$, et $\tau_2 = (1, 4, 7)(2, 5, 8)\ (3, 6, 9)$ trois permutations de Σ_9. On considère les revêtements $p : R \to S^2$, de la sphère S^2 ramifiés sur $b_1, \ldots, b_s$, de façon à ce que la représentation de monodromie $\omega_p : \pi_1(S^2 - \{b_1, \ldots, b_s\}, o) \to \Sigma_9$, satisfasse $\omega_p(m_i) = \sigma^\delta \tau_1^{\varepsilon_1} \tau_2^{\varepsilon_2}$, où $\delta = 1, 3$, $\varepsilon_1 = 0, 1, 2$, $\varepsilon_2 = 0, 1, 2$, où m_i est un méridien du point de ramification b_i et $\omega_p(\pi_1(S^2 - \{b_1, \ldots, b_s\}, o)) = \langle \sigma, \tau_1, \tau_2 \rangle$. Le groupe $\langle \sigma, \tau_1, \tau_2 \rangle$ est isomorphe à un produit semidirect $G = \mathbb{Z}_4 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3) = \langle \sigma \rangle \ltimes (\langle \tau_1 \rangle \oplus \langle \tau_2 \rangle)$ il s'ensuit que le revêtement galoisien associé $Gp : R_G \to S^2$ a 36 feuillets et G pour groupe de Galois. Dans G il y a un sous-groupe $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ qui est caractéristique et agit sans points fixes sur R_G. On peut donc appliquer la Proposition 2.1 à ces revêtements. La forme bilinéaire antisymétrique Q_p est déterminée par $\pm I(p)$, où $I(p) = \Delta_p(\tau_1) \cdot \Delta_p(\tau_2) \in \mathbb{Z}_3$, c'est-à-dire $\pm I(p)$ est un invariant pour p.

Construisons deux revêtements avec les propriétés précédentes et qui ne sont distingués que par l'invariant $\pm I(p)$: soient $p_i : R_i \to S^2$, $i = 1, 2$, ramifiés sur quatre points avec représentations de monodromie $\omega_i : \pi_1(S^2 - \{b_1, \ldots, b_4\}, o) \to \Sigma_9$. Soient m_j les méridiens de b_j, $j = 1, \ldots, 4$, avec $m_1 \cdots m_4 = 1$. Si on définit ω_1 sur les générateurs par $\omega_1(m_1) = \sigma$, $\omega_1(m_2) = \sigma^3$, $\omega_1(m_3) = \sigma\tau_1$, $\omega_1(m_4) = \sigma^3\tau_2^2$, on obtient $I(p_1) = 0$. Et si ω_2 est tel que $\omega_2(m_1) = \sigma$, $\omega_2(m_2) = \sigma^3\tau_1$, $\omega_2(m_3) = \sigma$, $\omega_2(m_4) = \sigma^3\tau_1^2$, on a alors $I(p_2) = 1$.

Remerciements. Nous remercions l'aide de DGICYT PB 99-0017.

Références bibliographiques

[1] A. Clebsch, Zur Theorie der Riemann'schen Flächen, Math. Ann. 6 (1873) 216–230.
[2] D. Johnson, Spin structures and quadratic forms on surfaces, J. London Math. Soc. 22 (1980) 365–373.
[3] A.N. Protopopov, Homeomorphisms of branched coverings of the two-dimensional sphere, Dokl. Akad. Nauk 290 (1986) 792–795.
[4] A.N. Protopopov, Topological classification of branched coverings of the two-dimensional sphere, J. Soviet Math. 52 (1990) 2832–2846.
[5] J.P. Serre, Revêtements à ramification impaire et thêta-caractéristiques, C. R. Acad. Sci. Paris 311 (1990) 547–552.