C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 325–330

Probabilités/*Probability Theory*

La loi du plus petit disque contenant la cellule typique de Poisson–Voronoi

Pierre Calka

Université Claude Bernard, Lyon 1, LaPCS, Bât. B, Domaine de Gerland, 50, avenue Tony-Garnier, 69366 Lyon cedex 07, France

Reçu le 3 janvier 2002 ; accepté le 7 janvier 2002

Note présentée par Jean-Pierre Kahane.

Résumé Soit R_m (respectivement R_M) le rayon du plus grand (respectivement plus petit) disque centré à l'origine et inclus dans (respectivement contenant) la cellule typique de la mosaïque de Poisson–Voronoi deux-dimensionnelle. Dans ce travail, nous obtenons la loi conjointe de R_m et R_M. Pour cela nous faisons appel à des techniques classiques de recouvrement du cercle dûes à Stevens, Siegel et Holst ainsi qu'à une conjecture de Siegel que nous démontrons. Le calcul des probabilités conditionnelles $\mathbf{P}\{R_M \geqslant r+s \mid R_m = r\}$ permet de préciser le caractère circulaire des cellules typiques de Poisson–Voronoi admettant un « grand » disque inscrit. ***Pour citer cet article : P. Calka, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 325–330.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The law of the smallest disk containing the typical Poisson–Voronoi cell

Abstract Denote by R_m (respectively R_M) the radius of the largest (respectively smallest) disk centered at the origin and included in (respectively containing) the typical cell of the two-dimensional Poisson–Voronoi tessellation. In this article, we obtain the joint distribution of R_m and R_M. This result is derived from the covering properties of the circle due to Stevens, Siegel and Holst. The computation of the conditional probabilities $\mathbf{P}\{R_M \geqslant r+s \mid R_m = r\}$ reveals the circular property of the Poisson–Voronoi typical cells having a "large" in-disk. ***To cite this article: P. Calka, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 334 (2002) 325–330.*** © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Consider $\Phi = \{x_n;\ n \geqslant 1\}$ a homogeneous Poisson point process in $\mathbb{R}^2$, with the 2-dimensional Lebesgue measure V_2 for intensity measure. The set of cells

$$C(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d;\ \|y-x\| \leqslant \|y-x'\|,\ x' \in \Phi \right\}, \quad x \in \Phi$$

(which are almost surely bounded polygons) is the well-known *Poisson–Voronoi tessellation* of $\mathbb{R}^2$. In order to describe the statistical properties of the tessellation, the notion of a *typical cell* $\mathcal{C}$ in the Palm sense

Adresse e-mail : pierre.calka@univ-lyon1.fr (P. Calka).

S1631-073X(02)02261-6/FLA

is commonly used and it is well known that $\mathcal{C}$ is equal in law to the cell

$$C(0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2;\ \|y\| \leqslant \|y - x\|,\ x \in \Phi \right\}$$

obtained when the origin is added to the point process Φ [8].

In this work, we obtain the exact distribution of the radius R_M of the smallest disk, centered at the origin, containing $\mathcal{C}$. More precisely, denoting by $P(\nu, n)$ the probability of covering a circle of circumference one by n random independent and identically distributed arcs, whose centers are uniformly distributed and lengths are of law ν, we show that

$$\mathbf{P}\{R_M \geqslant r\} = \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{-4\pi r^2} \frac{(4\pi r^2)^n}{n!} \bigl(1 - P(\nu_0, n)\bigr), \quad r > 0, \tag{1}$$

where $\nu_0(\mathrm{d}t) = \pi \sin(2\pi t) \mathbf{1}_{[0,1/2]}(t)\, \mathrm{d}t$.

The probabilities $P(\nu, n)$ were explicitely calculated by Siegel and Holst [13]. By inserting their expressions in (1), we obtain:

THEOREM 1. – *The law of R_M is given by the following equality*

$$\mathbf{P}\{R_M \geqslant r\} = \mathrm{e}^{-4\pi r^2} \left(1 - \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-4\pi r^2)^k}{k!} \xi_k \right), \quad r > 0,$$

with

$$\xi_k = \int \left[\prod_{i=1}^{k} F(u_i) \right] \mathrm{e}^{4\pi r^2 \sum_{i=1}^{k} \int_0^{u_i} F(t)\, \mathrm{d}t}\, \mathrm{d}\sigma_k(u), \quad k \geqslant 1,$$

and

$$F(t) = \begin{cases} \sin^2(\pi t) & \text{if } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 1 & \text{if } t \geqslant 1/2, \end{cases}$$

where σ_k denotes the (*normalized*) *area measure of the simplex*

$$\left\{ u = (u_1, \ldots, u_k) \in [0, 1]^k;\ \sum_{i=1}^{k} u_i = 1 \right\}.$$

At first sight, the formula (1) seems to be of little use. Nevertheless we deduce from it that:

THEOREM 2. – *For all $r > 0$, we have*

$$2\pi r^2 \mathrm{e}^{-\pi r^2} \left(1 + \frac{1}{2\pi r^2} \mathrm{e}^{-\pi r^2}\right) \leqslant \mathbf{P}\{R_M \geqslant r\}$$
$$\leqslant 2\pi r^2 \mathrm{e}^{-\pi r^2} \left(2 - 2\pi r^2 \mathrm{e}^{-\pi r^2} + \frac{\pi^2 r^4}{3} \mathrm{e}^{-2\pi r^2} + \frac{1}{2\pi r^2} \mathrm{e}^{-3\pi r^2}\right).$$

In particular, for $r \geqslant \alpha \approx 0.337$,

$$2\pi r^2 \mathrm{e}^{-\pi r^2} \leqslant \mathbf{P}\{R_M \geqslant r\} \leqslant 4\pi r^2 \mathrm{e}^{-\pi r^2}. \tag{2}$$

In order to obtain these estimations, we use a conjecture of Siegel [12] that provides a criterion (the concentration about the mean of the measure) to compare covering probabilities. In fact, this conjecture can be deduced quite easily from a non-trivial result proved by Huffer and Shepp [6].

By the same method we obtain the distribution of R_M conditionally to $R_m = r$, $r > 0$, as well as the following asymptotic estimation:

THEOREM 3. – *For all* $0 < c < 8/(3\sqrt{2})$ *and all fixed* $-1 < \alpha < 1/3$,

$$\mathbf{P}\left\{R_M \geqslant r + \frac{1}{r^\alpha} \;\middle|\; R_m = r\right\} = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-cr^{(1-3\alpha)/2}}\right), \quad \textit{when } r \to +\infty.$$

This means that the boundary of the cells such that the in-disk (centered at the origin) has a "large radius" r, is included in the annulus $A(r, r+1/r^\alpha)$ (with probability close to one). We observe, expressed in a different form, the circular property of the large cells of the two-dimensional Poisson–Voronoi tessellation that we already noticed in [4].

Besides, we can adapt the proceeding to study the radius of the smallest disk centered at the origin containing the Crofton cell of the Poisson line process in the plane [5].

0. Introduction et présentation des résultats

Soit $\Phi = \{x_n;\ n \geqslant 1\}$ la mesure de Poisson aléatoire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ admettant pour mesure d'intensité la mesure de Lebesgue canonique V_2. Les cellules

$$C(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^2;\ \|y - x\| \leqslant \|y - x'\|,\ x' \in \Phi\right\}, \quad x \in \Phi,$$

partitionnent l'espace $\mathbb{R}^2$ en domaines (aléatoires) polyèdraux, convexes, bornés, constituant la *mosaïque de Poisson–Voronoi* $\mathcal{V}_2$.

Introduite par Gilbert [3] en 1962 comme modèle statistique de la formation de cristaux (aléatoires), la mosaïque de Poisson–Voronoi est de nos jours un objet très largement utilisé dans les sciences appliquées, que ce soit par exemple en astronomie [14], dans le domaine de la conduction thermique [7], en écologie [10], ou en télécommunications [1] ; on trouvera dans [8] une description assez complète de son emploi.

L'étude statistique de la mosaïque fait appel à la notion de *cellule typique* $\mathcal{C}$ au sens de Palm. Introduisons pour cela l'espace $\mathcal{K}$ des ensembles convexes compacts muni de la topologie usuelle de Hausdorff. Fixons un ensemble borélien borné $B \subset \mathbb{R}^2$ de mesure de Lebesgue non nulle. Classiquement, la cellule typique $\mathcal{C}$ est définie par l'identité [8] :

$$\mathbf{E}h(\mathcal{C}) = \frac{1}{V_2(B)}\mathbf{E}\sum_{x \in B\cap\Phi} h\left(C(x) - x\right),$$

où $h : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ parcourt l'ensemble des fonctions numériques, mesurables et bornées.

Considérons par ailleurs la cellule

$$C(0) = \left\{y \in \mathbb{R}^2;\ \|y\| \leqslant \|y - x\|,\ x \in \Phi\right\},$$

obtenue en rajoutant l'origine au processus ponctuel Φ. On démontre alors [8] que $C(0)$ coïncide en loi avec la cellule typique $\mathcal{C}$.

Les lois des principales caractéristiques géométriques de $\mathcal{C}$ ne sont pas connues. Ainsi par exemple, le comportement asymptotique de la fonction de répartition de l'aire de $\mathcal{C}$ n'est pas maîtrisé, le meilleur encadrement dont on dispose à ce jour ayant été obtenu en 1961 par Gilbert [3] (*voir* également [9]) :

$$\mathrm{e}^{-4t} \leqslant \mathbf{P}\left\{V_2(\mathcal{C}) \geqslant t\right\} \leqslant \frac{t-1}{\mathrm{e}^{t-1} - 1}, \quad t > 0.$$

La loi du rayon R_m du plus grand disque centré à l'origine et inclus dans $C(0)$ s'explicite aisément :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{R_m \geqslant r\} &= \mathbf{P}\left\{D(r) \subset C(0)\right\}\\ &= \mathbf{P}\left\{\Phi \cap D(2r) = \emptyset\right\} = \mathrm{e}^{-4\pi r^2}, \quad r > 0,\end{aligned}$$

où $D(r)$, $r > 0$, désigne le disque fermé centré à l'origine de rayon r.

La détermination de la loi du rayon R_M du plus petit disque centré à l'origine contenant $C(0)$ est plus délicate. Ce problème a été abordé par Foss et Zuyev [2] dans le cadre de la modélisation mathématique d'un réseau de téléphonie mobile, le but étant d'estimer le coût des liaisons entre abonnés et stations de réception. Ils ont obtenu ainsi la majoration suivante [2] :

$$\mathbf{P}\{R_M \geqslant r\} \leqslant 7\,\mathrm{e}^{-\mu r^2}, \quad r > 0,$$

où $\mu = 2(\sin(\pi/14)\cos(5\pi/14) + \pi/7) \approx 1.09$.

1. La loi exacte de R_M

Dans ce travail, nous obtenons la loi exacte de R_M.

THÉORÈME 1. – *La loi de R_M est fournie par l'égalité*

$$\mathbf{P}\{R_M \geqslant r\} = \mathrm{e}^{-4\pi r^2}\left(1 - \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-4\pi r^2)^k}{k!}\xi_k\right), \quad r > 0, \tag{1}$$

en notant

$$\xi_k = \int \left[\prod_{i=1}^{k} F(u_i)\right] \mathrm{e}^{4\pi r^2 \sum_{i=1}^{k}\int_0^{u_i} F(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\sigma_k(u), \quad k \geqslant 1,$$

avec

$$F(t) = \begin{cases} \sin^2(\pi t) & si\ 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 1 & si\ t \geqslant 1/2, \end{cases} \tag{2}$$

où σ_k désigne la mesure d'aire (normalisée) du simplexe $\{u = (u_1, \ldots, u_k) \in [0,1]^k;\ \sum_{i=1}^{k} u_i = 1\}$.

L'idée consiste à voir que la probabilité $\mathbf{P}\{R_M \geqslant r\}$ peut s'exprimer en termes de probabilités de recouvrement du cercle unité par des arcs aléatoires indépendants et identiquement distribués. Plus précisément, pour toute mesure de probabilité ν sur $[0,1]$, notons par $P(\nu, n)$ la probabilité pour que le cercle de périmètre égal à un soit recouvert par n arcs aléatoires ouverts $\mathcal{A}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que :

(i) les longueurs respectives $0 \leqslant L_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, des arcs sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ν ;

(ii) les centres respectifs C_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, de ces arcs sont des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur le cercle ;

(iii) Les suites $\{L_i;\ i \geqslant 1\}$ et $\{C_i;\ i \geqslant 1\}$ sont indépendantes.

Nous démontrons que :

THÉORÈME 2. – *On a*

$$\mathbf{P}\{R_M \geqslant r\} = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-4\pi r^2}\frac{(4\pi r^2)^n}{n!}\big(1 - P(\nu_0, n)\big), \tag{3}$$

où $\nu_0(\mathrm{d}t) = \pi\sin(2\pi t)\mathbf{1}_{[0,1/2]}(t)\,\mathrm{d}t$.

Les probabilités $P(\nu, n)$ ont été explicitées par Siegel et Holst [13]. En insérant leurs expressions dans (3), on déduit le théorème 1.

2. Utilisation d'un résultat de comparaison des probabilités de recouvrement

La formule (3) peut sembler, à première vue, d'un emploi difficile. De fait, nous en déduisons l'encadrement suivant.

THÉORÈME 3. – *On a pour tout $r > 0$,*

$$2\pi r^2\,\mathrm{e}^{-\pi r^2}\left(1+\frac{1}{2\pi r^2}\,\mathrm{e}^{-\pi r^2}\right)\leqslant \mathbf{P}\{R_M\geqslant r\}$$
$$\leqslant 2\pi r^2\,\mathrm{e}^{-\pi r^2}\left(2-2\pi r^2\,\mathrm{e}^{-\pi r^2}+\frac{\pi^2 r^4}{3}\,\mathrm{e}^{-2\pi r^2}+\frac{1}{2\pi r^2}\,\mathrm{e}^{-3\pi r^2}\right).$$

En particulier, pour $r \geqslant \alpha \approx 0.337$,

$$2\pi r^2\,\mathrm{e}^{-\pi r^2}\leqslant \mathbf{P}\{R_M\geqslant r\}\leqslant 4\pi r^2\,\mathrm{e}^{-\pi r^2}. \tag{4}$$

La démonstration de ces estimations fait appel à la notion de concentration (autour de la moyenne) d'une mesure de probabilité.

DÉFINITION 1 (Siegel [12]). – Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité sur $[0,1]$ de même moyenne

$$\int_0^1 t\,\mathrm{d}\nu_1(t)=\int_0^1 t\,\mathrm{d}\nu_2(t)=e\in[0,1].$$

On dit que ν_1 est plus concentrée (autour de la moyenne) que ν_2 si

$$\begin{cases}\nu_1\big([0,t]\big)\leqslant \nu_2\big([0,t]\big) & \text{pour } t<e,\\ \nu_1\big([0,t]\big)\geqslant \nu_2\big([0,t]\big) & \text{pour } t\geqslant e.\end{cases}$$

Le résultat de comparaison suivant, énoncé par Siegel [12] sous forme de conjecture, se déduit d'un théorème de convexité non trivial dû à Huffer et Shepp [6].

THÉORÈME 4. – *Si ν_1 est plus concentrée que ν_2, alors on a*

$$P(\nu_1,n)\leqslant P(\nu_2,n)\quad \forall n\geqslant 1. \tag{5}$$

En remarquant que ν_0 est moins concentrée que $\delta_{1/4}$ et plus concentrée que $1/2(\delta_0+\delta_{1/2})$, une application du théorème 4 permet d'obtenir l'encadrement de la queue de R_M souhaité.

Remarquons que le Théorème 3 fournit un majorant de la fonction de répartition de l'aire de $\mathcal{C}$ qui est meilleur que celui de Gilbert pour $0 < t \leqslant \lambda \approx 1.043$ et moins bon sinon.

3. Loi conditionnelle de R_M sachant $R_m = r > 0$

La même stratégie de démonstration permet d'obtenir les lois conditionnelles

$$\mathbf{P}\big\{R_M\geqslant t\mid R_m=r\big\},\quad r\geqslant 0,\ t>0,$$

ainsi que les estimations asymptotiques correspondantes.

THÉORÈME 5. – *Pour tous $r, s > 0$, on a* :

$$\mathbf{P}\big\{R_M\geqslant r+s\mid R_m=r\big\}=\mathrm{e}^{-4\pi(s^2+2rs)a_{r,s}}+\mathrm{e}^{-4\pi(s^2+2rs)}\left(1+\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k\frac{(4\pi(s^2+2rs))^k}{k!}\xi_k(r,s)\right), \tag{6}$$

où pour tout $k \geqslant 1$,

$$\xi_k(r,s)=\int \mathbf{1}_{\{u_1\geqslant l_{r,s}\}}\left[\prod_{i=2}^{k+1}F_{r,s}(u_i)\right]\mathrm{e}^{4\pi(s^2+2rs)\sum_{i=1}^{k+1}\int_0^{u_i}F_{r,s}(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\sigma_{k+1}(u)$$
$$-\int\left[\prod_{i=1}^{k}F_{r,s}(u_i)\right]\mathrm{e}^{4\pi(s^2+2rs)\sum_{i=1}^{k}\int_0^{u_i}F_{r,s}(t)\,\mathrm{d}t}\left[\sum_{i=1}^{k}(u_i-l_{r,s})_+\right]\mathrm{d}\sigma_k(u),$$

avec

$$l_{r,s} = \arccos(r/(r+s))/\pi, \tag{7}$$

$$F_{r,s}(t) = \nu_{r,s}([0,t]) = \begin{cases} \frac{(r+s)^2}{2rs+s^2}\sin^2(\pi t) & \textit{si } 0 \leqslant t \leqslant l_{r,s}, \\ 1 & \textit{si } t \geqslant l_{r,s}, \end{cases} \tag{8}$$

et

$$\begin{aligned} a_{r,s} &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}\nu_{r,s}(t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\frac{r}{s}}\left(1+\frac{s}{2r}\right)^{-1/2} + \frac{1}{\pi}\arccos\left(1-\frac{s}{s+r}\right)\left(1+\frac{s}{2r}\right)^{-1}\left(-\frac{r}{4s}+\frac{1}{2}+\frac{s}{4r}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

THÉORÈME 6. – *Pour tout* $0 < c < 8/(3\sqrt{2})$ *et pour tout* $-1 < \alpha < 1/3$ *fixé,*

$$\mathbf{P}\left\{R_M \geqslant r + \frac{1}{r^\alpha} \;\middle|\; R_m = r\right\} = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-cr^{(1-3\alpha)/2}}\right), \quad \textit{quand } r \to +\infty. \tag{10}$$

Le résultat asymptotique (10) se déduit de (6) et d'une inégalité dûe à Shepp (*voir* [11]). Il signifie que les cellules dont le disque inscrit (centré à l'origine) a « un grand rayon » r, ont leur frontière incluse dans la couronne $C(r, r+1/r^\alpha)$ (avec une probabilité proche de un). On retrouve exprimé sous une forme différente, le caractère circulaire des grandes cellules observé dans [4].

Remarque. – Il est possible d'adapter le même procédé à l'étude du rayon du plus petit disque centré à l'origine contenant la cellule de Crofton de la mosaïque poissonienne du plan [5].

Références bibliographiques

[1] Fr. Baccelli, B. Blaszczyszyn, On a coverage process ranging from the Boolean model to the Poisson–Voronoi tessellation with applications to wireless communications, Rapport de recherche INRIA No 4019, October, 2000.
[2] S.G. Foss, S.A. Zuyev, On a Voronoi aggregative process related to a bivariate Poisson rocess, Adv. Appl. Probab. 28 (4) (1996) 965–981.
[3] E.N. Gilbert, Random subdivisions of space into crystals, Ann. Math. Statist. 33 (1962) 958–972.
[4] A. Goldman, P. Calka, On the spectral function of the Poisson–Voronoi cells, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 332 (9) (2001) 835–840.
[5] A. Goldman, Le spectre de certaines mosaïques poissoniennes du plan et l'enveloppe convexe du pont brownien, Probab. Theory Related Fields 105 (1) (1996) 57–83.
[6] F.W. Huffer, L.A. Shepp, On the probability of covering the circle by random arcs, J. Appl. Probab. 24 (2) (1987) 422–429.
[7] S. Kumar, R.N. Singh, Thermal conductivity of polycristalline materials, J. Amer. Cer. Soc. 78 (3) (1995) 728–736.
[8] J. Møller, Lectures on Random Voronoi Tessellations, Springer-Verlag, New York, 1994.
[9] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, Wiley, Chichester, 1992. With a foreword by D.G. Kendall.
[10] E. Pielou, Mathematical Ecology, Wiley-Interscience, New York, 1977.
[11] L.A. Shepp, Covering the circle with random arcs, Israel J. Math. 11 (1972) 328–345.
[12] A.F. Siegel, Random space filling and moments of coverage in geometrical probability, J. Appl. Probab. 15 (2) (1978) 340–355.
[13] A.F. Siegel, L. Holst, Covering the circle with random arcs of random sizes, J. Appl. Probab. 19 (2) (1982) 373–381.
[14] R. van de Weygaert, Fragmenting the Universe III. The construction and statistics of 3-D Voronoi tessellations, Astronom. Astrophys. 283 (1994) 361–406.